چرا تعداد اعداد اول نامتناهی است؟

برهان لئونارد اویلر

اشاره

در این مقاله کوشـیده‌ایم برهان ریاضی‌دان مشهور سوئیسی، لئونارد اویلـر[۱]، را دربارهٔ نامتناهی بودن اعداد اول بیـان کنیم. این اثبات که از مباحث «نظریهٔ تحلیلی اعداد»[۲] اسـتفاده می‌کند، در قرن هجدهم مطرح شده است.

کلیدواژه‌ها: نظریهٔ اعداد، نظریهٔ تحلیلی اعداد، تعداد اعداد اول

عـدد طبیعی $p>1$ را اول می‌گوییـم، اگر تنها اگر مقسوم‌علیه‌های مثبت آن ۱ و p باشند. اعداد اول قسمت اعظمی از نظریهٔ اعداد را شـامل می‌شـوند. ویژگی‌های خاص این اعداد باعث شـده اسـت، ریاضی‌دانانی مانند **اقلیدس**، **اویلر** و **اردوش** روی خواص آن‌ها کار کنند و حاصل این مطالعات، قضایای مختلفی است که امروزه در کتاب‌های ریاضی دیده می‌شوند؛ و البته حدس‌ها و مسائل متعددی که هنوز به اثبات نرسیده‌اند!

یکی از مباحث مقدماتی دربارهٔ اعداد اول، تعداد این اعداد است. اگر دنبالهٔ این اعداد را در نظر بگیریم:

۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹,۳۱,۳۷,۴۱,۴۳,۴۷, ...

پیدا کردن نظمی خاص بین آن‌ها غیرممکن است. به‌علاوه، اگر این دنباله را تا اعداد سه‌رقمی و بیشتر ادامه دهیـم، می‌بینیم فراوانی آن‌ها بین اعداد طبیعی هرچه بالاتر می‌رویم، کمتر می‌شـود. و ممکن است این‌گونه به‌نظر بیاید که این اعداد جایی به پایان می‌رسند. اما در واقع این‌گونه نیست!

کوتاه‌تریـن و احتمالاً قابل فهم‌ترین برهان برای این حکم، روش اقلیدس اسـت که دانش‌آموزان سال چهارم رشتهٔ ریاضی در کتاب «ریاضیات گسسته» آن را مطالعه می‌کننـد. حال آنکه در مطالعهٔ اعداد، بیشـتر به افرادی مانند اویلر و **فرما** برمی‌خوریم تا اقلیدس! در این مقاله هدف آن است که برهان اویلر برای نامتناهی بودن اعداد اول به‌صورت سـاده بیان شـود. ایـن روش اگرچه کمی پیچیده‌تر و طولانی‌تر است، اما زیبایی خاص خود را دارد.

حکم: تعداد اعداد اول نامتناهی است.

پیـش از بیان برهان این حکـم، دو لم کاربردی را بیان و اثبات می‌کنیم.

لم اول: جمع معکوس‌های همهٔ اعداد طبیعی نامتناهی است.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$$

برهان لم اول: می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}>\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

اگر نامساوی‌های بالا را تا بی‌نهایت در نظر بگیریم، با جمع زدن طرف‌های چپ و راست به‌صورت جداگانه داریم:

$$\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i}>n\times\frac{1}{2}n\to\infty\Rightarrow\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty\Rightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\infty$$

پس لم اول ثابت شد. ■

لم دوم: با فرض $0<q<1$ می‌توان ادعا کرد:

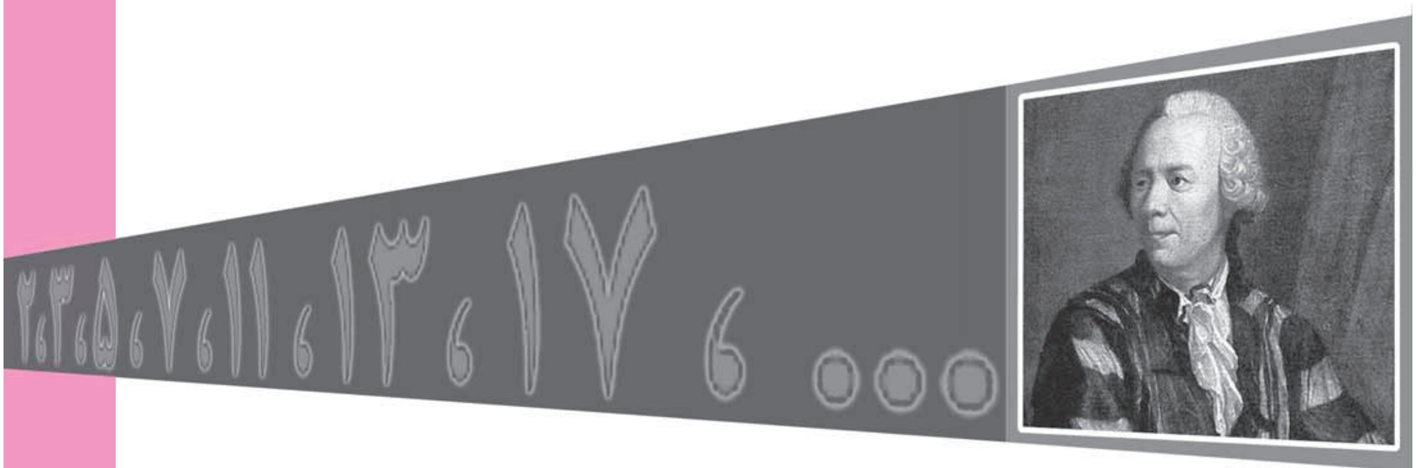
$$1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

برهان لم دوم: قرار می‌دهیم:

$$S_n=1+q+q^2+\ldots+q^n$$

$$qS_n=q+q^2+q^3+\ldots+q^{n+1}$$

$$S_n-qS_n=1-q^{n+1}\Rightarrow S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$



حـال با توجه به اینکه n به بی‌نهایت میل می‌کند و اینکه: $0<q<1$، می‌توان گفت q^{n+1} به صفر میل می‌کند.

پس لم دوم نیز ثابت شد. ■

حال به سراغ اثبات مسئلهٔ اصلی می‌رویم:

برهان خلف: فرض می‌کنیم تعـداد اعداد اول متناهی باشد و بتوان دنبالهٔ این اعداد را به‌صورت $2,3,5,7,11,...,p$ نشان داد. حال مجموع توان‌های معکوس‌های همهٔ اعداد اول را در نظر می‌گیریم. یعنی:

$$a_2 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots$$

$$a_3 = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$$

$$a_5 = 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\dots$$

$$\vdots$$

$$a_p = 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\dots$$

داریم:

$$A = a_2 \times a_3 \times a_5 \times \dots \times a_p$$
$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{5^i}\right)\dots\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^i}\right)$$

ادعا می‌کنیم:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$

اثبات ادعا: برای ساختن هر یک از جملات مجموع $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$ باید از هر یک از پرانتزهای تشکیل‌دهندهٔ A یک عـدد را انتخاب کنیم. امـا می‌دانیم همهٔ توان‌های همهٔ اعداد اول در این پرانتزها آمده‌اند. از طرف دیگر، مطابق «قضیهٔ بنیادی حسـاب»[3]، هر عـدد بزرگ‌تر از یک را می‌توان به‌صورت یکتا به‌صورت حاصل‌ضرب عوامل اول نوشت. پس هر یک از $\frac{1}{i}$ ها در بسط A ظاهر می‌شوند. همچنین، با توجه به یکتایی این نمایش، هر یک از $\frac{1}{i}$ ها فقط یک‌بار در بسط A ظاهر می‌شوند. پس ادعا ثابت می‌شود. ■

در نتیجه مطابق لم اول می‌توان گفت:

$$A \to \infty \qquad (*)$$

اما با استفاده از لم دوم می‌دانیم:

$$a_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$a_3 = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$a_5 = \frac{1}{1-\frac{1}{5}}$$

$$\vdots$$

$$a_p = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow A = a_2 \times a_3 \times a_5 \times \dots \times a_p$$
$$= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\right)\dots\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

به وضوح حاصل‌ضرب بالا که دارای متناهی جمله اسـت، برابر یک عدد گویاسـت و این بـا رابطهٔ (*) در تناقض است.

پس فرض خلف باطل اسـت و حکـم ثابت؛ یعنی تعداد اعداد اول نامتناهی است. ■

پی‌نوشت‌ها

1. Leonhard Euler
2. Analytic number theory
3. Fundamental theorem of arithmetic

منبع

۱. کمیتـه علمی المپیاد ریاضی اول (۱۳۹۴). ویدیوهـای آموزشـی مرحلهٔ دوم المپیاد ریاضی.

۲. بهزاد، مهـدی؛ رجالی، علی؛ عمیـدی، علـی؛ محمودیان، عبـادالله (۱۳۹۳). ریاضیـات گسستهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. تهران.