

بررسی

پایه دهم

؟

به چند طریق میتوان جدول زیر را با رنگ های قرمز، آبی، بنفش، زرد، سبز رنگ نمود به طوری که رنگ هیچ خانه‌ای با نوشته آن تطبیق نداشته باشد:

قرمز	آبی	بنفش	زرد	سبز
------	-----	------	-----	-----

(از هر رنگ دقیقاً در یک خانه میتوان استفاده نمود)

پاسخ:

راه حل اول: اصل شمول و عدم شمول و اصل متمم

مجموعه های زیر را در نظر بگیرید:

$R = \{\text{حالاتی که خانه با نوشته قرمز با قرمز رنگ می‌گردد}\}$

$B = \{\text{حالاتی که خانه با نوشته آبی با آبی رنگ می‌گردد}\}$

$P = \{\text{حالاتی که خانه با نوشته بنفش با بنفش رنگ می‌گردد}\}$

$Y = \{\text{حالاتی که خانه با نوشته زرد با زرد رنگ می‌گردد}\}$

$G = \{\text{حالاتی که خانه با نوشته سبز با سبز رنگ می‌گردد}\}$

حالت مطلوب سوال را با مجموعه زیر مدل سازی میکنیم:

$$R' \cap B' \cap P' \cap Y' \cap G' = (R \cup B \cup P \cup Y \cup G)'$$

بنابر این تعداد حالات مطلوب برابر است با:

حداقل یکی از رنگ‌ها درست قرار میگیرد - کل حالات $|M| - |R \cup B \cup P \cup Y \cup G| =$

$$5! - \left(\binom{5}{1} \times 4! - \binom{5}{2} \times 3! + \binom{5}{3} \times 2! - \binom{5}{4} \times 1! + \binom{5}{5} \times 0! \right) =$$

$$120 - (5 \times 24 - 10 \times 6 + 10 \times 2 - 5 \times 1 + 1 \times 1) =$$

$$120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 = 44 \text{ حالت}$$

راه حل دوم: جایگشت پریش (پستچی گنج یا پستچی دیوانه)

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n, d_1 = 0$$

$$d_1 = 0$$

$$d_2 = 2 \times d_{2-1} + (-1)^2 = 1$$

$$d_3 = 3 \times d_{3-1} + (-1)^3 = 2$$

$$d_4 = 4 \times d_{4-1} + (-1)^4 = 9$$

$$d_5 = 5 \times d_{5-1} + (-1)^5 = 44$$