

مربع های جادویی

اشاره

در این مقاله که حاصل تجربیات شخصی بنده در دوران تدریس درس ریاضیات گسسته است، بنابر علاقه شخصی به این درس و اینکه مطرح کردن سؤالات هوش همیشه برایم خوشایند بوده است، بر آن شدم که طرز ساخت مربع های جادویی (وفقی) را بیان کنم تا خوانندگان به راحتی بتوانند ماتریسی n در n بسازند که حاصل جمع درایه های هر سطر، هر ستون و حاصل جمع درایه های قطر اصلی و حاصل جمع درایه های قطر فرعی آن عدد ثابتی شود و بسته به انتخاب عدد n ، این عدد ثابت تغییر کند. سپس از روی این مربع های وفقی برچسب گذاری جادویی را برای گراف ها مطرح کرده ام.

کلیدواژه ها: مربع های وفقی، برچسب گذاری جادویی، گراف.

تعریف ۱

یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز (مانند $n^2, \dots, 3, 2, 1$) را یک مربع وفقی می نامند، هرگاه حاصل جمع درایه های هر سطر، هر ستون، قطر اصلی و قطر فرعی آن عدد ثابتی شود و با هم برابر باشند. بسته به انتخاب عدد n ، این عدد ثابت تغییر می کند. برای مثال یک مربع وفقی 3×3 در شکل ۱ نشان داده شده که عدد ثابت آن ۱۵ است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

شکل ۱. مربع جادویی 3×3

ثابت می شود که در هر مربع وفقی 3×3 که از اعداد ۱، ۲، ...، ۹ تشکیل شده باشد، عضوی که در مرکز مربع قرار می گیرد، همیشه عدد ۵ است (به راحتی تحقیق می شود).

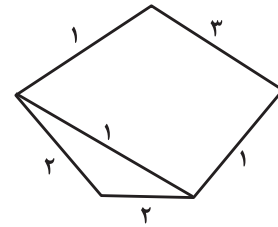
تعریف ۲

گراف G داده شده است. یک برچسب گذاری گراف G عبارت است از متناظر کردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال های G به طوری که حاصل جمع اعداد متناظر با یال های مرور کننده بر هر رأس، عددی ثابت باشد.

مقدمه

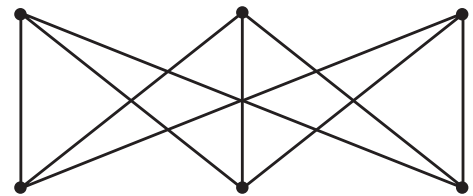
یادم هست، از بچگی که همیشه بزرگ ترها سؤالات هوش یا فکری برایم مطرح می کردند (که یکی از آنها همین داستان است که مربعی بسازید که چنین خاصیتی داشته باشد و نظایر آن)، این سؤال برایم پیش آمده بود که: آیا برای این سؤالات می توان ایده ای کلی یافت؟ این مطالب حین تدریس ریاضیات گسسته (قسمت ترکیبیات) هنگام رسیدن به قسمت برچسب گذاری جادویی برای گراف ها و اینکه گرافی را تحت شرایط خاصی برچسب زد، دوباره برایم تداعی شد. معرفی مربع های وفقی شور و شوقی عجیب در دانش آموزان به وجود می آورد. حتی یادش بخیر، دانش آموزی داشتم که خیلی به «سودوکو» علاقه مند بود و می گفت با این ایده از این پس می توانم جدول های سودوکو را حل کنم. من هم ضمن تشویق ایشان برای انجام این خلاقیت، پیشنهاد دادم نتیجه را حتماً به شکل یک کنفرانس، سرکلاس درس به بچه ها هم ارائه دهد و ...

مثال: گراف شکل ۲ برچسب گذاری شده است (با عدد ثابت ۴).



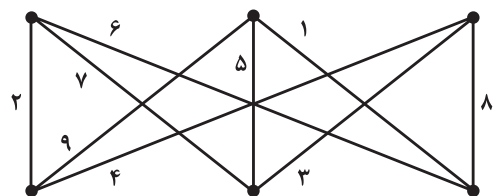
شکل ۲. برچسب گذاری جادویی گراف

حال فرض کنید که می خواهیم گراف دو پارچه شکل ۳ را برچسب گذاری کنیم.



شکل ۳

آیا با دیدن اینکه درجه همه رئوس گراف مساوی ۳ است و ما می خواهیم متناظر با هر رأس، سه عدد روی سه یال گذرنده از آن قرار دهیم که مجموع آن ها مقداری ثابت شود، به یاد مربع وقفی ۳×۳ نمی افتیم؟ با توجه به تعداد یال های این گراف (۹ یال) و مجموع سطرها و ستون ها و قطرهای مربع وقفی، برچسب گذاری به راحتی مقدور می شود که آن را در شکل ۴ مشاهده می کنیم.



شکل ۴. برچسب گذاری جادویی گراف با مربع جادویی

پرسیده شد که آیا غیر از مربع های جادویی ۳×۳ می توان مربع های وقفی n×n را نیز ساخت؟ مجموع آن ها را چگونه محاسبه می کنند؟ این سؤال باعث شد تا با تحقیق، مراحل زیر را برای پاسخ سؤال طی کنیم:

سؤال اول: مجموع اعداد در مربع وقفی چگونه به دست می آید؟

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

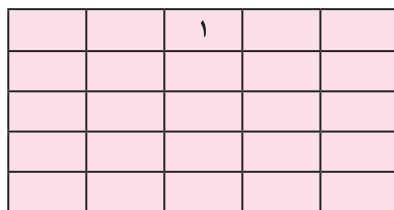
$$\Rightarrow A = \frac{S}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

که A عدد ثابت مربع وقفی است.

سؤال دوم: با ارائه یک مثال، یک مربع وقفی n×n که n فرد باشد، طراحی کنید.

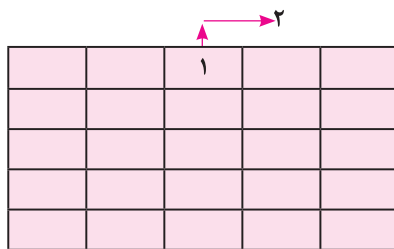
روش حل:

۱. عدد ۱ را در وسط سطر اول قرار می دهیم.



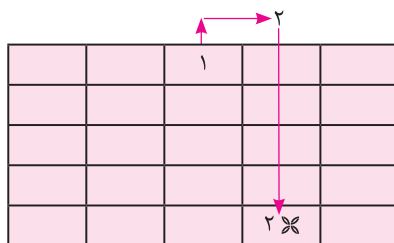
شکل ۵

۲. به کمک جهت یاب یک حرکت به بالا و یک حرکت به راست انجام می دهیم و عدد بعدی یعنی ۲ را قرار می دهیم.



شکل ۶

۳. چون خانه ای نیست به آخرین خانه زیر خودش در ستون موردنظر (↘) می رویم و ۲ را آنجا قرار می دهیم.



شکل ۷

سؤال سوم: با ارائه مثالی، کلیت حکم بالا را برای حالتی

که در مربع وقتی $n \times n$ ، n مضربی از ۴ باشد، انجام دهید.

حل: ابتدا مربع های 4×4 را جدا و قطر آن را مانند

شکل ۱۲ رسم می کنیم. با شروع از بالاترین گوشه

سمت چپ، در امتداد سطرها از چپ به راست به ترتیب

۱، ۲، ۳ و... بشمارید (اعداد با رنگ سیاه) و اعداد را

در خانه هایی بگذارید که توسط قطری قطع نشده اند.

یعنی عدد ۱ را که باید در خانه سطر اول ستون اول

باشد، چون این خانه توسط قطر قطع شده است، قرار

نمی دهیم و به سراغ عدد بعدی، یعنی ۲ می رویم. چون

خانه عدد ۲ توسط قطر رسم شده قطع نشده است، آن

را در این جایگاه قرار می دهیم و به همین ترتیب تا انتها.

حال برعکس عمل کنید. با شروع از گوشه تحتانی سمت

راست، در امتداد سطرها از راست به چپ به ترتیب ۱، ۲، ۳ و...

بشمارید و اعداد را فقط در خانه هایی درج کنید که به وسیله

قطری قطع شده باشد. یعنی ۱ را باید در سطر چهارم

ستون چهارم بگذارید، چون توسط قطر قطع شده است. عدد

بعدی یعنی ۲، در سطر چهارم ستون سوم قرار نمی گیرد

و به همین ترتیب ادامه می دهیم تا همه خانه ها پر شوند.

۱۶	۲	۳	۱۳
۵	۱۱	۱۰	۸
۹	۷	۶	۱۲
۴	۱۴	۱۵	۱

شکل ۱۲. طرز ساخت مربع وقتی مرتبه ۴

مسئله آخر: یک مربع جادویی 8×8 را بسازید.

۶۴	۲	۳	۶۱	۶۰	۶	۷	۵۷
۹	۵۵	۵۴	۱۲	۱۳	۵۱	۵۰	۱۶
۱۷	۴۷	۴۶	۲۰	۲۱	۴۳	۴۲	۲۴
۴۰	۲۶	۲۷	۳۷	۳۶	۳۰	۳۱	۳۳
۳۲	۳۴	۳۵	۲۹	۲۸	۳۸	۳۹	۲۵
۴۱	۲۳	۲۲	۴۴	۴۵	۱۹	۱۸	۴۸
۴۹	۱۵	۱۴	۵۲	۵۳	۱۱	۱۰	۵۶
۸	۵۸	۵۹	۵	۴	۶۲	۶۳	۱

شکل ۱۳. طرز ساخت مربع وقتی مرتبه ۸

تمرین: یک مربع جادویی 12×12 بسازید.

۴. به همین ترتیب اگر خانه ای وجود داشت عدد بعدی

یعنی ۳ را می گذاریم.

		۱		
			۳	
			۲	

شکل ۸

۵. به همین ترتیب به عدد بعدی، یعنی ۴ می رسیم. اما

چون خانه ای نیست، به آخرین خانه پشت سر خودش

در همان سطر (۴) می رویم و ۴ را آنجا قرار می دهیم.

		۱		
	۵			
۴				
				۴
				۳
			۲	

شکل ۹

۶. اگر خانه پر شده بود، به خانه زیر همان خانه ای که

حرکت را انجام داده ایم می رویم و (۶) عدد ۶ را

قرار می دهیم.

		۱		
	۵			
۴		۶		
				۴
				۳
			۲	

شکل ۱۰

۷. یک استثنا هم داریم که با علامت (*) نشان داده است.

اگر به آنجا وارد شدیم، مانند بند ۶ عمل می کنیم.

۱۷	۲۴	۱	۸	۱۵
۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶
۴	۶	۱۳	۲۰	۲۲
۱۰	۱۲	۱۹	۲۱	۳
۱۱	۱۸	۲۵	۲	۹

شکل ۱۱



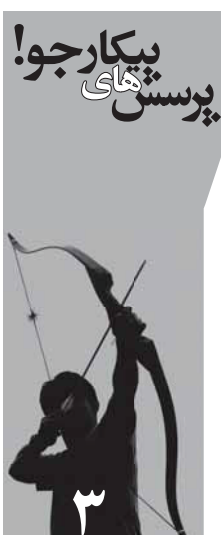
ایستگاه اول

				۱۸
				۱۸
				۱۸
				۲۱
۲۱	۱۶	۱۶	۲۲	

	=
	=
	=
	=
	< ۶

در اینجا دو بازی ساده برایتان داریم:

بازی اول: با توجه به اطلاعات داده شده، به جای هر شکل هندسی، یک عدد مناسب قرار دهید، به طوری که مجموع عددهای هر سطر و هر ستون مساوی عددهای داده شده در جدول باشد.



اگر عددهای صحیح x و y در رابطه $4x + 5y = 7$ صدق کنند، مینی مم $|x| - 3|y|$ کدام است؟

- الف) صفر
ب) -۱
ج) ۱
د) ۴
ه) ۱۲

بازی دوم: در هر سطر جدول، یک عدد غیرعادی وجود دارد. الگوی موجود را کشف کنید و عدد غیرعادی را علامت بزنید.

۲۵	۱۶	۴۹	۶۳	۸۱
۳۹	۹۱	۶۵	۶۲	۵۲
۱۹	۲۳	۲۹	۳۳	۴۳