# المپیاد ریاضی

تمرین سری ششم | پایه یازدهم | تابستان ۹۷

۱) ثابت کنید: $۷|۶۶^{۵۷}+۵۷^{۶۶}$ .

۲) اگر $a \overset{۹۵}{\equiv} ۴۰$ باقی مانده ی تقسیم $۲a^{۲}-۳a+۷$ را بر ۱۹ بیابید.

۳) به ازای چند عدد از مجموعه ی $\{۱,...,۱۰۰\}$ مانند $n$، عدد $۳^{n}+۷$ بر ۱۶ بخش پذیر است.

۴) باقی مانده ی تقسیم $۶^{۱۹^{۱۷۸}}$ را بر ۱۷ بیابید.

۵) ثابت کنید $۱۴^{n}+۳۹^{n-۱}+۳۵^{n+۱} \overset{۳۰}{\equiv} ۰$ .

۶) فرض کنید $a^{۲۰} \overset{m}{\equiv} ۱$ و $a^{۳۵} \overset{m}{\equiv} ۱$ ثابت کنید $a^{۵} \overset{m}{\equiv} ۱$ .

۷) کلیه رقم های $a$ را بیابید که عدد ۴ رقمی $\overline{۳۳۵a}$ بر ۴ بخش پذیر باشد.

۸) اگر عدد $\overline{۷۶۵۴a}$ بر ۲۷ بخش پذیر باشد. باقیمانده ی تقسیم این عدد بر ۱۰۱ چند است؟

۹) ثابت کنید عدد $\overline{ab۷ab}$ بر ۷ بخش پذیر است.

۱۰) رقم یکان عدد $۲۵^{۲۵}+۲۴^{۲۴}+۲۳^{۲۳}+۲۲^{۲۲}$ را بیابید.

۱۱) رقم یکان $a^{a}$ را بیابید اگر $a=۱!+۲!+\cdots+۱۰۰!$ باشد.

۱۲) به ازای چند مقدار $a$ متعلق به مجموعه ی $\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ معادله ی سیاله ی $ax+۱۲y=۳۰$ جواب دارد؟

۱۳) اگر معادله ی سیاله $ax+۱۵y=۶۳$ جواب داشته باشد، ثابت کنید $ax+۵۰y=۲۲$ نیز جواب دارد.

۱۴) کلیه جواب های معادله ی $۸x \overset{۱۹}{\equiv} ۵^{۱۰۰}$ را بیابید.

۱۵) اگر $(a,b)=۱$ باشد و $n>ab$ باشد ثابت کنید معادله ی $ax+by=n$ در مجموعه ی اعداد طبیعی جواب دارد.

۱۶) باقی مانده ی تقسیم $۱۱^{۴۴}$ بر ۴۷ را بیابید.

۱۷) همه ی عدد های اول $p$ را بیابید اگر $p|۱۷^{p-۱}+۱۱$ .

۱۸) کلیه ی جواب های معادله ی $x^{۱۱}+۳x \overset{۱۱}{\equiv} ۷$ را بیابید.

۱۹) اگر $a \nmid ۱۹$ و $b \nmid ۱۹$ ثابت کنید $۱۹|a^{۱۸}-b^{۱۸}$ .

۲۰) اگر $p$ عددی اول و فرد باشد ثابت کنید $۱^{p}+۲^{p}+\cdots+p^{p} \overset{p}{\equiv} ۰$ .

۲۱) اگر $p$ عددی اول باشد ثابت کنید $\frac{(۲p-۱)!}{p!} \overset{p}{\equiv} -۱$ .

۲۲) باقی مانده ی تقسیم $۱۵!$ را بر ۱۹ بیابید.

۲۳) اگر $p$ عددی اول و فرد باشد ثابت کنید $a^{۲p-۱} \overset{۲p}{\equiv} a$ .

۲۴) اگر $n+۱$ و $۲n+۱$ اعدادی اول باشند، $m=(n+۱)(۲n+۱)$ و $(a,m)=۱$ ثابت کنید $a^{۲n} \overset{m}{\equiv} ۱$ .

۲۵) اگر $p$ اول باشد و $۰<k<p$ ثابت کنید $(-۱)^k (k-۱)!\,(p-k)! \overset{p}{\equiv} ۱$ .

۲۶) اگر $p>۲$ و عددی اول باشد ثابت کنید $(p-۱)^۲ \times \dots \times ۶^۲ \times ۴^۲ \times ۲^۲ \overset{p}{\equiv} ۱$ .

۲۷) اگر $p$ اول باشد ثابت کنید $\binom{p-۱}{k} \overset{p}{\equiv} (-۱)^k$ .

۲۸) اگر $p$ و $q$ دو عدد اول متمایز باشند، $p-۱|q-۱$ و $(a,pq)=۱$ ثابت کنید $a^{q-۱} \overset{pq}{\equiv} ۱$ .

۲۹) اگر $p$ عددی اول باشد و $n=۲^p-۱$ ثابت کنید $۲^n \overset{n}{\equiv} ۲$ .

۳۰) ثابت کنید عدد طبیعی $n>۱$ وجود ندارد به گونه ای که $n|۲^n-۱$ .