دانش افزایی

دکتر ناصر بروجردیان

عضو هیئت علمی
دانشکده ریاضی
دانشگاه صنعتی
امیرکبیر

آیا $(-۱)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌شود

اشاره

در این مقاله، به موضوع توان و تعریفِ به توان رساندن اعداد، به توان اعداد گویا و حقیقی، خواهیم پرداخت و خواهیم دید به چه دلایلی فقط توان رسانی اعداد مثبت به توان اعداد گویا و حقیقی تعریف می‌شود. در لابه‌لای این بررسی با مسئلهٔ تعریف در ریاضیات نیز بیشتر آشنا خواهیم شد و خواهیم دید به چه دلیل در ریاضیات تعریف وجود دارد و ملاک‌های تعریف کردن یا تعریف نکردن چیست؟

۱. به توان رساندن با اعداد طبیعی و صحیح

مفهوم توان در پایهٔ اول دورهٔ متوسطه آموزش داده می‌شود. در تعریف به توان رساندن با اعداد طبیعی هیچ مشکل جدی وجود ندارد و به توان رساندن یک عدد حقیقی دلخواه، چه مثبت و چه منفی و حتی صفر ـ اگر توان عدد طبیعی باشد به سادگی قابل تعریف است. توجه داشته باشید که توان رسانی، عمل جدیدی بین اعداد است و برای نمایش آن نیازمند علامت‌گذاری جدیدی هستیم، ولی برخلاف اعمال جمع و ضرب که برای نمایش آن‌ها از نمادهایی مانند "+" و "×" استفاده می‌کنیم، در اینجا از نمایشی استفاده می‌کنیم که وضعیت هندسی دو عدد آن را نشان می‌دهند. برای عدد طبیعی n و عدد حقیقی a، رساندن a به توان n را با علامت a^n نشان می‌دهیم. تعریف دقیق‌تر رساندن اعداد به توان اعداد طبیعی در سال‌های بالاتر با استقراء انجام می‌شود. با استقراء خواص اساسی زیر را می‌توان برای آن اثبات کرد.

$$a^{n+m}=a^n a^m \quad , (a^n)^m = a^{nm} \quad , (ab)^n = a^n b^n$$

در بالا a و b اعداد حقیقی و m و n اعداد طبیعی دلخواه هستند

در تعریفِ به توان رساندن با توان اعداد صحیح، نکتهٔ اصلی آن است که تعریف باید به گونه‌ای انجام شود که خواص اساسی همچنان برقرار بمانند. بنابراین، ناچاریم برای یک عدد صحیح منفی مانند n- که n یک عدد طبیعی است بنا به تعریف قرار دهیم: $a^{-n}=\frac{۱}{a^n}$، همچنین باید تعریف کنیم: $a^{\circ}=۱$

روشن است که در این تعریف چون عمل تقسیم وجود دارد باید مخرج ناصفر باشد، برای همین در این تعریف، توان رسانی فقط برای اعداد حقیقی ناصفر تعریف می‌شود.

۲. به توان رساندن با اعداد گویا

حال می‌خواهیم توان رسانی به توان اعداد گویا را تعریف کنیم. نیز می‌خواهیم تعریف به گونه‌ای باشد که خواص اساسی توان‌رسانی برقرار بماند. مثلاً برای یک عدد گویا به صورت $\frac{۱}{n}$ (n عددی طبیعی است) باید داشته باشیم:

$$(a^{\frac{۱}{n}})^n = a^{n\times\frac{۱}{n}} = a^۱ = a$$

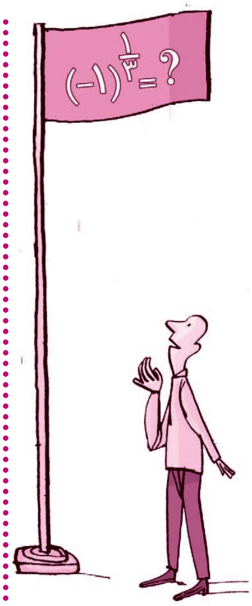
تساوی بالا نشان می‌دهد که $a^{\frac{۱}{n}}$ را باید به صورت یکی از ریشه‌های nام a تعریف کنیم. اگر n فرد باشد، مشکلی در تعریف

نخواهیم داشت، زیرا برای هر عدد طبیعی فرد n، هر عدد حقیقی a دارای ریشهٔ nام منحصربه‌فرد است. اما اگر n زوج باشد a باید مثبت در نظر گرفته شود و در این حالت a دو ریشهٔ nام خواهد داشت و باید یکی از آن‌ها را به عنوان تعریف -- انتخاب کنیم. ملاحظه می‌شود که در تعمیم تعریف به توان رساندن با اعداد گویا راه چندان سر راست نیست و حتی تعریف را نمی‌توان سر راست ارائه کرد. آنچه در تعمیم یک تعریف اولویت دارد حفظ خواص اساسی است؛ اولویت دیگر آن است که تا آنجا که ممکن است تعریف باید عمومیت بیشتری داشته باشد. فعلاً در تعریف توان رسانی دیدیم که در حالت کلی نمی‌توانیم برای هر عدد حقیقی a تعریف را انجام دهیم، و شاید بهتر باشد خودمان را به اعداد مثبت محدود کنیم، زیرا در این حالت می‌توان $a^{\frac{1}{n}}$ را به عنوان یگانه ریشهٔ n ام مثبت a تعریف کنیم.

ممکن است برخی با این عمل موافق نباشند و نظر آن‌ها این باشد که نباید تعریف را این همه محدود کرد. زیرا اگر n فرد باشد تعریف به عنوان ریشهٔ منحصر به فرد n ام a کاملاً طبیعی است و هیچ مشکل منطقی ندارد. واقعیت آن است که این شیوه‌های برخورد متفاوت در تعریف این مفهوم در کتاب‌ها موجود است و در برخی کتاب‌ها هم طبق نظر دوم عمل شده است، ولی در اکثر کتاب‌ها از همان نظر اول پیروی شده است. این یکی از انعطاف‌های ریاضی است که دست ریاضیدان‌ها را در بیان مفاهیم و تعاریف ریاضی باز می‌گذارد، فقط باید سازگاری منطقی مفاهیم و تعاریف را رعایت کنند. البته باید توجه داشت که چون جامعهٔ ریاضی یکپارچه است و ریاضیدان‌ها باید با هم در حال تبادل نظر باشند، این طور نیست که هرکس هر جور دلش خواست تعریف وضع کند به طوری که تعریف یک لفظ یا مفهوم با بیان‌های متفاوت رایج شود. کسانی که متخصص ریاضی هستند با این تفاوت‌ها، که ممکن است رخ دهد، آشنا هستند و می‌دانند که در هر زمینه‌ای چه تعاریفی و چه تفاوت‌هایی در تعاریف ممکن است وجود داشته باشد. به همین خاطر در خواندن هر متن ریاضی اول بررسی می‌کنند که نویسنده چه تعاریفی از مفاهیم دارد و چه اصولی را مفروض دانسته است. همچنین در تمام کتاب‌های ریاضی معمولاً نویسنده، فصل اول کتاب را به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی اختصاص می‌دهد تا معلوم شود وی براساس کدام مفاهیم و تعاریف کتاب خود را نوشته است.

این نکات معمولاً در سطح ریاضیات مدرسه‌ای طرح نمی‌شوند، به همین خاطر در سطح مدرسه معمولاً فرض می‌شود همهٔ مفاهیم تعاریف یکتایی دارند و همه کتاب‌ها مطالب یکسانی را نسبت به آن‌ها بیان می‌کنند. یک مثال قابل توجه در همین مورد در کتاب، هندسهٔ (۲) وجود دارد. در این کتاب، در بخش مجلهٔ آن، مطلبی دربارهٔ وجود مثلث آمده است. این قسمت کتاب می‌خواهد ثابت کند که برای هر سه عدد مثبت، اگر بزرگ‌ترین آن‌ها از مجموع دو عدد دیگر کوچک‌تر باشد، مثلثی وجود دارد که طول اضلاع آن همین سه عدد هستند. در صفحات قبل این قسمت، در کتاب، در ترسیمات هندسی از تقاطع دایره‌ها بسیار استفاده شده است و اگر دانش‌آموزی دقت کند می‌تواند با همان روش رسم دایره و قطع دایره‌ها قضیهٔ وجود چنین مثلثی را در یک خط حل کند. اما در مجلهٔ مذکور، راه پر پیچ و خمی از رسم عمود و محاسبات جبری دیده می‌شود که خود این اعمال، طبق روش کتاب‌های هندسهٔ ما، مبتنی بر همان رسم دایره‌ها و تقاطع دایره‌هاست. آیا هیچ معلم یا دانش‌آموزی پرسیده است که این روش اثبات برای وجود مثلث که در کتاب هندسهٔ (۲) آمده چه معنایی دارد؟ من خود از کارشناسان کتاب این سوال را پرسیدم. جواب این بود که چون این قضیه به همین صورت در فلان کتاب آمده است ما نیز دقیقاً به همان شکل آن را در اینجا آورده‌ایم! بعد از مطالعهٔ آن کتاب معلوم شد که بلی، این قضیه در آخر آن کتاب هندسه آمده است، اما دقیقاً مبتنی بر روش‌ها و اصول و تعاریف همان کتاب است. بنابراین اگرچه بودن آن در آن کتاب مشکلی نیست ولی طرح آن در کتاب‌های هندسهٔ ما هیچ توجیهی ندارد، زیرا هیچ وجه مشترکی با هم ندارند. توضیح این که، طبق روش‌های کتاب ما و تعاریف و قضایایی که در کتاب‌های ما پذیرفته شده است ،قضیهٔ وجود مثلث یک اثبات ساده دارد، اما اگر بخواهیم طبق روش‌های آن کتاب عمل کنیم باید با همان اثبات پرپیچ و خم قضیه را ثابت کنیم. پس بریدن

به چه دلیل در ریاضیات تعریف وجود دارد و ملاک‌های تعریف کردن یا تعریف نکردن چیست؟



یک قسمت از آن کتاب و آوردن آن در کتاب هندسهٔ دبیرستان عملی غیرمنطقی و ناشی از عدم درک تفاوت روش‌های کتاب‌های هندسه در بیان مفاهیم هندسی است.

به موضوع تعریف توان رسانی برمی‌گردیم. دیدیم که در تعریف می‌توانیم طبق دو نظر عمل کنیم. در نظر اول a را مثبت می‌گیریم و $a^{\frac{1}{n}}$ یگانه ریشهٔ n ام مثبت a است. در نظر دوم اگر n فرد باشد، a می‌تواند دلخواه باشد و یگانه ریشهٔ n ام a است و اگر n زوج باشد، a باید مثبت باشد و یگانه ریشه n ام مثبت a است. در گسترش این تعریف به تمام اعداد گویا، باز هم برای آن‌که خواص اساسی محفوظ باقی بمانند برای عدد گویا $r=\frac{m}{n}$ که m عددی صحیح و n عددی طبیعی است باید تعریف کنیم:

$$a^r=(a^{\frac{1}{n}})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

یکی از نکاتی که در تعریف بالا وجود دارد، و شاید برای اولین بار در سطح مدرسه با آن برخورد می‌کنیم، مسئله خوش تعریفی است. خوش تعریفی به معنای آن است که تعریف ما واقعاً چیزی را بدون ابهام بیان کرده باشد. مثلاً در تعریف بالا به طور ضمنی ابهامی وجود دارد. نمایش یک عدد گویا به صورت تقسیم دو عدد صحیح، یکتا نیست، و یک عدد گویای r ممکن است به صورت‌های گوناگونی به شکل تقسیم دو عدد صحیح نوشته شود؛ مثلاً $r=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$، پس طبق تعریف، می‌توانیم بنویسیم:

$$a^r=(a^{\frac{1}{n}})^m\ ,\ a^r=(a^{\frac{1}{n'}})^{m'}$$

حال، چون به دو شکل متفاوت تعریف می‌شود باید ثابت شود که این دو شیوهٔ متفاوت نتیجهٔ یکسانی دارند در غیر این صورت مقدار a^r واقعاً تعریف نشده است. این مسئله را بررسی خوش تعریفی یک تعریف می‌نامند اگر طبق نظر اول عمل نموده و a را عددی مثبت فرض کنیم، اثبات خوش تعریفی آسان است و شما می‌توانید به عنوان یک مسئله ثابت کنید که برای هر عدد مثبت a و اعداد طبیعی m', n', m, n داریم:

$$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n']{a^{m'}}$$

امـا اگر طبق نظر دوم عمل کنیم این تعریف خوش تعریف نیست. مثلاً داریم: اما $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$

$$(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1\ ,\ (-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1$$

در اینجا مشاهده می‌شود که تعریف طبق نظر اول موفقیت آمیزتر عمل می‌کند و از این تعریف خواص اساسی توان رسانی نیز همگی قابل اثبات هستند.

اما اگر اصرار داشته باشیم که همچنان طبق نظر دوم عمل کنیم باید در تعریف کمی تغییر ایجاد کنیم و از هر نمایش دلخواهی از r استفاده نکنیم. هر عدد گویای ناصفر r را می‌توان به شکل یکتایی به صورت $r=\frac{m}{n}$ نوشت که در آن m عددی صحیح و n عددی طبیعی است و m و n نسبت به هم اول‌اند. این نمایش از اعداد گویا را «نمایش تحول ناپذیر» می‌نامند. بد نیست در اینجا تعریف جدیدی را وارد کنیم و اعداد گویای ناصفر را به دسته‌های مخرج زوج و مخرج فرد و صورت زوج و صورت فرد تقسیم کنیم.

تعریف: عدد گویای ناصفر r را مخرج زوج می‌نامیم هرگاه مخرج آن در نمایش تحول ناپذیرش، زوج باشد و اگر مخرج آن در نمایش تحول ناپذیرش، فرد باشد آن را مخرج فرد می‌نامیم. به همین ترتیب اعداد گویای صورت زوج و صورت فرد را بسته به زوج یا فرد بودن صورت در نمایش تحول ناپذیر آن‌ها تعریف می‌کنیم.

مناسب است مسائل زیر را در بارهٔ این مفهوم حل نمایید.

۱- اعداد صحیح از اعداد گویای مخرج فرد هستند.

۲- عدد گویای مخرج (صورت) فرد آنی است که حداقل در یکی از نمایش‌های آن مخرج (صورت) فرد داشته باشد.

۳- عدد گویای مخرج (صورت) زوج آنی است که در تمام نمایش‌های آن مخرج (صورت) زوج باشد.

۴- ضرب و جمع دو عدد گویای مخرج فرد، عددی مخرج فرد است.

شاید شما برای اولین بار با این تعریف مواجه شده‌اید و در

هیچ کتاب دیگری این تعریف وجود نداشته باشد، اما این نکته چندان مهم نیست و هر ریاضیدانی حق دارد تعاریفی را که مناسب می‌داند ایجاد نماید، تنها شرط همان سازگاری منطقی است. البته ریاضیدان‌ها مفاهیم جدید را برای سرگرمی تعریف نمی‌کنند و هر تعریفی نوعی نامگذاری برای مفهومی است که ریاضیدان زیاد به آن برخورد کرده و لازم است دربارهٔ آن حرف بزند و از آن استفاده کند. ملاک بیان تعاریف جدید، کاربرد آن مفاهیم در بیان گزاره‌های ریاضی است. مفاهیم زیادی در ریاضی وجود دارند و نمی‌توان برای همهٔ آن‌ها لفظی را اختصاص داد و آن‌ها را تعریف کرد. مثلاً ممکن است در هندسه تعریف کنیم مثلثِ کج مثلثی است که هیچ دو ضلع آن مساوی نباشند. از لحاظ منطقی ایرادی به این تعریف نیست ولی چون این مفهوم کاربرد خاصی در بیان گزاره‌های هندسی ندارد نیازی هم به آن نداریم، پس چنین مفهومی در هندسه تعریف نمی‌شود.

اما برای تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا، اگر بخواهیم طبق نظر دوم عمل کنیم مفهوم اعداد گویای مخرج زوج و مخرج فرد زیاد استفاده می‌شود، به همین خاطر این مفاهیم را تعریف کرده‌ایم. در این‌جا مناسب است که این دو شیوه تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا را دقیقاً مشخص سازیم.

تعریف اول توان رسانی

برای هر عدد گویای $r=\frac{m}{n}$ و برای هر عدد حقیقی مثبت a تعریف می‌کنیم: $a^r=\sqrt[n]{a^m}$

تعریف دوم توان رسانی

اگر r یک عدد گویای مخرج فرد و $r=\frac{m}{n}$ نمایش تحویل ناپذیر آن باشد، برای هر عدد حقیقی ناصفر a (چه مثبت و چه منفی) تعریف می‌کنیم: $a^r=\sqrt[n]{a^m}$. اما اگر r یک عدد گویای مخرج زوج باشد فقط برای اعداد حقیقی مثبت مانند a تعریف می‌کنیم:

$a^r=\sqrt[n]{a^m}$

خوش‌تعریف بودن تعریف اول را قبلاً بررسی کرده‌ایم. اما در تعریف دوم مشکل خوش تعریفی نداریم، زیرا در آن از یک نمایش یکتایی از اعداد گویا استفاده شده است. یک مشکل تعریف دوم در آن است که حالت به حالتی شده است و برقراری خواص اساسی توان رسانی کمی محل تردید است. البته می‌توان ثابت کرد که در حالاتی که در طرفین فرمول‌های توان رسانی، تمام عوامل تعریف شده باشند، آن‌گاه درستی فرمول برای تعریف دوم نیز برقرار است.

تا این‌جا با دو نظر در تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا روبه‌رو شده‌ایم و قضاوت بین این دو نظر که کدام بهتر است شاید تا حدی سلیقه‌ای باشد، ولی ملاک‌های اصلی در مورد پذیرش یا رد یک تعریف (در صورت نداشتن اشکالات منطقی) سادگی و کاربرد آن در بیان گزاره‌های ریاضی است. تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا طبق نظر اول ساده و یک‌پارچه است و خواص اساسی توان رسانی به نحوی کلی برقرار است. ولی این تعریف طبق نظر دوم کمی پیچیدگی می‌یابد و برقراری خواص اساسی نیز با اشکالاتی مواجه می‌شود. اما می‌توان گفت تعریف دوم تعمیمی از تعریف اول است و تعریف اول را نقض نمی‌کند و علاوه بر توان رسانی‌های تعریف اول توان رسانی‌های دیگری را هم تعریف می‌کند و خواص اساسی توان رسانی را تا حد ممکن برقرار نگه می‌دارد.

همچنین برای عدد گویای مخرج فرد r می‌توان تابع $f(x)=x^r$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر گرفت. می‌دانیم این تابع با اعداد مثبت مشتق پذیر است و $f'(x)=rx^{r-1}$. می‌توان پرسید که آیا این تابع روی اعداد منفی نیز مشتق پذیر است و فرمول مشتق آن به همین شکل است؟ از آن‌جا که برای مقادیر منفی x داریم $f(x)=-|x|^r$ به کمک قضیه مشتق تابع مرکب می‌توان به این سوال جواب مثبت داد. مثلاً با تعریف دوم، دو تابع $y_1=\sqrt[3]{x^2}$, $y_2=x^{\frac{2}{3}}$ روی دامنه $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند و مساوی هستند و می‌توانیم از فرمول مشتق گیری y_2 برای محاسبه مشتق y_1 استفاده کنیم. از این بابت می‌توان گفت تعریف دوم کمک بسیاری در محاسبات می‌تواند انجام دهد. اما باید توجه داشت که

خوش تعریفی به معنای آن است که تعریف ما واقعاً چیزی را بدون ابهام بیان کرده باشد

حتی با تعریف دوم این طور نیست که همواره برای مقادیر منفی x حق داشـــته باشیم بنویسیم $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. طبق تعریف اول این تســاوی فقط برای اعداد مثبت اعتبار دارد. اما طبق تعریف دوم این تســاوی در برخی شــرایط برای اعداد منفی هم اعتبار دارد اولین شرط آن است که $\frac{m}{n}$ عدد گویای مخرج فردی باشد. دومین شــرط آن اســت که اگر m و n هر دو زوج باشند نهایتاً $\frac{m}{n}$ صورت زوج باشــد. در غیر این حالات یا طرف دوم تعریف نشــده است یا تساوی مورد نظر روی اعداد منفی برقرار نخواهد بود. برای مثال $\sqrt[۶]{x^{۱۰}} \neq x^{\frac{۱۰}{۶}}$, $\sqrt[۴]{x^۶} \neq x^{\frac{۶}{۴}}$, $\sqrt[۶]{x^۴} = x^{\frac{۴}{۶}}$.

اگر به نکات بالا دقت نشود ممکن است محاسبات خطایی را پیش آورد. برای مثال در محاسبه مشتق تابع $\sqrt[۶]{x^{۱۰}}$ ممکن اســت برخی گمان کنند تساوی $y = \sqrt[۶]{x^{۱۰}} = x^{\frac{۱۰}{۶}}$ برقرار است و از فرمــول مشــتق‌گیری اســتفاده کنند کــه نتیجه می‌دهد $y' = \frac{۵}{۳}x^{\frac{۲}{۳}}$. امــا y تابعی زوج اســت و مشــتق آن تابعی فرد خواهد بود در حالی که مشــتقی که از این طریق محاسبه شده است تابعی زوج اســت. بنابراین اگرچه تعریف دوم مزیت‌هایی دارد اما به کار بردن آن نیازمند دقت فراوان است و شرایط به کار بردن آن چندان ســاده نیست و به سادگی ممکن است کاربران را دچار اشــتباه سازد. علاوه بر این سود آن چیزی نیست که با تعریف اول از آن محروم بمانیم و در واقع حالات قابل اســتفاده در تعریف دوم به ســادگی قابل تحویل به تعریف اول اســت. به همین خاطر در اکثر کتاب‌ها و در جامعه ریاضی طبق نظر اول تعریف انجام می‌شــود. اما اگر کسانی نظر دوم را بیش‌تر دوست دارند هیچ منع منطقی برای ایشان وجود ندارد ولی همواره باید در نوشــته‌های خود خواننده را متوجه کنند که براســاس نظر دوم ســخن می‌گویند و در روابط توان رسانی باید احتیاط‌های بیش‌تری به خرج دهند تا دچار اشتباه نشوند.

۳. به توان رساندن با اعداد حقیقی

هر عدد حقیقی را به اندازه دلخواه می‌توان با یک عدد گویا تقریب زد. این به خاطر آن است که در هر بازه‌ای در اعداد حقیقی یک عدد گویا یافت می‌شود. این خود نتیجه‌ای از خاصیت ارشمیدس اعداد حقیقی است که می‌گوید از هر عدد حقیقی، یک عدد طبیعی بزرگ‌تر وجود دارد. اثبات وجود عدد گویا در هر بازهٔ اعداد حقیقی از طریق خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی تکنیک جالبی دارد که مناسب است حداقل یک بار آن را انجام دهید. امکان تقریب زدن اعداد حقیقی با اعداد گویا به معنای آن است که هر عدد حقیقی حد یک دنباله از اعداد گویا است. این نکته، کلید اصلی در تعمیم تعریف توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی است. $a^{\sqrt{2}}$ چه معنایی می‌تواند داشته باشد؟ اگر $\{r_n\}_{1\le n}$ دنباله‌ای از اعداد گویا باشد که به $\sqrt{2}$ همگراست، در حالت $a>0$ مقدارهای a^{r_n} تعریف شده‌اند و احتمالاً دنباله‌ای همگرا می‌سازند و می‌توانیم حد آن را به عنوان $a^{\sqrt{2}}$ تعریف کنیم.

تعریف: برای هر عدد حقیقی مثبت a و هر عدد حقیقی دلخواه b اگر $\{r_n\}_{1\le n}$ دنباله‌ای از اعداد گویای همگرا به b باشد، حد دنباله a^{r_n} را به عنوان a^b تعریف می‌کنیم.

تعریف بالا به نحو روشنی محتاج اثبات خوش تعریفی است زیرا از دو جهت دچار ابهام است. اولاً از کجا اطمینان داریم که دنباله a^{r_n} همگراست، ثانیاً دنباله $\{r_n\}_{1\le n}$ یکتا نیست و دنباله‌های متعددی برای همگرایی به b موجود است. از کجا معلوم با تغییر دنباله $\{r_n\}_{1\le n}$ به یک دنباله دیگر، نتیجه تغییر نکند؟ همه این‌ها محتاج اثبات است و می‌توان درستی این مطالب را ثابت کرد که نتیجه آن خوش‌تعریفی تعریف بالا است. همچنین به کمک قضایای مربوط به حد دنباله‌ها خواص اساسی توان رسانی در این حالت نیز ثابت می‌شود.

اما اگر بخواهیم طبق نظر دوم عمل کنیم و سعی کنیم توان رسانی اعداد منفی را هم تعریف کنیم به مشکلات جدی برخورد خواهیم کرد. در درجه اول باید از دنباله‌هایی از اعداد گویا استفاده کنیم که مخرج فرد باشند. آیا هر عدد حقیقی حد یک دنباله از اعداد گویای مخرج فرد می‌باشد؟ به عنوان یک مسئله می‌توانید آن را حل کنید. جواب این مسئله مثبت است و با کمی دستکاری در اثبات وجود عدد گویا در هر بازه، می‌توانید ثابت کنید در هر بازه اعداد حقیقی، عدد گویای مخرج فرد موجود است. با استفاده از این موضوع نتیجه می‌شود که هر عدد حقیقی حد یک دنباله از اعداد گویای مخرج فرد است و تا این‌جا اوضاع بر وفق مراد است.

مناسب به نظر می‌رسد که برای اعداد حقیقی منفی مانند a نیز تعریف کنیم که a^b حدّ دنباله a^{r_n} باشد، که $\{r_n\}_{1\le n}$ دنباله‌ای از اعداد گویای مخرج فرد است که به b همگراست. اگر خوش تعریفی این تعریف ثابت شود می‌توانیم توان رسانی اعداد منفی را هم تعریف شده محسوب کنیم. در اثبات همگرایی a^{r_n} مشکلی نیست و همانند تعریف قبلی ثابت خواهد شد. اما در اینجا تغییر دنبالهٔ $\{r_n\}_{1\le n}$ می‌تواند در نتیجه تأثیر بگذارد، زیرا صورت زوج بودن یا صورت فرد بودن اعضای دنباله $\{r_n\}_{1\le n}$ در علامت a^{r_n} کاملاً مؤثر است. با کمی دستکاری در تکنیک اثبات وجود اعداد گویای مخرج فرد می‌توانید ثابت کنید که در هر بازهٔ اعداد حقیقی، هم عددِ گویایِ مخرج فرد، صورت فرد و هم عددِ گویایِ مخرج فرد، صورت زوج موجود است. بنابراین برای هر عدد حقیقی b، هم دنباله‌ای از اعداد گویای مخرج فرد صورت فرد، و هم دنباله‌ای از اعداد گویای مخرج فرد صورت زوج موجود است که به b همگراست. در اولی a^{r_n} مقادیر منفی دارد و به یک عدد منفی همگراست و در دومی a^{r_n} مقادیر مثبت دارد و به یک عدد مثبت همگراست. این دو عدد قرینهٔ همدیگرند و ما نمی‌توانیم بین این دو انتخاب خاصی داشته باشیم.

مشاهده می‌شود که نظر دوم در تعریف توان رسانی قابل تعمیم به اعداد حقیقی نیست و در اعداد حقیقی چاره‌ای جز مثبت در نظر گرفتن پایه نداریم. یکی دیگر از دلایلی که در جامعهٔ ریاضی نظر دوم مقبولیت ندارد همین است که با سایر بخش‌های ریاضی هماهنگ نمی‌شود و عایدی چندانی هم در حالات خاص خود ندارد که نتوان از طریق‌های دیگر به دست آورد.

هر عدد حقیقی را به اندازه دلخواه می‌توان با یک عدد گویا تقریب زد

پی‌نوشت:

۱. آیا می‌توانید ثابت کنید که چرا ناچاریم تعریف را به همین صورت انجام دهیم؟

منابع:

۱. والتر رودین، اصول آنالیز ریاضی
۲. J.Levin, An interactive introduction to mathematical analysis, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, ۲۰۰۳
۳. C.McGrger, J.Nimmo, W.Stothers, Fundamentals of university mathematics, Albino Publishing Chichestr, ۱۹۹۴
۴. هندسه (۲) سال سوم متوسطه