



حداکثر و حداقل عبارت $3\sin x + 2\cos x$ را بیابید.

پاسخ:

راه حل اول: از $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ فاکتور میگیریم:

$$3 \sin x + 2 \cos x = \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin x + \frac{3}{\sqrt{13}} \cos x \right)$$

با توجه به اینکه $\frac{2}{\sqrt{13}}$ کوچکتر از یک می باشد، حتماً یه زاویه مانند a وجود دارد که $\sin a = \frac{2}{\sqrt{13}}$ حال اگر $\cos a$ را محاسبه کنیم $\frac{3}{\sqrt{13}}$ می شود. بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \sqrt{13} \left(\frac{2}{\sqrt{13}} \sin x + \frac{3}{\sqrt{13}} \cos x \right) &= \sqrt{13} (\cos a \sin x + \sin a \cos x) \\ &= \sqrt{13} \sin(a + x) \end{aligned}$$

بنابراین، حداقل و حداکثر به ترتیب برابر $-\sqrt{13}$ و $+\sqrt{13}$ می باشد.

راه حل دوم:

عبارت را به صورت $3 \sin x + 2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$ بازنویسی می کنیم.

حال دو بردار زیر را در نظر بگیرید:

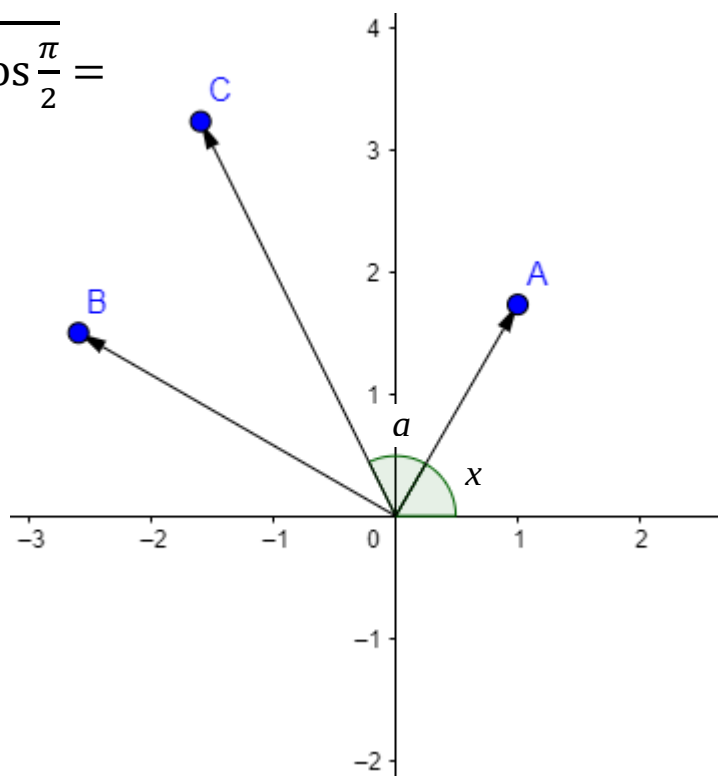
۱- بردار A با اندازه ۳ و زاویه x نسبت به صفر

۲- بردار B با اندازه ۲ و زاویه $x + \frac{\pi}{2}$ نسبت به صفر

$$\vec{C} = |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{13}$$

مجموع دو بردار A و B برداریست به اندازه

$\sqrt{13}$ و زاویه $a+x$ نسبت به مبدأ.



عبارت مورد نظر سوال، حاصل تصاویر این دو بردار بر محور سینوس ها می باشد و از آنجایی که

حاصل جمع تصویر دو بردار روی محور سینوس ها برابر تصویر جمع دو روی آن محور می باشد،

می توان نوشت:

$$3 \sin x + 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{13} \sin(a + x)$$

$$-\sqrt{13} \leq \sqrt{13} \sin(a + x) \leq \sqrt{13}$$

$$-\sqrt{13} \leq 3 \sin x + 2 \cos x \leq \sqrt{13}$$