

حد زیر را محاسبه نمایید؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[4]{1+4x}}{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[6]{1+6x}}$$

پاسخ: استفاده از تعمیم اتحاد چاق و لاغر

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x+x^2} - \sqrt[4]{1+4x+x^2}}{\sqrt[5]{1+5x} - \sqrt[6]{1+6x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+3x})^{12} - (\sqrt[4]{1+4x})^{12}}{(\sqrt[5]{1+5x})^{30} - (\sqrt[6]{1+6x})^{30}} \times \frac{30}{12} = \\ \frac{30}{12} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^4 - (1+4x)^3}{(1+5x)^6 - (1+6x)^5} &= \frac{30}{12} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 12x + \binom{4}{2}(3x)^2 - (1 + 12x + \binom{3}{2}(4x)^2)}{1 + 30x + \binom{6}{2}(5x)^2 - (1 + 30x + \binom{5}{2}(6x)^2)} \end{aligned}$$

از جملات با درجه ۳ به بالا صرف نظر شد (چون ایکس به سمت صفر میل میکند)

$$\begin{aligned} &= \frac{30}{12} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\binom{4}{2}(3x)^2 - \binom{3}{2}(4x)^2}{\binom{6}{2}(5x)^2 - \binom{5}{2}(6x)^2} = \frac{30}{12} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{54x^2 - 48x^2}{375x^2 - 360x^2} = \frac{30}{12} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2}{15x^2} = \frac{30}{12} \times \frac{6}{15} \\ &= 1 \end{aligned}$$