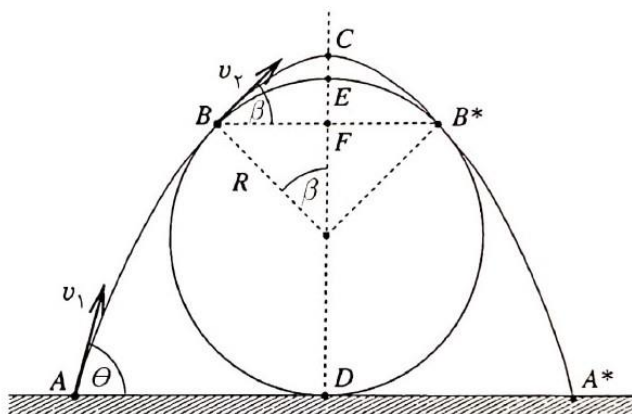


مسیر ملخ یک سهمی است، که با تنه درخت در دو نقطه متقارن B و B^* ، در دو طرف آن تماس می‌یابد (در حال حاضر چیزی از این نقاط نمی‌دانیم — آنها شاید بر بالاترین نقطه تنه E منطبق شوند یا نشوند). ملخ با سرعت اولیه v_1 و زاویه θ نسبت به افق، مطابق شکل، از نقطه A می‌جهد. در نقطه تماسی B و B^* ، سرعت ملخ v_2 است و با افق زاویه β تشکیل می‌دهد.



برای سادگی β را متغیر مستقل مسئله در نظر می‌گیریم. مؤلفه قائم سرعت در نقطه B برابر است با

$$v_2 \sin \beta = gt_2$$

t_2 زمان پرواز برای کمان BC از مسیر است (C اوج سهمی است). جابه‌جایی افقی متناظر BF برابر است با

$$v_2 t_2 \cos \beta = R \sin \beta$$

اگر این معادلات را در هم ضرب کنیم داریم

$$v_2^2 = \frac{gR}{\cos \beta}$$

بنا به پایستگی انرژی بین نقاط A و B مسیر

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(R + R \cos \beta)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} v_1^2 &= v_2^2 + 2gR(1 + \cos \beta) \\ &= \frac{gR}{\cos \beta} + 2gR(1 + \cos \beta) \\ &= 2gR \left(1 + \cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \right) \end{aligned}$$

ما می‌توانیم مقدار کمینه v_1 را با استفاده از حساب دیفرانسیل محاسبه کنیم. با این حال، روش ساده‌تری مبتنی بر نابرابری بین میانگین‌های حسابی و هندسی وجود دارد:

$$\frac{1}{2} \left(\cos \beta + \frac{1}{2 \cos \beta} \right) \geq \sqrt{\cos \beta \frac{1}{2 \cos \beta}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بنابراین مقدار کمینه $\frac{\cos \beta + 1}{2 \cos \beta}$ برابر $\sqrt{2}$ و در نتیجه $\beta = 45^\circ$ است. مورد $\beta = 0$ به سرعت اولیه بزرگ‌تری نیاز دارد، زیرا $\sqrt{2} > 1/2$ ؛ بنابراین مسیری که کمترین سرعت اولیه را دارد در واقع با تنه درخت در بالاترین نقطه‌اش تماس نمی‌یابد. انرژی پتانسیل گرانشی ملخ در نوک سهمی بزرگ‌تر از بالاترین نقطه تنه درخت است، اما انرژی جنبشی و کل انرژی‌اش نسبت به مسیر بالاترین تماس کوچک‌تر است. مقدار عددی سرعت اولیه کمینه برابر است با

$$v_1^{\min} = \sqrt{2gR(1 + \sqrt{2})} \approx 2.2 \text{ m/s}$$

یادداشت. (الف) نشان دادن اینکه بخشی از مسیر سهمی که بالای B قرار دارد با تنه درخت تلاقی نمی‌کند چندان دشوار نیست.

(ب) ما می‌توانیم زاویه جهش را نیز به صورت $\theta = \frac{3\pi}{8} = 67.5^\circ$ حساب کنیم و فاصله جهش برابر است با

$$AD = R \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 17 \text{ cm}$$

(ج) یادآوری این نکته جالب است که نقطه F کانون سهمی است.