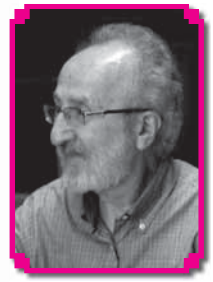
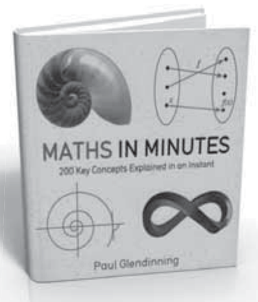
تألیف: پال گلندینینگ
مترجم: غلامرضا یاسی‌پور





نظریهٔ احتمال

«احتمال» (probability) شاخه‌ای از ریاضیات است که با اندازه‌گیری و پیش‌بینی احتمال پیشامدهای معینی سروکار دارد. این نظریه که یکی از کاربردهای «نظریهٔ مجموعه‌ها»ست، به‌طور کامل نظریه‌ای تازه محسوب می‌شود.

یکی از راه‌های نگریستن به احتمالات بررسی حوزه‌ای از نتایج ممکن، به‌صورت اعضایی از یک مجموعه است. برای مثال، وضعیت سه بار انداختن سکهٔ یکنواختی را در نظر می‌گیریم. در این صورت، مجموعهٔ جمیع پیشامدهای ممکن را می‌توان با اعضای شامل سه حرف، هر یک به ازای یک‌بار انداختن سکه، H به جای رو، و T به جای پشت، نمایش داد. واضح است که این مجموعه دارای هشت عضو است:

{TTT,TTH,THT,THH,HTT,HTH,HHT,HHH}

از آنجا که یکی از این پیشامدها باید روی دهد، مجموع جمیع این احتمال‌ها باید ۱ باشد، و در صورتی‌که سکه یکنواخت باشد، و هر پیشامد به احتمال برابر باشد، احتمال هر حالت $\frac{۱}{۸}$ است.

مسائل پیچیده‌تر احتمالات را می‌توان با بررسی پیشامدهای مشخصی به‌صورت مجموعه‌هایی پاسخ داد که زیرمجموعه‌های مجموعهٔ پیشین، شامل جمیع پیشامدهای ممکن هستند.

برای مثال، می‌توان بلافاصله ملاحظه کرد که مجموعهٔ پیشامدهایی با دقیقاً دو رو شامل سه عضو و بنابراین دارای احتمال $\frac{۳}{۸}$ است.

اما در مورد اینکه احتمال رو آمدن یک‌بار انداختن سکه، با در دست داشتن اینکه دست‌کم یک مورد پشت باشد، چه می‌توان گفت؟

اگر بدانیم که دست‌کم یکی پشت است، می‌توانیم مجموعهٔ پیشامدها را به‌صورت زیر محدود کنیم:

{TTT,TTH,THT,THH,HTT,HTH,HHT}

دو عضو این مجموعه از هفت عضو در کل، دقیقاً یک رو دارد. بنابراین احتمال مطلوب $\frac{۲}{۷}$ است.

استدلال‌های مشابه اما عمومی‌تر، به ریاضی‌دانان امکان داده است که مجموعهٔ اصول موضوعهٔ احتمال را توسعه دهند؛ مجموعه‌ای که با عنوان احتمال مجموعه‌ها و کاربردها، برای مجموعه‌ها تعریف شده است.

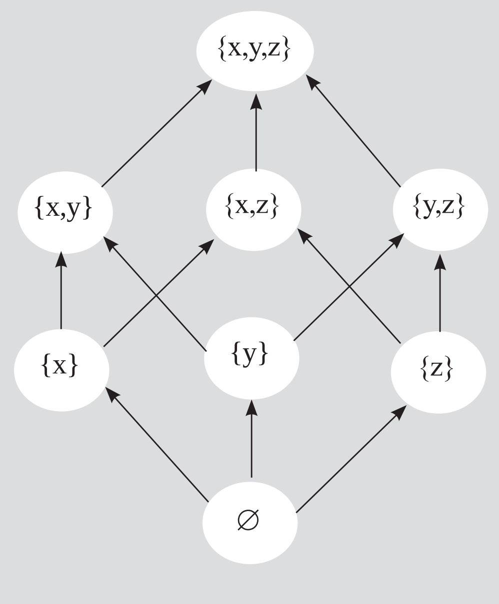
مجموعه‌های توانی

«مجموعهٔ توانی» یک مجموعهٔ مفروض S، مجموعهٔ جمیع زیرمجموعه‌های S، از جمله خود S و مجموعهٔ تهی است. بنابراین اگر $S=\{۰,۱\}$ ، آن‌گاه مجموعهٔ توانی آن‌که با P(S) نمایش داده می‌شود، عبارت است از:

$\{\varnothing,\{۰\},\{۱\},\{۰,۱\}\}$

ژرژ کانتور، ریاضی‌دان آلمانی، با استدلالی به طریقی مشابه پارادوکس سلمانی پیشین اما با قدمت بیشتر، از مجموعهٔ توانی استفاده کرد تا نشان دهد بی‌نهایت ردهٔ بزرگ‌تر و بزرگ‌تر متفاوتی از نامتناهی وجود دارند.

استدلالات قطری کانتور پیش از این نشان داده بود که دست‌کم دو نوع مجموعهٔ نامتناهی موجودند: مجموعه‌های شمارا، یا فهرست شده، و مجموعه‌های ناشمارا، از قبیل «پیوستار» (continuum)؛ یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی. در این مورد کانتور نشان داد که اگر S یک مجموعهٔ نامتناهی باشد، آن‌گاه مجموعهٔ توانی آن همواره بزرگ‌تر از S است. به این مفهوم که طریقی وجود ندارد که اعضای S را به اعضای P(S) چنان نگاشت دهیم که هر عضو واقع در یک مجموعه به یک و تنها یک عضو مجموعهٔ دیگر وابسته باشد. به عبارت دیگر، «اصلیت» (cardinality) P(S) همواره بزرگ‌تر از اصلیت خود S است.



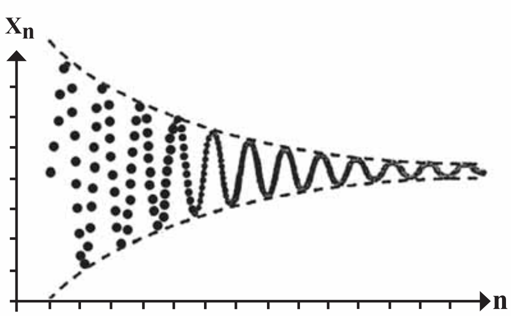
نمودار فوق سلسلهٔ مراتب زیرمجموعه‌های مجموعهٔ توانی مجموعهٔ {x,y,z} را نشان می‌دهد. پیکان‌ها مواردی را نشان می‌دهند که زیرمجموعه‌های P(x,y,z) زیرمجموعه‌های، زیرمجموعه‌های دیگر نیز هستند.

معرفی دنباله‌ها

دنباله‌های ریاضی فهرست‌های مرتبی از اعدادند. دنباله‌ها نیز مانند مجموعه‌ها می‌توانند هیچ‌گاه پایان نداشته و نامتناهی باشند. اما برخلاف مجموعه‌ها، عضوها یا جمله‌های یک دنباله دارای ترتیبی معین‌اند، و جمله‌هایی یکسان ممکن است در نقاط متفاوت فهرست مورد بحث رخ دهند.

مشهورترین دنباله‌ها فهرست «اعداد طبیعی» از قبیل ۱، ۲، ۳، ... است. جمله‌های این دنباله به‌طور یکنواخت قرار گرفته و به سمت بی‌نهایت ادامه یافته‌اند. نوع دیگر، «دنبالهٔ فیبوناتچی» است که در آن فاصلهٔ بین جمله‌ها بیشتر رشد می‌کند. هر دوی این دنباله‌ها واگرا هستند. دنباله‌های دیگر هم‌گرا هستند؛ یعنی هنگام نزدیک شدن به حد جمله‌های بی‌نهایت، به مقدار معینی منتهی می‌شوند.

جمله‌های نمایش‌دهندهٔ فروپاشی رادیواکتیو که در آن مقدار باقی‌ماندهٔ ایزوتوپ رادیواکتیو در بازهٔ معینی، موسوم به «نیمه عمر»، نصف می‌شود، هنگامی که دنباله پیشرفت می‌کند، به صفر نزدیک‌تر می‌شود. دنبالهٔ هم‌گرای مورد بحث را می‌توان چنان که در شکل نشان داده شده، با «خم فروپاشی نمایی» توضیح داد.



مثال‌های دنبالهٔ همگرا (بالا) و دنبالهٔ فروپاشی نمایی، از قبیل دنبالهٔ معمولی نیمه‌عمر رادیواکتیو (پایین).