

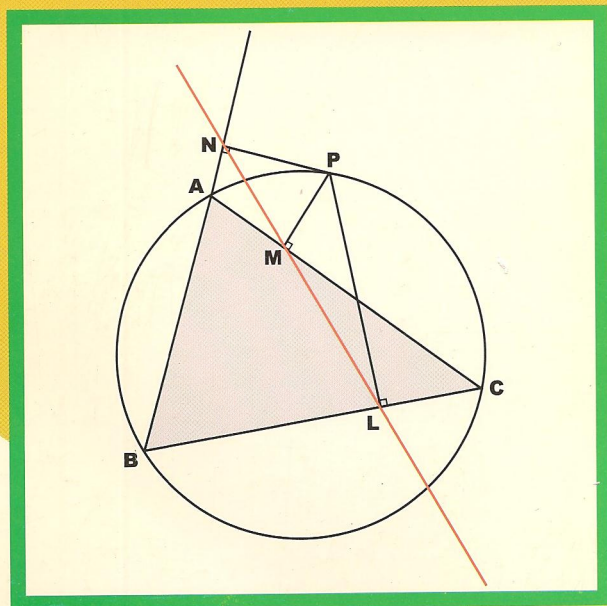


دایره المعارف هندسه

۲

ویژگیهای توصیفی دایره در
هندسهٔ مسطحه

(ربع دایره و نیمدایره، دایره، دایره و مثلث، دایره و مثلثهای ویژه، ...)



مؤلف: محمد هاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸-

دایرةالمعارف مسائل هندسه / تألیف محمدهاشم رستمی. - تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۴.

ج.: مصور، نمودار.

(ج. ۱).

ISBN 964-436-737-5 (ج. ۲)

ISBN 964-436-567-4 (ج. ۳)

ISBN 964-436-560-7 (ج. ۴)

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا.

از جلد دوم به بعد عنوان کتاب به «دایرةالمعارف هندسه» تغییر یافته است.
کتابنامه.

مندرجات: ج. ۱. خواص توصیفی اشکال هندسه (نقطه، خط، زاویه، مثلث، چهارضلعی و دایره. --) ج. ۲. ویژگیهای توصیفی دایره در هندسه مسطحه. -- ج. ۳. رابطه‌های متریک مربوط به نسبت پاره‌خطها در هندسه مسطحه. -- ج. ۴. رابطه‌های متریک در دایره. --
ج. ۲ (چاپ اول: ۱۳۷۸).

۱. هندسه -- مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف هندسه.

۵۱۶/۰۰۷۶

QA۵۰۱/۵/۲۵۵۲

۱۳۷۸

*۷۴-۱۴۰۰

کتابخانه ملی ایران

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک‌آموزشی
انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه
(جلد دوم)

ویژگیهای توصیفی دایره در هندسه مسطحه

مؤلف: محمدهاشم رستمی

طرح جلد: گشتاسب فروزان

چاپ اول: زمستان ۱۳۷۸

تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

حق چاپ محفوظ است

تهران، خیابان سپهبد قمری، پل کریمخان زند

کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶

تلفن: ۸۸۰۰۳۲۴-۹

دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹

لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

شابک ۹۶۴-۴۳۶-۷۳۷-۵

ISBN-964-436-737-5

فهرست

صفحه		موضوع
۱۵-۱۸		پیشگفتار
حل	صورت	
۲۵۷-۲۶۹	۲۱-۳۵	بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره
۲۵۷	۲۲	۱.۱. تعریف و قضیه
۲۶۵	۳۱	۲.۱. شعاع
۲۶۵	۳۱	۳.۱. نقطه و نیمدایره
۲۶۵	۳۱	۴.۱. کمان
۲۶۶	۳۱	۵.۱. وتر
۲۶۶	۳۲	۶.۱. قطر
۲۶۶	۳۲	۷.۱. زاویه
۲۶۷	۳۳	۸.۱. پاره خط
۲۶۸	۳۳	۹.۱. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...
۲۶۸	۳۳	۱.۹.۱. خطها موازی اند
۲۶۸	۳۴	۲.۹.۱. خطها بر هم عمودند
۲۶۸	۳۴	۱۰.۱. شکلهای ایجاد شده
۲۶۹	۳۴	۱۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش
۲۶۹	۳۵	۱۲.۱. مسأله‌های ترکیبی
۲۷۰-۳۰۹	۳۶-۸۴	بخش ۲. یک دایره
۲۷۰	۳۹	۱.۲. تعریف و قضیه
۲۷۲	۴۰	۲.۲. شعاع
۲۷۲	۴۰	۳.۲. نقطه و دایره
۲۷۲	۴۰	۱.۳.۲. نقطه درون دایره
۲۷۴	۴۱	۲.۳.۲. نقطه روی دایره
۲۷۶	۴۲	۳.۳.۲. نقطه برون دایره
۲۷۷	۴۳	۴.۳.۲. نقطه‌های همخط
۲۷۷	۴۴	۵.۳.۲. تعداد دایره‌های گذرنده بر نقطه‌ها
۲۷۸	۴۴	۴.۲. کمان
۲۷۸	۴۴	۱.۴.۲. اندازه کمان
۲۷۹	۴۶	۲.۴.۲. رابطه بین کمانها
۲۷۹	۴۷	۳.۴.۲. تعداد کمانها
۲۷۹	۴۷	۵.۲. وتر
۲۷۹	۴۷	۱.۵.۲. اندازه وتر
۲۸۰	۴۸	۲.۵.۲. برابری وترها
۲۸۰	۴۸	۳.۵.۲. برابری قطعه‌های وترها
۲۸۲	۵۰	۴.۵.۲. نابرابری وترها
۲۸۲	۵۰	۵.۵.۲. ثابت کنید وترها بر هم عمودند
۲۸۳	۵۱	۶.۵.۲. تعداد وترها
۲۸۳	۵۱	۷.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۲۸۴	۵۲	۶.۲. قطر
۲۸۵	۵۳	۷.۲. زاویه
۲۸۵	۵۳	۱.۷.۲. زاویه مرکزی
۲۸۶	۵۴	۲.۷.۲. زاویه محاطی
۲۸۸	۵۶	۳.۷.۲. زاویه ظلّی
۲۸۸	۵۷	۴.۷.۲. زاویه درونی (زاویه بین دو وتر)
۲۸۹	۵۷	۵.۷.۲. زاویه برونی (زاویه بین امتداد دو وتر، دو مماس یا یک وتر و یک مماس)
۲۸۹	۵۸	۶.۷.۲. زاویه‌های مختلف
۲۹۰	۶۱	۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها
۲۹۰	۶۱	۱.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها (برابر بها)
۲۹۲	۶۴	۲.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها (نابر برابر بها)
۲۹۲	۶۴	۸.۷.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲۹۳	۶۵	۸.۲. پاره خط
۲۹۳	۶۵	۱.۸.۲. اندازه پاره خط
۲۹۳	۶۶	۲.۸.۲. رابطه بین پاره خطها
۲۹۳	۶۶	۱.۲.۸.۲. رابطه بین پاره خطها (برابر بها)
۲۹۷	۷۰	۲.۲.۸.۲. رابطه بین پاره خطها (نابر برابر بها)
۲۹۸	۷۱	۳.۸.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲۹۹	۷۱	۹.۲. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...
۲۹۹	۷۱	۱.۹.۲. خطها موازی‌اند
۲۹۹	۷۲	۲.۹.۲. خطها بر هم عمودند
۳۰۰	۷۴	۳.۹.۲. خط نیمساز است
۳۰۰	۷۵	۴.۹.۲. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۳۰۱	۷۶	۵.۹.۲. خطها هم‌رند
۳۰۱	۷۶	۶.۹.۲. وضع نسبی خط و دایره
۳۰۱	۷۶	۱.۶.۹.۲. خط مماس بر دایره است
۳۰۳	۷۷	۲.۶.۹.۲. خط متقاطع با دایره است
۳۰۳	۷۷	۱۰.۲. شکل‌های ایجاد شده
۳۰۳	۷۷	۱.۱۰.۲. شکل‌های ایجاد شده (مثلث)
۳۰۴	۷۹	۲.۱۰.۲. شکل‌های ایجاد شده (چندضلعیها $n \geq 4$)
۳۰۴	۷۹	۱۱.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش
۳۰۸	۸۲	۱۲.۲. مسأله‌های ترکیبی
۳۱۰-۳۳۳	۸۵-۱۱۶	بخش ۳. دو دایره
۳۱۰	۸۸	۱.۳. دو دایره در حالت کلی
-	۸۸	۱.۱.۳. تعریف و قضیه
۳۱۰	۹۰	۲.۱.۳. وضع نسبی دو دایره
۳۱۰	۹۱	۳.۱.۳. نقطه و دایره
۳۱۱	۹۱	۴.۱.۳. زاویه
۳۱۱	۹۲	۵.۱.۳. پاره خط

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۱۱	۹۲	۱.۵.۱.۳. اندازه پاره خط
۳۱۲	۹۲	۲.۵.۱.۳. رابطه بین پاره خطها
۳۱۲	۹۲	۶.۱.۳. مماس مشترک دو دایره
۳۱۳	۹۳	۲.۳. دو دایره برون هم (متخارج)
-	۹۳	۱.۲.۳. تعریف و قضیه
۳۱۳	۹۳	۲.۲.۳. شعاع
۳۱۳	۹۳	۳.۲.۳. نقطه و دایره
۳۱۴	۹۳	۴.۲.۳. وتر
۳۱۴	۹۴	۵.۲.۳. پاره خط
۳۱۴	۹۴	۱.۵.۲.۳. رابطه بین پاره خطها
۳۱۴	۹۴	۶.۲.۳. خطهای موازی، عمود بر هم، ...
۳۱۴	۹۴	۱.۶.۲.۳. خطها بر هم عمودند
۳۱۵	۹۴	۷.۲.۳. مماس مشترک دو دایره
۳۱۵	۹۵	۳.۳. دو دایره مماس برون
-	۹۵	۱.۳.۳. تعریف و قضیه
۳۱۵	۹۵	۲.۳.۳. شعاع
۳۱۵	۹۵	۳.۳.۳. نقطه و دایره
۳۱۶	۹۶	۴.۳.۳. کمان
۳۱۶	۹۶	۵.۳.۳. وتر
۳۱۷	۹۶	۶.۳.۳. قطر
۳۱۷	۹۷	۷.۳.۳. زاویه
۳۱۷	۹۷	۱.۷.۳.۳. اندازه زاویه
۳۱۷	۹۷	۸.۳.۳. خطهای موازی، عمود بر هم، ...
۳۱۷	۹۷	۱.۸.۳.۳. خطها موازی اند
۳۱۸	۹۸	۲.۸.۳.۳. خطها بر هم عمودند
۳۱۸	۹۸	۳.۸.۳.۳. خط نیمساز است
۳۱۸	۹۸	۴.۸.۳.۳. خط مماس بر دایره است
۳۱۸	۹۸	۹.۳.۳. مماس مشترک دو دایره
۳۱۹	۹۹	۱۰.۳.۳. شکلهای ایجاد شده
۳۱۹	۹۹	۱۱.۳.۳. دو دایره بر هم مماسند
۳۲۰	۹۹	۱۲.۳.۳. مسأله های ترکیبی
۳۲۰	۱۰۰	۴.۳. دو دایره متقاطع
۳۲۰	۱۰۰	۱.۴.۳. تعریف و قضیه
۳۲۱	۱۰۱	۲.۴.۳. شعاع
۳۲۱	۱۰۲	۳.۴.۳. نقطه و دایره
۳۲۲	۱۰۲	۴.۴.۳. کمان
۳۲۳	۱۰۳	۵.۴.۳. وتر
۳۲۳	۱۰۴	۶.۴.۳. قطر
۳۲۴	۱۰۴	۷.۴.۳. زاویه

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۲۴	۱۰۴	۱.۷.۴.۳. اندازه زاویه
۳۲۵	۱۰۵	۲.۷.۴.۳. رابطه بین زاویه‌ها
۳۲۵	۱۰۶	۸.۴.۳. پاره خط
۳۲۵	۱۰۶	۱.۸.۴.۳. اندازه پاره خط
۳۲۶	۱۰۶	۲.۸.۴.۳. رابطه بین پاره خطها
۳۲۷	۱۰۸	۹.۴.۳. خطهای موازی، عمود بر هم، ...
۳۲۷	۱۰۸	۱.۹.۴.۳. خطها موازی اند
۳۲۷	۱۰۸	۲.۹.۴.۳. خطها بر هم عمودند
۳۲۷	۱۰۹	۳.۹.۴.۳. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۳۲۷	۱۰۹	۴.۹.۴.۳. خط مماس بر دایره است
۳۲۸	۱۱۰	۱۰.۴.۳. شکل‌های ایجاد شده
۳۲۹	۱۱۰	۱۱.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۲۹	۱۱۱	۱۲.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی
۳۲۹	۱۱۲	۵.۳. دو دایره مماس درون
-	۱۱۲	۱.۵.۳. تعریف و قضیه
۳۲۹	۱۱۲	۲.۵.۳. زاویه
۳۲۹	۱۱۲	۱.۲.۵.۳. اندازه زاویه
۳۲۹	۱۱۲	۲.۲.۵.۳. رابطه بین زاویه‌ها
۳۳۰	۱۱۳	۳.۵.۳. پاره خط
۳۳۰	۱۱۳	۴.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی
۳۳۱	۱۱۴	۶.۳. دو دایره یکی درون دیگری (متداخل)
-	۱۱۴	۱.۶.۳. تعریف و قضیه
۳۳۱	۱۱۴	۲.۶.۳. شعاع
۳۳۱	۱۱۵	۳.۶.۳. خط و دایره
۳۳۲	۱۱۵	۴.۶.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۳۲	۱۱۵	۷.۳. دو دایره هم مرکز
-	۱۱۵	۱.۷.۳. تعریف و قضیه
۳۳۲	۱۱۶	۲.۷.۳. شعاع
۳۳۳	۱۱۶	۳.۷.۳. وتر
۳۳۳	۱۱۶	۴.۷.۳. پاره خط
۳۳۳	۱۱۶	۵.۷.۳. وضع نسبی دو دایره
۳۳۴-۳۳۴	۱۱۷-۱۲۷	بخش ۴. سه دایره و بیشتر
۳۳۴	۱۱۹	۱.۴. سه دایره
-	۱۱۹	۱.۱.۴. تعریف و قضیه
۳۳۴	۱۱۹	۲.۱.۴. شعاع
۳۳۴	۱۱۹	۳.۱.۴. نقطه و دایره
۳۳۴	۱۲۰	۴.۱.۴. کمان
۳۳۵	۱۲۰	۵.۱.۴. وتر
۳۳۵	۱۲۱	۶.۱.۴. قطر

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۳۵	۱۲۱	۷.۱.۴. پاره خط
۳۳۶	۱۲۱	۸.۱.۴. خط و دایره
۳۳۶	۱۲۲	۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۳۶	۱۲۲	۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی
۳۳۷	۱۲۳	۲.۴. چهار دایره
-	۱۲۳	۱.۲.۴. تعریف و قضیه
۳۳۷	۱۲۳	۲.۲.۴. شعاع
۳۳۷	۱۲۴	۳.۲.۴. نقطه و دایره
۳۳۸	۱۲۴	۴.۲.۴. خط و دایره
۳۳۹	۱۲۴	۵.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی
۳۳۹	۱۲۵	۳.۴. پنج دایره و بیشتر
-	۱۲۵	۱.۳.۴. تعریف و قضیه
۳۳۹	۱۲۵	۲.۳.۴. شعاع
۳۳۹	۱۲۵	۳.۳.۴. نقطه و دایره
۳۴۱	۱۲۶	۴.۳.۴. کمان
۳۴۲	۱۲۶	۵.۳.۴. قطر
۳۴۳	۱۲۷	۶.۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۴۵-۴۱۲	۱۲۸-۱۹۸	بخش ۵. دایره و مثلث
۳۴۵	۱۳۵	۱.۵. دایره محیطی مثلث
-	۱۳۵	۱.۱.۵. تعریف و قضیه
۳۴۵	۱۳۵	۲.۱.۵. شعاع
۳۴۶	۱۳۶	۳.۱.۵. نقطه و دایره
۳۴۶	۱۳۶	۱.۳.۱.۵. نقطه درون دایره
۳۴۶	۱۳۶	۲.۳.۱.۵. نقطه روی دایره
۳۴۸	۱۳۸	۳.۳.۱.۵. نقطه برون دایره
۳۴۸	۱۳۸	۴.۳.۱.۵. نقطه‌های همدایره
۳۴۹	۱۳۹	۵.۳.۱.۵. نقطه‌های همخط
۳۴۹	۱۴۰	۴.۱.۵. کمان
۳۵۰	۱۴۰	۵.۱.۵. وتر
۳۵۰	۱۴۱	۶.۱.۵. قطر
۳۵۰	۱۴۱	۷.۱.۵. زاویه
۳۵۰	۱۴۱	۱.۷.۱.۵. اندازه زاویه
۳۵۲	۱۴۲	۲.۷.۱.۵. رابطه بین زاویه‌ها
۳۵۲	۱۴۳	۸.۱.۵. پاره خط
۳۵۲	۱۴۳	۱.۸.۱.۵. اندازه پاره خط
۳۵۳	۱۴۳	۲.۸.۱.۵. رابطه بین پاره خطها
۳۵۴	۱۴۵	۹.۱.۵. خطهای موازی، عمود بر هم، نیمساز،...
۳۵۴	۱۴۵	۱.۹.۱.۵. خطها موازی اند
۳۵۵	۱۴۷	۲.۹.۱.۵. خطها بر هم عمودند

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۵۶	۱۴۷	۳.۹.۱.۵ خط نیمساز است
۳۵۶	۱۴۷	۴.۹.۱.۵ خط از نقطه ثابتی می گذرد
۳۵۶	۱۴۸	۵.۹.۱.۵ خطها همرسند
۳۵۷	۱۵۰	۶.۹.۱.۵ خط مماس بر دایره است
۳۵۸	۱۵۱	۱۰.۱.۵ خط سیمسون
۳۵۸	۱۵۱	۱.۱۰.۱.۵ تعریف و قضیه
۳۵۹	۱۵۲	۲.۱۰.۱.۵ نقطه و دایره
۳۵۹	۱۵۲	۳.۱۰.۱.۵ زاویه
۳۶۰	۱۵۲	۴.۱۰.۱.۵ پاره خط
۳۶۱	۱۵۳	۵.۱۰.۱.۵ خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...
۳۶۱	۱۵۳	۱.۵.۱۰.۱.۵ خطها موازی اند
۳۶۱	۱۵۳	۲.۵.۱۰.۱.۵ خطها بر هم عمودند
۳۶۱	۱۵۴	۳.۵.۱۰.۱.۵ خط نیمساز است
۳۶۲	۱۵۴	۴.۵.۱۰.۱.۵ خط از نقطه ثابتی می گذرد
۳۶۲	۱۵۵	۵.۵.۱۰.۱.۵ خطها همرسند
۳۶۲	۱۵۵	۶.۵.۱۰.۱.۵ سایر مسأله های مربوط به این قسمت (خط سیمسون)
۳۶۲	۱۵۶	۱۱.۱.۵ شکلهای ایجاد شده
۳۶۳	۱۵۷	۱۲.۱.۵ سایر مسأله های مربوط به این قسمت
۳۶۵	۱۵۸	۱۳.۱.۵ مسأله های ترکیبی
۳۶۶	۱۶۰	۲.۵ دایره های محاطی مثلث
۳۶۶	۱۶۰	۱.۲.۵ تعریف و قضیه
۳۶۸	۱۶۱	۲.۲.۵ شعاع
۳۶۸	۱۶۱	۱.۲.۲.۵ اندازه شعاع
۳۶۸	۱۶۱	۲.۲.۲.۵ رابطه بین شعاعها
۳۶۸	۱۶۱	۳.۲.۵ نقطه و دایره
۳۶۸	۱۶۱	۱.۳.۲.۵ نقطه روی دایره
۳۶۹	۱۶۱	۲.۳.۲.۵ نقطه های همخط
۳۶۹	۱۶۲	۳.۳.۲.۵ نقطه های همدایره
۳۶۹	۱۶۲	۴.۲.۵ قطر
۳۷۰	۱۶۲	۵.۲.۵ زاویه
۳۷۰	۱۶۲	۱.۵.۲.۵ اندازه زاویه
۳۷۰	۱۶۳	۶.۲.۵ پاره خط
۳۷۰	۱۶۳	۱.۶.۲.۵ اندازه پاره خط
۳۷۱	۱۶۳	۲.۶.۲.۵ رابطه بین پاره خطها
۳۷۳	۱۶۴	۷.۲.۵ خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...
۳۷۳	۱۶۴	۱.۷.۲.۵ خط نیمساز است
۳۷۳	۱۶۵	۲.۷.۲.۵ خط از نقطه ثابتی می گذرد
۳۷۳	۱۶۵	۳.۷.۲.۵ خطها همرسند
۳۷۴	۱۶۶	۴.۷.۲.۵ خط مماس بر دایره است

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۷۴	۱۶۶	۸.۲.۵ سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۷۶	۱۶۷	۹.۲.۵ مسأله‌های ترکیبی
۳۷۷	۱۶۸	۳.۵ دایره‌های محیطی و محاطی مثلث
-	۱۶۸	۱.۳.۵ تعریف و قضیه
۳۷۷	۱۶۸	۲.۳.۵ شعاع
۳۷۷	۱۶۸	۱.۲.۳.۵ اندازه شعاع
۳۷۷	۱۶۸	۲.۲.۳.۵ رابطه بین شعاعها
۳۷۷	۱۶۸	۳.۳.۵ نقطه و دایره
۳۷۷	۱۶۸	۱.۳.۳.۵ نقطه درون دایره
۳۷۷	۱۶۸	۲.۳.۳.۵ نقطه روی دایره
۳۷۸	۱۶۹	۳.۳.۳.۵ نقطه برون دایره
۳۷۸	۱۶۹	۴.۳.۳.۵ نقطه‌های هم‌دایره
۳۷۸	۱۶۹	۵.۳.۳.۵ نقطه‌های هم‌خط
۳۷۹	۱۶۹	۴.۳.۵ قطر
۳۷۹	۱۷۰	۵.۳.۵ زاویه
۳۸۰	۱۷۰	۶.۳.۵ پاره خط
۳۸۰	۱۷۰	۱.۶.۳.۵ رابطه بین پاره خطها
۳۸۱	۱۷۱	۷.۳.۵ خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، هم‌رس، ...
۳۸۱	۱۷۱	۱.۷.۳.۵ خطها هم‌رسند
۳۸۱	۱۷۱	۲.۷.۳.۵ خط مماس بر دایره است
۳۸۱	۱۷۱	۸.۳.۵ سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۸۱	۱۷۱	۹.۳.۵ مسأله‌های ترکیبی
۳۸۳	۱۷۲	۴.۵ دایره‌های نه نقطه، بروکارد، لوموان، ...
۳۸۳	۱۷۲	۱.۴.۵ دایره نه نقطه
۳۸۳	۱۷۲	۱.۱.۴.۵ تعریف و قضیه
۳۸۵	۱۷۳	۲.۱.۴.۵ شعاع
۳۸۶	۱۷۳	۳.۱.۴.۵ نقطه و دایره
۳۸۶	۱۷۳	۱.۳.۱.۴.۵ نقطه روی دایره
۳۸۶	۱۷۴	۲.۳.۱.۴.۵ نقطه‌های هم‌دایره
۳۸۷	۱۷۴	۳.۳.۱.۴.۵ نقطه‌های هم‌خط
۳۸۷	۱۷۵	۴.۱.۴.۵ کمان
۳۸۷	۱۷۵	۵.۱.۴.۵ پاره خط
۳۸۷	۱۷۶	۶.۱.۴.۵ زاویه
۳۸۸	۱۷۶	۷.۱.۴.۵ خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...
۳۸۸	۱۷۶	۱.۷.۱.۴.۵ خطها بر هم عمودند
۳۸۸	۱۷۶	۲.۷.۱.۴.۵ خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۳۸۹	۱۷۷	۳.۷.۱.۴.۵ خطها هم‌رسند
۳۸۹	۱۷۷	۴.۷.۱.۴.۵ خطها پاد موازی‌اند
۳۸۹	۱۷۸	۸.۱.۴.۵ شکل‌های ایجاد شده

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۴۱۹	۲۰۷	۱.۳.۳.۶. نقطه درون دایره
۴۱۹	۲۰۸	۲.۳.۳.۶. نقطه روی دایره
۴۱۹	۲۰۸	۴.۳.۶. قطر
۴۲۰	۲۰۸	۵.۳.۶. زاویه
۴۲۰	۲۰۹	۶.۳.۶. پاره خط
۴۲۰	۲۰۹	۷.۳.۶. خطهای موازی، عمود بر هم، ...
۴۲۰	۲۰۹	۱.۷.۳.۶. خطها بر هم عمودند
۴۲۱	۲۰۹	۲.۷.۳.۶. خط از نقطه ثابتی می گذرد
۴۲۱	۲۱۰	۳.۷.۳.۶. خط مماس بر دایره است
۴۲۱	۲۱۰	۸.۳.۶. شکلهای ایجاد شده
۴۲۳	۲۱۱	۹.۳.۶. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
۴۲۳	۲۱۲	۱۰.۳.۶. مسأله های ترکیبی
۴۲۴	۲۱۳	۴.۶. دایره و مثلثهای حاده الزاویه و منفرجه الزاویه
-	۲۱۳	۱.۴.۶. تعریف و قضیه
۴۲۴	۲۱۳	۲.۴.۶. شعاع
۴۲۴	۲۱۳	۳.۴.۶. نقطه و دایره
۴۲۴	۲۱۳	۱.۳.۴.۶. نقطه درون دایره
۴۲۵	۲۱۴	۲.۳.۴.۶. نقطه برون دایره
۴۲۶	۲۱۴	۴.۴.۶. زاویه
۴۲۶	۲۱۵	۵.۴.۶. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
۴۲۷-۴۵۸	۲۱۶-۲۴۸	بخش ۷. دایره و چهار ضلعی
۴۲۷	۲۲۰	۱.۷. چهار ضلعی محاطی
۴۲۷	۲۲۰	۱.۱.۷. تعریف و قضیه
۴۲۷	۲۲۰	۲.۱.۷. شعاع
۴۲۸	۲۲۰	۳.۱.۷. نقطه و دایره
۴۲۸	۲۲۰	۱.۳.۱.۷. نقطه روی دایره
۴۲۸	۲۲۱	۲.۳.۱.۷. نقطه های همخط
۴۲۹	۲۲۱	۳.۳.۱.۷. نقطه های همدایره
۴۲۹	۲۲۱	۴.۱.۷. کمان
۴۲۹	۲۲۲	۵.۱.۷. زاویه
۴۲۹	۲۲۲	۱.۵.۱.۷. اندازه زاویه
۴۳۰	۲۲۳	۲.۵.۱.۷. رابطه بین زاویه ها
۴۳۱	۲۲۴	۶.۱.۷. پاره خط
۴۳۱	۲۲۴	۷.۱.۷. خطهای موازی، عمود بر هم، ...
۴۳۱	۲۲۴	۱.۷.۱.۷. خطها موازی اند
۴۳۲	۲۲۴	۲.۷.۱.۷. خطها بر هم عمودند
۴۳۲	۲۲۵	۳.۷.۱.۷. خط از نقطه ثابتی می گذرد
۴۳۳	۲۲۵	۴.۷.۱.۷. خطها همرسند
۴۳۴	۲۲۶	۸.۱.۷. شکلهای ایجاد شده

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۴۰۵	۱۹۳	۱.۵.۵.۵. اندازه پاره خط
۴۰۵	۱۹۳	۲.۵.۵.۵. رابطه بین پاره خطها
۴۰۵	۱۹۳	۶.۵.۵.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز،...
۴۰۵	۱۹۳	۱.۶.۵.۵. خطها بر هم عمودند
۴۰۶	۱۹۴	۲.۶.۵.۵. خط نیمساز است
۴۰۷	۱۹۴	۳.۶.۵.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد
۴۰۷	۱۹۵	۴.۶.۵.۵. خطها هم رسند
۴۰۷	۱۹۵	۵.۶.۵.۵. خط مماس بر دایره است
۴۰۷	۱۹۵	۷.۵.۵. شکلهای ایجاد شده
۴۱۱	۱۹۷	۸.۵.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
۴۱۱	۱۹۷	۹.۵.۵. مسأله های ترکیبی
۴۱۳-۴۲۶	۱۹۹-۲۱۵	بخش ۶. دایره و مثلثهای ویژه (متساوی الاضلاع، متساوی الساقین،...)
۴۱۳	۲۰۱	۱.۶. دایره و مثلث متساوی الاضلاع
-	۲۰۱	۱.۱.۶. تعریف و قضیه
۴۱۳	۲۰۱	۲.۱.۶. شعاع
۴۱۳	۲۰۱	۳.۱.۶. نقطه و دایره
۴۱۳	۲۰۲	۴.۱.۶. زاویه
۴۱۴	۲۰۲	۵.۱.۶. پاره خط
۴۱۴	۲۰۳	۶.۱.۶. شکلهای ایجاد شده
۴۱۵	۲۰۳	۷.۱.۶. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
۴۱۵	۲۰۳	۸.۱.۶. مسأله های ترکیبی
۴۱۶	۲۰۴	۲.۶. دایره و مثلث متساوی الساقین
-	۲۰۴	۱.۲.۶. تعریف و قضیه
۴۱۶	۲۰۴	۲.۲.۶. شعاع
۴۱۶	۲۰۴	۳.۲.۶. نقطه و دایره
۴۱۷	۲۰۵	۴.۲.۶. زاویه
۴۱۷	۲۰۵	۱.۴.۲.۶. اندازه زاویه
۴۱۷	۲۰۵	۲.۴.۲.۶. رابطه بین زاویه ها
۴۱۷	۲۰۵	۵.۲.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم،...
۴۱۷	۲۰۵	۱.۵.۲.۶. خطها بر هم عمودند
۴۱۷	۲۰۶	۲.۵.۲.۶. خط مماس بر دایره است
۴۱۸	۲۰۶	۶.۲.۶. شکلهای ایجاد شده
۴۱۸	۲۰۶	۳.۶. دایره و مثلث قائم الزاویه
-	۲۰۶	۱.۳.۶. تعریف و قضیه
۴۱۸	۲۰۷	۲.۳.۶. شعاع
۴۱۸	۲۰۷	۱.۲.۳.۶. اندازه شعاع
۴۱۹	۲۰۷	۲.۲.۳.۶. رابطه بین شعاعها
۴۱۹	۲۰۷	۳.۳.۶. نقطه و دایره

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۹۰	۱۷۸	۹.۱.۴.۵ سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۹۰	۱۷۹	۱۰.۱.۴.۵ مسأله‌های ترکیبی
۳۹۱	۱۸۰	۲.۴.۵ دایره بروکارد
۳۹۱	۱۸۰	۱.۲.۴.۵ تعریف و قضیه
۳۹۴	۱۸۲	۲.۲.۴.۵ نقطه و دایره
۳۹۴	۱۸۲	۳.۲.۴.۵ خطهای: موازی، عمود بر هم،...
۳۹۴	۱۸۲	۱.۳.۲.۴.۵ خطها موازی‌اند
۳۹۴	۱۸۳	۲.۳.۲.۴.۵ خطها همرسند
۳۹۵	۱۸۳	۴.۲.۴.۵ سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۹۵	۱۸۳	۳.۴.۵ دایره لوموان
۳۹۵	۱۸۳	۱.۳.۴.۵ تعریف و قضیه
۳۹۷	۱۸۴	۲.۳.۴.۵ نقطه و دایره
۳۹۷	۱۸۴	۱.۲.۳.۴.۵ نقطه‌های همدایره
۳۹۷	۱۸۴	۲.۲.۳.۴.۵ نقطه‌های همخط
۳۹۷	۱۸۴	۳.۲.۳.۴.۵ نقطه‌های دیگر
۳۹۸	۱۸۵	۳.۳.۴.۵ پاره‌خط
۳۹۸	۱۸۵	۴.۳.۴.۵ خطهای: موازی، عمود بر هم،...
۳۹۸	۱۸۵	۱.۴.۳.۴.۵ خطها همرسند
۳۹۸	۱۸۵	۲.۴.۳.۴.۵ خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۳۹۹	۱۸۵	۵.۳.۴.۵ سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۹۹	۱۸۶	۶.۳.۴.۵ مسأله‌های ترکیبی
۳۹۹	۱۸۷	۴.۴.۵ دایره تیلور
۳۹۹	۱۸۷	۱.۴.۴.۵ تعریف و قضیه
۴۰۰	۱۸۷	۵.۴.۵ دایره آدامس
۴۰۱	۱۸۸	۱.۵.۴.۵ تعریف و قضیه
۴۰۱	۱۸۸	۶.۴.۵ دایره آپولونیوس
۴۰۱	۱۸۸	۱.۶.۴.۵ تعریف و قضیه
۴۰۱	۱۸۸	۵.۵ دایره‌های دیگر و مثلث
-	۱۸۸	۱.۵.۵ تعریف و قضیه
۴۰۱	۱۸۸	۲.۵.۵ شعاع
۴۰۱	۱۹۰	۳.۵.۵ نقطه و دایره
۴۰۱	۱۹۰	۱.۳.۵.۵ نقطه درون دایره
۴۰۲	۱۹۰	۲.۳.۵.۵ نقطه روی دایره
۴۰۳	۱۹۰	۳.۳.۵.۵ نقطه‌های همدایره
۴۰۳	۱۹۱	۴.۳.۵.۵ نقطه‌های همخط
۴۰۳	۱۹۱	۴.۵.۵ زاویه
۴۰۳	۱۹۱	۱.۴.۵.۵ اندازه زاویه
۴۰۵	۱۹۲	۲.۴.۵.۵ رابطه بین زاویه‌ها
۴۰۵	۱۹۳	۵.۵.۵ پاره‌خط

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۴۳۶	۲۲۶	۹.۱.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴۳۷	۲۲۷	۱۰.۱.۷. مسأله‌های ترکیبی
۴۳۸	۲۲۹	۲.۷. چهار ضلعی محاطی عمود قطر
-	۲۲۹	۱.۲.۷. تعریف و قضیه
۴۳۸	۲۳۰	۲.۲.۷. نقطه و دایره
۴۳۸	۲۳۰	۱.۲.۲.۷. نقطه درون دایره
۴۳۸	۲۳۰	۲.۲.۲.۷. نقطه‌های همدایره
۴۳۹	۲۳۰	۳.۲.۷. پاره خط
۴۳۹	۲۳۱	۴.۲.۷. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۴۴۰	۲۳۱	۳.۷. چهار ضلعی محیطی
۴۴۰	۲۳۱	۱.۳.۷. تعریف و قضیه
۴۴۰	۲۳۱	۲.۳.۷. شعاع
۴۴۰	۲۳۱	۱.۲.۳.۷. اندازه شعاع
۴۴۰	۲۳۲	۳.۳.۷. نقطه و دایره
۴۴۰	۲۳۲	۱.۳.۳.۷. نقطه‌های همخط
۴۴۱	۲۳۲	۴.۳.۷. ضلع
۴۴۱	۲۳۲	۵.۳.۷. قطر
۴۴۱	۲۳۳	۶.۳.۷. محیط
۴۴۱	۲۳۳	۷.۳.۷. زاویه
۴۴۲	۲۳۳	۸.۳.۷. پاره خط
۴۴۲	۲۳۴	۹.۳.۷. شکل‌های ایجاد شده
۴۴۳	۲۳۵	۱۰.۳.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴۴۳	۲۳۵	۱۱.۳.۷. مسأله‌های ترکیبی
۴۴۳	۲۳۶	۴.۷. دایره و چهار ضلعی کوژ (محدب) یا کاو (مقعر)
-	۲۳۶	۱.۴.۷. تعریف و قضیه
۴۴۳	۲۳۶	۲.۴.۷. نقطه و دایره
۴۴۴	۲۳۶	۳.۴.۷. پاره خط
۴۴۴	۲۳۶	۱.۳.۴.۷. اندازه پاره خط
۴۴۴	۲۳۶	۲.۳.۴.۷. رابطه بین پاره خطها
۴۴۵	۲۳۷	۴.۴.۷. ثابت کنید چهار ضلعی محیطی است
۴۴۵	۲۳۷	۵.۴.۷. شکل‌های ایجاد شده
۴۴۷	۲۳۸	۶.۴.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴۴۷	۲۳۸	۷.۴.۷. مسأله‌های ترکیبی
۴۴۸	۲۳۹	۵.۷. دایره و چهار ضلعیهای ویژه
۴۴۸	۲۳۹	۱.۵.۷. دایره و متوازی الاضلاع
-	۲۳۹	۱.۱.۵.۷. تعریف و قضیه
۴۴۸	۲۳۹	۲.۱.۵.۷. شعاع
۴۴۹	۲۳۹	۳.۱.۵.۷. قطر
۴۴۹	۲۴۰	۴.۱.۵.۷. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۴۴۹	۲۴۰	۵.۱.۵.۷. شکل‌های ایجاد شده
۴۵۰	۲۴۰	۶.۱.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴۵۰	۲۴۱	۲.۵.۷. دایره و مستطیل
-	۲۴۱	۱.۲.۵.۷. تعریف و قضیه
۴۵۰	۲۴۱	۲.۲.۵.۷. نقطه و دایره
۴۵۰	۲۴۱	۳.۲.۵.۷. پاره خط
۴۵۱	۲۴۱	۴.۲.۵.۷. خط‌های: موازی، عمود بر هم، ...
۴۵۱	۲۴۱	۱.۴.۲.۵.۷. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۴۵۱	۲۴۲	۵.۲.۵.۷. شکل‌های ایجاد شده
۴۵۲	۲۴۳	۳.۵.۷. دایره و مربع
۴۵۲	۲۴۳	۱.۳.۵.۷. تعریف و قضیه
۴۵۲	۲۴۳	۲.۳.۵.۷. نقطه و دایره
۴۵۳	۲۴۳	۳.۳.۵.۷. زاویه
۴۵۳	۲۴۴	۴.۳.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴۵۴	۲۴۴	۵.۳.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی
۴۵۵	۲۴۴	۴.۵.۷. دایره و لوزی
۴۵۵	۲۴۴	۱.۴.۵.۷. تعریف و قضیه
۴۵۵	۲۴۵	۲.۴.۵.۷. زاویه
۴۵۶	۲۴۵	۵.۵.۷. دایره و دوزنقه
۴۵۶	۲۴۵	۱.۵.۵.۷. تعریف و قضیه
۴۵۶	۲۴۶	۲.۵.۵.۷. شعاع
۴۵۶	۲۴۶	۳.۵.۵.۷. زاویه
۴۵۷	۲۴۶	۴.۵.۵.۷. پاره خط
۴۵۷	۲۴۶	۵.۵.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴۵۷	۲۴۷	۶.۵.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی
۴۵۹-۴۶۵	۲۴۹-۲۶۹	بخش ۸. دایره و n ضلعی ($n \geq 5$)
-	۲۵۰	۱.۸. تعریف و قضیه
۴۵۹	۲۵۰	۲.۸. شعاع
۲۶۰	۲۵۰	۳.۸. نقطه و دایره
۴۶۱	۲۵۰	۴.۸. زاویه
۴۶۱	۲۵۰	۱.۴.۸. اندازه زاویه
۴۶۱	۲۵۱	۲.۴.۸. رابطه بین زاویه‌ها
۴۶۲	۲۵۱	۵.۸. پاره خط
۴۶۲	۲۵۱	۱.۵.۸. اندازه پاره خط
۴۶۲	۲۵۱	۲.۵.۸. رابطه بین پاره خط‌ها
۴۶۳	۲۵۱	۶.۸. خط‌های: موازی، عمود بر هم، ...
۴۶۳	۲۵۱	۱.۶.۸. خط‌ها موازی‌اند
۴۶۳	۲۵۲	۲.۶.۸. خط‌ها همرسند
۴۶۴	۲۵۲	۷.۸. شکل‌های ایجاد شده
۴۶۴	۲۵۳	۸.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش
۴۶۵	۲۵۳	۹.۸. مسأله‌های ترکیبی
۴۶۶-۴۶۹		فهرست منابع

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعه‌ای کاملی از تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه، احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی، با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا، قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند.

به این جهت از حدود سی و پنج سال پیش، به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی، و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرة المعارف هندسه اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی، در هندسه مسطحه ؛
۲. رابطه‌های متریک در هندسه مسطحه ؛
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی ؛
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس و ...) ؛
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی) ؛
۶. هندسه تحلیلی ؛
۷. هندسه فضایی ؛
۸. هندسه‌های ناقلیدی ؛

...

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرة المعارف را

در برمی گیرد. به عنوان مثال، رابطه های متری در هندسة مسطحه شامل پنج جلد به شرح زیر است:

جلد ۳. نسبت پاره خطها (نسبت و تناسب، قضیه تالس، ...):

جلد ۴. رابطه های متری در دایره:

جلد ۵. رابطه های متری در مثلث مختلف الاضلاع:

جلد ۶. رابطه های متری در مثلثهای ویژه (متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، قائم الزاویه و ...):

جلد ۷. رابطه های متری در چندضلعیها.

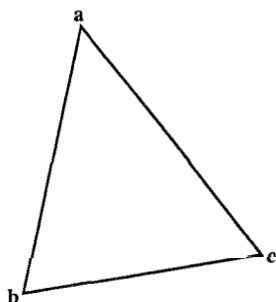
برای استفاده بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است:

● در این مجموعه، صورت قضیه ها و مسأله ها همراه با شکل آنها داده شده است تا دانشجویان علاقه مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.

● قضیه ها و مسأله های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچه مختصری از زمان ارائه و راه حلها، آنها، در قسمت مربوط به خود آمده اند، و تنها، یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است؛ زیرا برخی از این قضیه ها تاکنون به ده ها و حتی به صدها راه، حل شده اند؛ مانند قضیه فیثاغورس در مورد مثلث قائم الزاویه «مربع اندازه وتر هر مثلث قائم الزاویه برابر است با مجموع مربعات اندازه های دو ضلع زاویه قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$ » که تنها به وسیله اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله های المپیادهای بین المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان

صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آنها آورده شده است و علامتهای به کار گرفته شده در این مسأله ها نیز به همان صورت متن اصلی آنها است. به عنوان مثال، در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره خط AB به صورتهای $\overline{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a ، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است. به عنوان مثال، گفته شده: در مثلث abc ضلعهای ab ، bc ، ac ، ...



● در دیگر قضیه ها و مسأله ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است؛ به عنوان مثال، همه جا نقطه ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند: نقطه های A ، B ، C و ...؛ و پاره خط AB به صورت $\overline{AB}$ ، و اندازه زاویه A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این جلد از دایرة المعارف، شامل: تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه مربوط به ویژگیهای توصیفی دایره است که ۸ بخش دارد:

بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره

بخش ۲. یک دایره

بخش ۳. دو دایره

بخش ۴. سه دایره و بیشتر

بخش ۵. دایره و مثلث

بخش ۶. دایره و مثلثهای ویژه

بخش ۷. دایره و چهارضلعی

بخش ۸. دایره و n ضلعی ($n \geq 5$)

هریک از بخشهای بالا، خود به چند زیربخش، تفکیک شده است. به عنوان مثال،

بخش ۵. دایره و مثلث، شامل زیربخشهای زیر است:

۱. ۵. دایره محیطی مثلث

۲. ۵. دایره‌های محاطی مثلث

۳. ۵. دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

۴. ۵. دایره‌های اولر، بروکار، لوموان، ...

۵. ۵. دایره‌های دیگر و مثلث

هریک از زیربخشهای بالا نیز به چند زیربخش جدید تقسیم گردیده است. به عنوان مثال،

زیربخش ۴. ۵. دایره‌های اولر، بروکار، لوموان، ... خود، شامل زیربخشهای زیر است:

۱. ۴. ۵. دایره اولر یا فوئرباخ

۲. ۴. ۵. دایره بروکار

۳. ۴. ۵. دایره لوموان

۴. ۴. ۵. دایره تیلور

۵. ۴. ۵. دایره آدامس

۶. ۴. ۵. دایره آپولونیوس

هریک از موارد بالا نیز به زیربخشهای جدیدی تفکیک شده‌اند. از جمله، زیربخش

۱. ۴. ۵. شامل موارد زیر است:

۱. ۱. ۴. ۵. تعریف و قضیه

۲. ۱. ۴. ۵. شعاع دایره

۳. ۱. ۴. ۵. نقطه و دایره

۵. ۴. ۱. ۴. ۵. کمان

۵. ۵. ۱. ۴. ۵. پاره خط

۵. ۶. ۱. ۴. ۵. زاویه

۵. ۷. ۱. ۴. ۵. خطهای : موازی، عمود بر هم، ...

۵. ۸. ۱. ۴. ۵. شکل‌های ایجاد شده

۵. ۹. ۱. ۴. ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵. ۱۰. ۱. ۴. ۵. مسأله‌های ترکیبی

برخی از زیربخش‌های بالا نیز به زیربخش‌های جدیدی تفکیک شده‌اند و در هریک از آنها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

لازم به ذکر است که در این جلد، راهنمایی‌ها، یا راه‌حلهای ارائه شده، تنها با استفاده از ویژگی‌های توصیفی شکل‌های هندسی انجام شده است. بنابراین قضیه‌ها و مسأله‌هایی که راه‌حلهای دیگری نیز دارند، براساس نوع راه‌حل، در جلدهای دیگر دایرة المعارف، راهنمایی یا حل خواهند شد.

امید است این مجموعه، مورد استفاده دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعداد‌های آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف، مدّعی کامل بودن این دایرة المعارف نیست. ولی امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهاد‌های اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستی‌ها و تکمیل دایرة المعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند، که پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

ویژگیهای توصیفی دایره در هندسه مسطحه

بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره

بخش ۲. یک دایره

بخش ۳. دو دایره

بخش ۴. سه دایره و بیشتر

بخش ۵. دایره و مثلث

بخش ۶. دایره و مثلثهای ویژه (متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، ...)

بخش ۷. دایره و چهارضلعی

بخش ۸. دایره و n ضلعی ($n \geq 5$)

بخش ۱

• ربع دایره و نیمدایره

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. شعاع

۳.۱. نقطه و نیمدایره

۴.۱. کمان

۵.۱. وتر

۶.۱. قطر

۷.۱. زاویه

۸.۱. پاره خط

۹.۱. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۹.۱. خطها موازی اند

۲.۹.۱. خطها برهم عمودند

۱۰.۱. شکلهای ایجاد شده

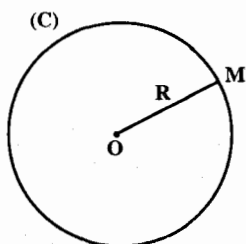
۱۱.۱. سایر مسأله های مربوط به این بخش

۱۲.۱. مسأله های ترکیبی

بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره

۱.۱. تعریف و قضیه

نخست به بررسی دایره می‌پردازیم.

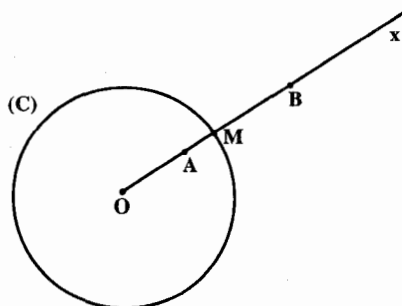


دایره. دایره، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه است که فاصله‌اش از نقطه ثابتی واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطه ثابت مرکز دایره، و مقدار ثابت شعاع دایره نامیده می‌شوند. دایره به مرکز O و شعاع R را به صورت $C(O, R)$ نشان می‌دهند. برای هر نقطه M از این دایره داریم:

$$OM = R$$

پاره خط OM را شعاع دایره و اندازه این پاره خط را که اندازه شعاع دایره است نیز به طور خلاصه، شعاع دایره می‌نامند.

درون و برون دایره. نیمخط دلخواه Ox را به مبدأ O، مرکز دایره $C(O, R)$ ، در نظر می‌گیریم. نقطه M را به فاصله $OM = R$ از نقطه O بر



این نیمخط اختیار می‌کنیم. این نقطه، نقطه برخورد دایره و نیمخط مزبور است. برای هر نقطه مانند A از نیمخط Ox که بین O و M واقع باشد، $OA < R$ و برای هر نقطه مانند B از نیمخط مزبور که بر امتداد OM واقع باشد $OB > R$.

بدین ترتیب بر هر نیمخط به مبدأ O از صفحه،

نقطه‌هایی نظیر A، M و B می‌توان در نظر گرفت که فاصله‌های آنها از نقطه O بترتیب، کوچکتر از شعاع دایره، مساوی با شعاع دایره، یا بزرگتر از آن باشد. بنابراین دایره C مجموعه نقطه‌های صفحه را به سه زیرمجموعه به شرح زیر تقسیم می‌کند:

۱. I، مجموعه نقطه‌هایی که فاصله آنها از مرکز، کوچکتر از شعاع است:

$$I = \{A | OA < R\}$$

این زیرمجموعه از صفحه را که شامل مرکز دایره و به دایره محدود است، درون دایره می‌گوییم (Interior = داخل).

۲. C، مجموعه نقطه‌های واقع بر دایره :

$$C = \{M | OM = R\}$$

۳. E، مجموعه نقطه‌هایی که فاصله آنها از نقطه O از شعاع دایره، بزرگتر است :

$$E = \{B | OB > R\}$$

این زیرمجموعه از صفحه P را برون دایره C می‌گوییم (خارج = Exterior).

مجموعه نقطه‌هایی که روی، یا در درون یک دایره هستند، سطح آن دایره می‌نامند. سطح دایره گرده نیز نامیده می‌شود.

۱. قضیه. در هر صفحه بر دو نقطه متمایز دایره‌های بی‌شمار می‌گذرند. عمود منصف پاره خط واصل بین آن دو نقطه، مکان هندسی مرکزهای این دایره‌هاست.

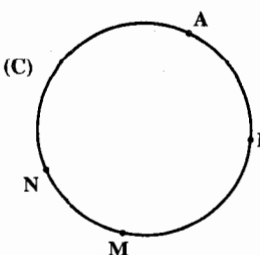
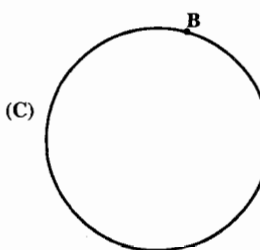
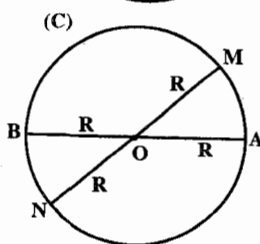
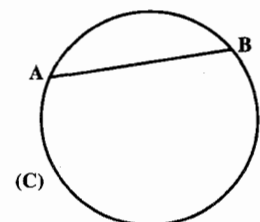
۲. قضیه. خط راست نمی‌تواند با دایره بیش از دو نقطه مشترک داشته باشد.

۳. قضیه. بر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست، یک دایره و تنها یک دایره می‌گذرد.

وتر (در دایره). پاره خطی است که دو نقطه متمایز از یک دایره را به هم وصل می‌کند. مانند وتر AB در دایره (C).
قطر دایره. وتری از دایره است که از مرکز آن می‌گذرد، مانند : قطرهای AB و MN در دایره (C).

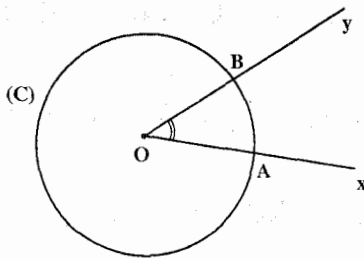
اندازه هر قطر یک دایره، دو برابر اندازه شعاع آن دایره است.

$$AB = MN = 2R$$



کمان دایره. بخشی از دایره است که بین دو نقطه از آن محدود است. مانند کمان $\widehat{AB}$ در شکل.

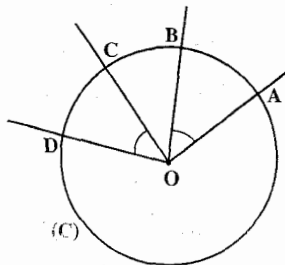
نقطه‌های همدایره. نقطه‌هایی هستند که روی یک دایره واقع باشند. مانند : نقطه‌های A، B، M و N که روی دایره (C) قرار دارند.



زاویه مرکزی. زاویه ای است که رأسش مرکز دایره است.

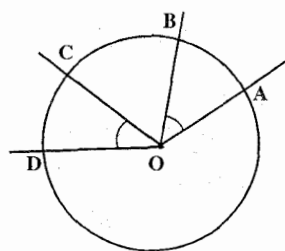
قوسی از دایره که بین نقطه های برخورد دایره با ضلعهای زاویه مرکزی محصور است، قوس روبه روی آن زاویه، و آن زاویه را زاویه مرکزی مقابل به آن قوس می نامند. مانند: زاویه مرکزی xOy یا AOB که روبه رو به قوس AB است.

۴. قضیه. هرگاه در دایره ای دو زاویه مرکزی متساوی باشند، قوسهای روبه رویشان نیز متساوی اند.



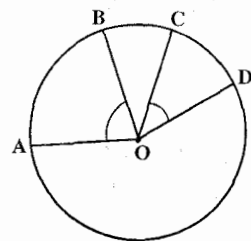
$$\begin{aligned} \text{فرض. } \widehat{AOB} &= \widehat{COD} \\ \text{حکم. } \widehat{AB} &= \widehat{CD} \end{aligned}$$

۵. قضیه عکس. هرگاه در دایره ای، دو قوس متساوی باشند، زاویه های مرکزی روبه روی آنها متساوی اند.



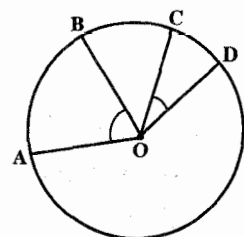
$$\begin{aligned} \text{فرض. } \widehat{AB} &= \widehat{CD} \\ \text{حکم. } \widehat{AOB} &= \widehat{COD} \end{aligned}$$

۶. قضیه. هرگاه در دایره ای، دو زاویه مرکزی متساوی نباشند، قوس مقابل به زاویه بزرگتر، بزرگتر است از قوس مقابل به زاویه کوچکتر.



$$\begin{aligned} \text{فرض. } \widehat{AOB} &> \widehat{COD} \\ \text{حکم. } \widehat{AB} &> \widehat{CD} \end{aligned}$$

۷. قضیه عکس. هرگاه در دایره ای، دو قوس نامتساوی باشند، قوس بزرگتر، مقابل است به زاویه مرکزی بزرگتر.



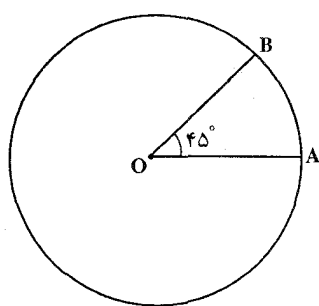
$$\begin{aligned} \text{فرض. } \widehat{AB} &> \widehat{CD} \\ \text{حکم. } \widehat{AOB} &> \widehat{COD} \end{aligned}$$

اندازه کمان. از قضیه های اخیر، نتیجه می شود که یک وابستگی میان هرکمان و زاویه مرکزی آن وجود دارد، مثلاً اگر یک زاویه مرکزی چند

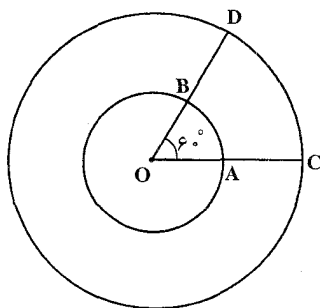
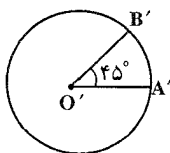
برابر شود، کمان آن هم چند برابر می شود و بعکس. همچنین بزرگی و کوچکی کمانهای یک دایره به بزرگی و کوچکی زاویه های مرکزی آنها بستگی دارد، بنابراین می توان از تعریف زیر برای مقایسه و اندازه گیری کمانهای یک دایره ثابت استفاده کرد.

تعریف. هرگاه اندازه زاویه مرکزی یک کمان، برابر با α واحد باشد، گوئیم اندازه کمان هم برابر با α واحد است.

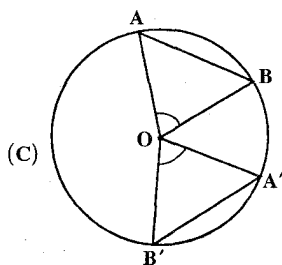
بنابراین اگر زاویه مرکزی یک کمان 60° درجه باشد، آن کمان هم 60° درجه است. در جلد های دیگر، درازای یک کمان را نیز تعریف خواهیم کرد که برحسب واحدهای درازا مانند متر، سانتیمتر، اینچ و غیره بیان می شود. یادآوری می کنیم که درازای (طول) یک کمان و اندازه آن، دو چیز متفاوت هستند و از یک گونه نیستند. دو کمان از دو دایره با شعاعهای مختلف، ممکن است یک اندازه داشته باشند ولی درازایشان متفاوت باشد (شکلهای الف) و (ب) را ببینید).



(ب)

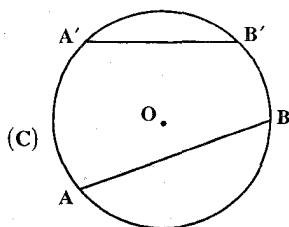


(الف)



(c)

۸. قضیه. فرض کنیم AB و $A'B'$ دو وتر از یک دایره هستند. و $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ کمانهایی هستند که از 180° بیشتر نیستند، آن گاه $AB = A'B'$ اگر و تنها اگر $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$.



(c)

۹. قضیه. فرض کنیم AB و $A'B'$ دو وتر از یک دایره اند $\widehat{AB}$ و $\widehat{A'B'}$ از 180° بیشتر نیستند، آن گاه AB از $A'B'$ بزرگتر است، اگر و تنها اگر $\widehat{AB}$ از $\widehat{A'B'}$ بزرگتر باشد.

۱۰. قضیه. در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، وتر و کمانهای آن را نصف می کند.

۱۱. قضیه های عکس:

قضیه ۱. خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر آن وصل کند، بر آن وتر عمود است؛ بنابراین کمانهای نظیر آن وتر را نصف می کند.

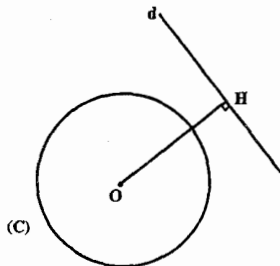
قضیه ۲. قطری که از وسط یک کمان از دایره بگذرد، بر وتر نظیر آن کمان عمود است؛ بنابراین وتر و کمان دیگر نظیر آن را، نصف می کند.

قضیه ۳. کمانهایی که بین دو وتر متوازی از دایره ای محصور باشند، مساوی یکدیگرند. ۱۲. در هر دایره، وترهای متساوی از مرکز دایره به یک فاصله اند و بعکس.

۱۳. از دو وتر نامتساوی یک دایره، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است.

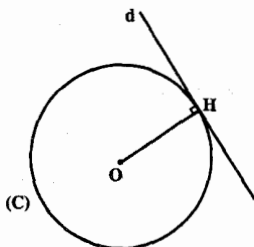
۱۴. قضیه عکس. اگر دو وتر از مرکز دایره به یک فاصله نباشند، وتری که به مرکز نزدیکتر است، از وتر دیگر بزرگتر است.

اوضاع نسبی خط و دایره. خط d و دایره $C(O, R)$ در یک صفحه نسبت به هم یکی از سه حالت زیر را می توانند داشته باشند:



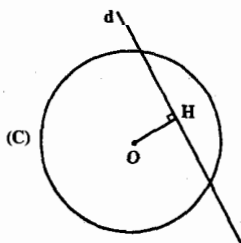
(الف)

۱. خط d و دایره $C(O, R)$ هیچ نقطه مشترکی ندارند، شکل (الف)، اگر فاصله مرکز دایره از خط d را با OH نشان دهیم، در این حالت، $OH > R$ (چرا؟).



(ب)

۲. خط d و دایره $C(O, R)$ در یک نقطه مشترکند. شکل (ب)، در این حالت، خط و دایره را مماس برهم می نامند و $OH = R$ است. H را نقطه تماس خط d با دایره (C) می نامند.



(پ)

۳. خط d و دایره $C(O, R)$ در دو نقطه مشترکند. در این حالت، خط و دایره را متقاطع می نامند و $OH < R$ است. شکل (پ).

نتیجه. در هر دایره، شعاع در نقطه تماس بر خط مماس، عمود است.

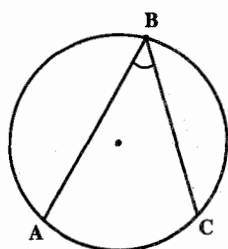
بعکس، اگر: $OH > R$ ، $OH = R$ و یا $OH < R$ باشد، بترتیب، خط و دایره: متخارج، مماس و یا متقاطعد.

۱۵. از نقطه M واقع در صفحه دایره $C(O, R)$ ، خطی مماس بر دایره رسم کنید.

۱۶. قضیه. هرگاه از یک نقطه در برون دایره‌ای، دو مماس بر آن دایره رسم شود:

۱. قطعه‌هایی از مماسها که بین آن نقطه و نقطه‌های تماس محصورند، متساوی‌اند.

۲. خطی که آن نقطه را به مرکز دایره وصل کند، زاویه بین دو خط مماس و همچنین زاویه بین شعاعهای نقطه‌های تماس را نصف می‌کند و بر وتر از دایره که دو نقطه تماس را به هم وصل می‌کند، عمود است و آن را نصف می‌کند.

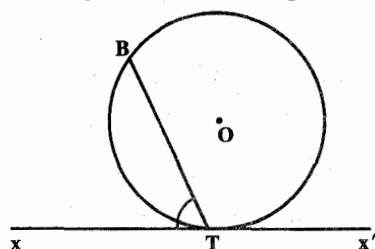


زاویه محاطی. زاویه محاطی زاویه‌ای است که رأس آن، یک نقطه از دایره و ضلعهای آن، دو وتر از همان دایره‌اند. کمائی از دایره را که به دو ضلع زاویه محاطی، محدود است و در داخل آن زاویه قرار دارد، کمان روبه‌رو به آن زاویه محاطی می‌گویند. مانند: زاویه محاطی ABC .

۱۷. قضیه. اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان روبه‌روی آن.

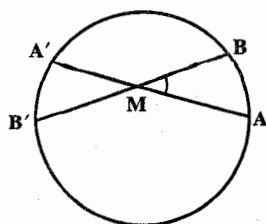
۱۸. قضیه. مکان هندسی نقاطی از یک صفحه که از وصل کردن آنها به دو نقطه ثابت A و B از آن صفحه، زاویه‌ای مساوی α پدید می‌آید، کمانهایی است از دو دایره متساوی در آن صفحه، که بر دو نقطه مزبور می‌گذرند و زاویه مرکزی مقابل به وتر مشترک آنها، مساوی 2α است.

زاویه بین مماس و وتر (زاویه ظلّی). هر زاویه که رأس آن، یک نقطه از دایره، و یک



ضلع آن، مماس بر دایره در آن نقطه و ضلع دیگرش وتر دایره باشد، زاویه ظلّی نامیده می‌شود. مانند: زاویه xtB در شکل.

کمائی از دایره را که در داخل زاویه ظلّی واقع می‌شود و در حقیقت، کمان نظیر وتر مزبور است، کمان روبه‌رو به زاویه ظلّی می‌گوییم.

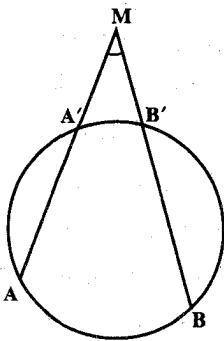


۱۹. قضیه. اندازه هر زاویه ظلّی، نصف اندازه کمان روبه‌روی آن، از دایره است.

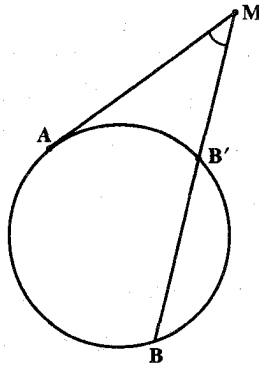
زاویه درونی (زاویه بین دو وتر). زاویه‌ای است که رأسش درون دایره است و ضلعها و امتداد ضلعهایش قاطعهایی از دایره‌اند.

۲۰. قضیه. اندازه زاویه درونی، یعنی زاویه‌ای که بین دو وتر متقاطع در درون یک دایره پدید می‌آید، نصف مجموع اندازه‌های دو کمانی از دایره است که به آن دو وتر محدودند، و در آن زاویه و زاویه متقابل به رأس آن قرار دارند.

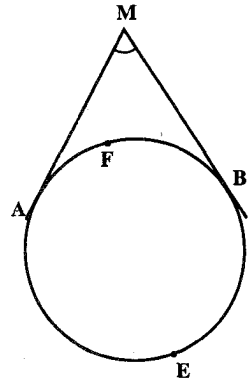
زاویه برونی (زاویه بین امتدادهای دو وتر، امتداد یک وتر و یک مماس، دو مماس). زاویه‌ای است که رأسش بیرون دایره است و ضلعهای قاطعهای دایره و یا مماس بر دایره‌اند (یک یا هر دو ضلع). زاویه AMB در هریک از شکلهای (الف)، (ب) و (پ) زاویه‌ای برونی است.



(الف)

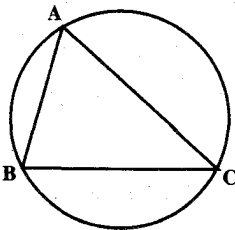


(ب)

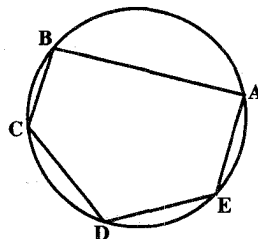
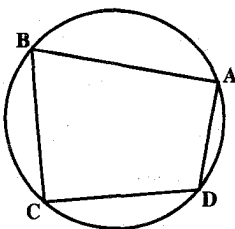


(پ)

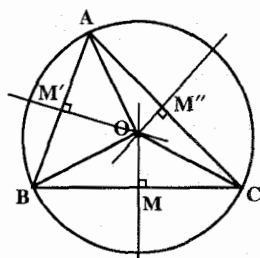
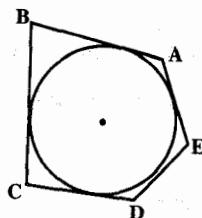
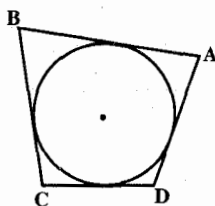
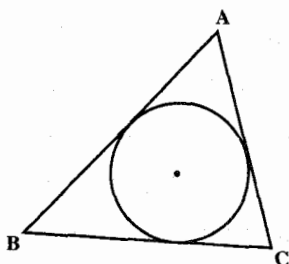
۲۱. قضیه. اندازه زاویه‌ای که بین امتدادهای دو وتر در خارج دایره پدید می‌آید (زاویه برونی)، نصف تفاضل اندازه‌های دو کمانی از دایره است که به آن دو وتر محدودند و در زاویه قرار دارند.



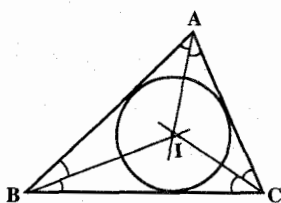
چند ضلعی محاطی. چند ضلعی است که همه رأسهایش روی یک دایره قرار دارند مانند: مثلث ABC، چهار ضلعی ABCD و پنج ضلعی ABCDE. دایره را محیط بر چند ضلعی، یا دایره محیطی چند ضلعی می‌نامند.



چند ضلعی محیطی. چند ضلعی است که همه ضلعهایش بر یک دایره، مماس باشند. دایره را محاط در چند ضلعی می‌نامند. مانند: مثلث محیطی ABC، چهارضلعی محیطی ABCD و پنج ضلعی محیطی ABCDE.



دایره محیطی مثلث. اگر نقطه O محل هم‌رسی سه عمود منصف ضلعهای مثلث ABC باشد (شکل)، دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA رسم شود از هر سه نقطه A، B و C می‌گذرد و مثلث در داخل آن قرار می‌گیرد. این دایره، دایره محیطی مثلث ABC نامیده می‌شود. هر مثلث، تنها یک دایره محیطی دارد.

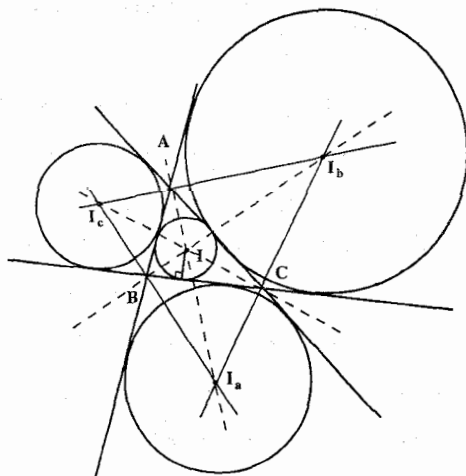


دایره محاطی درونی مثلث. دایره‌ای است که بر ضلعهای مثلث، مماس است. مرکز این دایره، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث است. دایره‌های محاطی برونی مثلث. دایره‌هایی هستند که بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماسند. مرکز

هر یک از این دایره‌ها، نقطه‌های برخورد نیمسازهای دو زاویه برونی مثلث و نیمساز زاویه درونی سوم است.

هر مثلث، سه دایره محاطی برونی دارد. شعاعهای آنها را با r_a ، r_b و r_c نشان می‌دهند.

نکته. دایره محاطی درونی و دایره‌های محاطی برونی



مثلث را، چهار دایره سه مماس مثلث، و مرکزهایشان را مرکزهای سه مماس مثلث می نامند. مرکز دایره محاطی درونی مثلث را معمولاً با I و مرکزهای دایره های محاطی برونی مماس بر ضلعهای BC ، AC و AB را به ترتیب، با I_a ، I_b و I_c نشان می دهند. مثلث $I_a I_b I_c$ را مثلث مرکزیه مثلث ABC می نامند.

نتیجه. چهار مرکز سه مماس هر مثلث روی شش خط که نیمسازهای زاویه های مثلثند، قرار دارند. هر مرکز سه مماس روی سه خط واقع است و روی هر خط دو مرکز سه مماس قرار دارد.

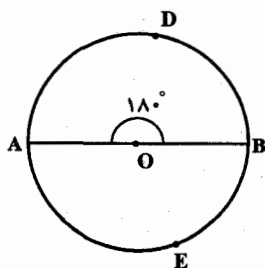
چهار ضلعیهای محیطی و محاطی. چهار ضلعیها، برخلاف مثلث همیشه محیطی یا محاطی نیستند. یک چهارضلعی در صورتی در یک دایره، محاط یا بر دایره ای محیط است که خواص معینی داشته باشد. در این قسمت، ویژگیهای چهارضلعیهای محاطی و محیطی را خواهیم شناخت.

۲۲. قضیه. در هر چهارضلعی محاطی، زاویه های مقابل، مکمل یکدیگرند.

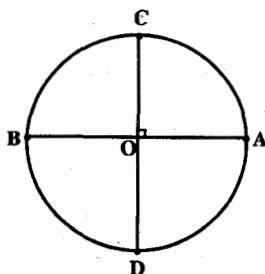
۲۳. عکس قضیه. هر چهارضلعی که زاویه های مقابل آن، مکمل یکدیگر باشند، یک چهارضلعی محاطی است.

۲۴. قضیه. مجموع دو ضلع مقابل هر چهارضلعی محیطی، برابر است با مجموع دو ضلع مقابل دیگر.

۲۵. عکس قضیه. هر چهارضلعی که مجموع دو ضلع مقابل آن با مجموع دو ضلع مقابل دیگر، مساوی باشد، بر یک دایره محیط است.

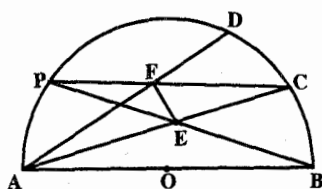


نیمدایره. هر قطر دایره، آن دایره را به دو بخش متساوی تقسیم می کند که هر کدام، یک نیمدایره نامیده می شوند. در شکل، قطر AB دایره (O, R) را به دو نیمدایره بخش کرده است (نیمدایره های ADB و AEB). مرکز هر یک از این دو نیمدایره، نقطه O مرکز دایره (C) و شعاع هر نیمدایره همان R ، شعاع دایره (C) است.



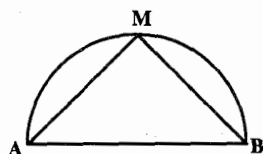
ربع دایره. هر دو قطر عمود برهم از یک دایره، آن دایره را به چهار بخش برابر، تقسیم می کنند که هر بخش، یک ربع دایره نامیده می شوند. مرکز ربع دایره، همان مرکز دایره و شعاع ربع دایره، همان شعاع دایره است.

در شکل، دو قطر عمود برهم AB و CD از دایره (O, R) ، آن دایره را به چهار ربع دایره بخش کرده است.



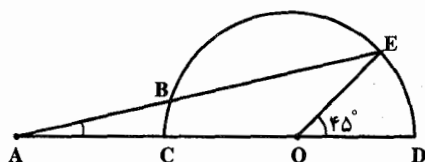
محل برخورد وترهای CA و PB و F محل برخورد وترهای AD و PC باشد، ثابت کنید: وتر AD بر EF عمود است.

۶.۱. قطر



۳۰. در نیمدایره ای به قطر AB، نقطه M وسط کمان AB است. اگر $MA = 6\sqrt{2}$ سانتیمتر باشد، اندازه قطر AB چند سانتیمتر است؟

۷.۱. زاویه



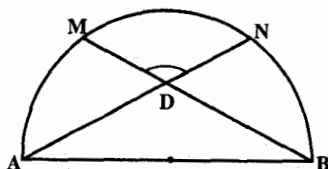
۳۱. در شکل، CD قطر نیمدایره ای به مرکز O است. نقطه A بر امتداد DC و نزدیکتر به C قرار دارد. نقطه E بر نیمدایره واقع است و B نقطه برخورد (متمایز از E) خط AE با نیمدایره است. هرگاه طول

AB با طول OD برابر و اندازه زاویه EOD برابر 45° باشد، اندازه زاویه BAO برابر است با:

الف) 10° ب) 15° ج) 20° د) 25° هـ) 30°

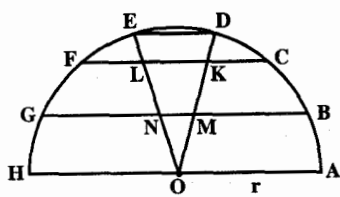
مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۹

۳۲. دو وتر AN و BM از نیمدایره ای به قطر AB یکدیگر را در نقطه D قطع کرده اند (شکل). اندازه زاویه MDN را تعیین کنید، در صورتی که $\widehat{AM} = \widehat{MN} = \widehat{NB}$ باشد.



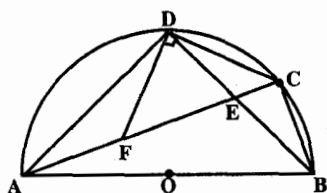
۱.۸. یارہ خط

۳۳. نمیداره‌ای با نقطه‌های $A, A_1, \dots, A_{2n+1}$ به $2n+1$ کمان برابر، تقسیم می‌شود. (A و A_{2n+1} دو انتهای نیم‌دایره هستند)، O مرکز نیم‌دایره است. ثابت کنید که: خطهای راست $A_1A_{2n}, A_2A_{2n-1}, \dots, A_nA_{n+1}$ ، ضمن برخورد با خطهای راست OA_n و OA_{n+1} ، پاره‌خطهایی تشکیل می‌دهند که مجموع طولهایشان، برابر با شعاع دایره است.



۳۴. نیم‌دایره‌ای به قطر $AH = 2r$ مفروض است. نقطه‌های A, B, C, D, E, F, G, H کمان $\widehat{AB}$ را به ۷ قسمت برابر، تقسیم کرده‌اند. از نقطه O مرکز نیم‌دایره به دو نقطه وسطی D و E وصل می‌کنیم تا وترهای موازی CF و BG را در نقطه‌های L, K, M و N قطع کنند، ثابت کنید که :

$$DE + KL + MN = r$$

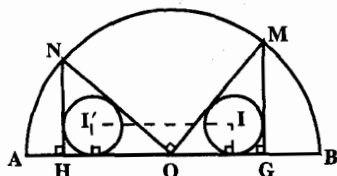


۳۵. روی نیمدایره‌ای به قطر AB دو کمان $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ را متساوی اختیار کرده، از D عمودی بر DC اخراج می‌کنیم تا AC را در F قطع کند، ثابت کنید: نقطه F وسط AE است (E نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ است).

۹.۱. خط‌های: موازی، عمود بر هم، ...

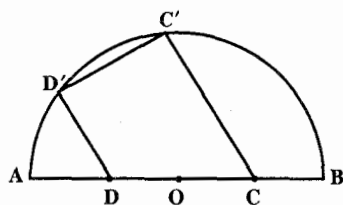
۱.۹.۱. خطها موازی اند

۳۶. در نیمدایره‌ای به قطر AB و مرکز O دو شعاع عمود برهم OM و ON را رسم کرده، از



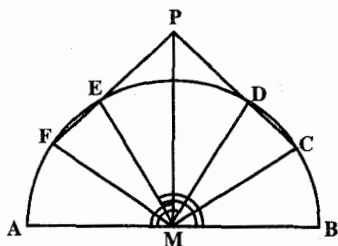
M و N عمودهای MG و NH را بر قطر AB
فروود می‌آوریم و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث
MOG را I و مرکز دایرهٔ محاطی مثلث
NOH را I' می‌نامیم. ثابت کنید: II' با AB موازی است.

۲.۹.۱. خطها برهم عمودند



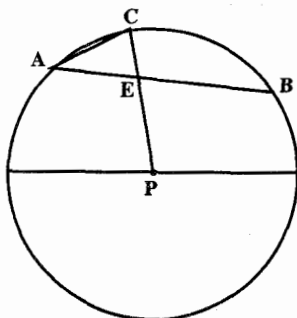
۳۷. در نیمدایره‌ای به مرکز O روی قطر AB، نقطه‌های C و D را در طرفین نقطه O طوری اختیار می‌کنیم که $OC = OD$ باشد. از نقطه‌های C و D دو خط موازی می‌کشیم تا نیمدایره را

بترتیب، در نقطه‌های C' و D' قطع کنند. ثابت کنید: $C'D' \perp DD'$ بر عمود است.



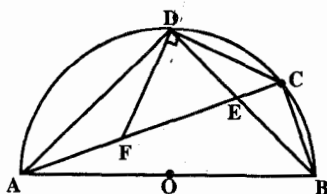
۳۸. فرض کنید قطر AB یک نیمدایره و M نقطه‌ای روی قطر AB باشد. نقطه‌های C، D، E و F روی نیمدایره طوری قرار گرفته‌اند که $\widehat{CMA} = \widehat{FMB}$ و $\widehat{AMD} = \widehat{EMB}$. فرض کنید P معرف نقطه برخورد خطهای EF و CD باشد. ثابت کنید که: خط PM بر AB عمود است.

۱۰.۱. شکل‌های ایجاد شده



۳۹. روی نیمدایره‌ای به مرکز P، وترهای AB و AC را به نحوی برگزینید که $AB = 3AC$ و C نقطه‌ای از کمان کوچکتر AB باشد. شعاع PC وتر AB را در E قطع می‌کند. ثابت کنید: مثلث ACE متساوی الساقین است.

۱۱.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

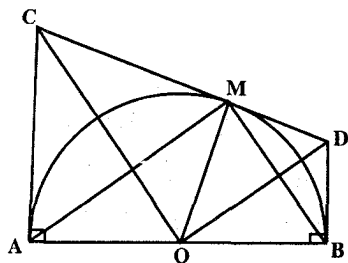


۴۰. نیمدایره‌ای به قطر AB و به مرکز O مفروض است: نقطه‌های D و E روی این نیمدایره چنان قرار دارند که $\widehat{AD} = 6^\circ$ و $\widehat{DE} = 9^\circ$ است. فاصله مرکز نیمدایره از وترهای AD، DE و EB را باهم مقایسه کنید.

بخش ۱ / ربع دایره و نیمدایره □ ۳۵

۴۱. در یک نیمدایره مفروض، یک چهارضلعی با محیط معلومی، محاط شده است. اگر ضلع روبه‌رو به قطر این نیمدایره، طولی برابر ۱ داشته باشد، کدام چهارضلعی بیشترین محیط را دارد؟

۱۲.۱. مسأله‌های ترکیبی



۴۲. نیمدایره‌ای به قطر AB داده شده است. از A و B دو عمود AC و BD را بر AB اخراج کرده و از نقطه دلخواه M واقع بر نیمدایره، مماسی بر آن رسم کرده ایم و محل برخورد این مماس با عمودهای AC و BD را به ترتیب، C و D می‌نامیم:

۱. ثابت کنید: $AC + BD = CD$ ،

۲. از M به A و B و از O به C و D وصل می‌کنیم. ثابت کنید: چهارضلعی که به این ترتیب به دست می‌آید، مستطیل است.

• یک دایره

۱.۲. تعریف و قضیه

۲.۲. شعاع

۳.۲. نقطه و دایره

۱.۳.۲. نقطه درون دایره

۲.۳.۲. نقطه روی دایره

۳.۳.۲. نقطه برون دایره

۴.۳.۲. نقطه‌های همخط

۵.۳.۲. تعداد دایره‌های گذرنده بر نقطه‌ها

۴.۲. کمان

۱.۴.۲. اندازه کمان

۲.۴.۲. رابطه بین کمانها

۳.۴.۲. تعداد کمانها

۵.۲. وتر

۱.۵.۲. اندازه وتر

۲.۵.۲. برابری وترها

۳.۵.۲. برابری قطعه‌های وترها

۴.۵.۲. نابرابری وترها

۵.۵.۲. ثابت کنید وترها بر هم عمودند

۶.۵.۲. تعداد وترها

۷.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶.۲. قطر

۷.۲. زاویه

۱.۷.۲. زاویه مرکزی

۲.۷.۲. زاویه محاطی

۳.۷.۲. زاویه ظلی

۴.۷.۲. زاویه درونی (زاویه بین دو وتر)

۵.۷.۲. زاویه برونی (زاویه بین امتداد دو وتر، دو مماس، یا یک وتر و یک مماس)

۶.۷.۲. زاویه‌های مختلف

۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها

۱.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها (برابررها)

۲.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها (نابرابررها)

۸.۷.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸.۲. پاره خط

۱.۸.۲. اندازه پاره خط

۲.۸.۲. رابطه بین پاره خطها

۱.۲.۸.۲. رابطه بین پاره خطها (برابررها)

۲.۲.۸.۲. رابطه بین پاره خطها (نابرابررها)

۳.۸.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹.۲. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۹.۲. خطها موازی اند

- ۲.۹.۲. خطها بر هم عمودند
- ۳.۹.۲. خط نیمساز است
- ۴.۹.۲. خط از نقطه ثابتی می گذرد
- ۵.۹.۲. خطها همسرند
- ۶.۹.۲. وضع نسبی خط و دایره
- ۱.۶.۹.۲. خط مماس بر دایره است
- ۲.۶.۹.۲. خط متقاطع با دایره است

۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده

- ۱.۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده (مثلت)
- ۲.۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده (چند ضلعیها، $n \geq 4$)

۱۱.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۲. یک دایره

۱.۲. تعریف و قضیه

تعریف دایره و برخی عاملهای دیگر در ارتباط با دایره و قضیه‌هایی از دایره را در بخش ۱ دیدیم. اینک، نکته‌ها و قضیه‌هایی دیگر در مورد دایره را بررسی می‌کنیم.

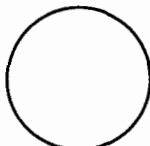
خم مسطح. مجموعه‌ای از نقطه‌هاست که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم کنیم. در شکل، نمونه‌های (الف)، (ب) و (پ) هر کدام یک خم مسطح هستند ولی (ت) یک خم مسطح نیست. بنابراین دایره یک خم مسطح است.



(ت)



(پ)



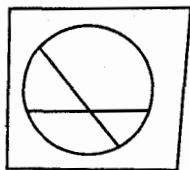
(ب)



(الف)

خم ساده. یک خم مسطح، ساده است که هیچ‌یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند. در شکل، (الف) و (ب) خمهای ساده هستند ولی (پ) و (ت) خمهای ساده نیستند. خم ساده می‌تواند بسته یا باز باشد.

(الف) خم ساده باز و (ب) خم ساده بسته است.



(ت)



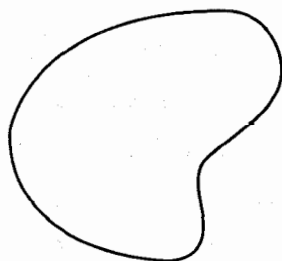
(پ)



(ب)



(الف)



(C)

قضیه خم جردن. هر خم ساده بسته (C) صفحه را به سه زیرمجموعه جدا از هم، درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌کند.

۴۳. قضیه. در هر دایره، کمانهای محصور بین دو وتر موازی، با هم برابرند.

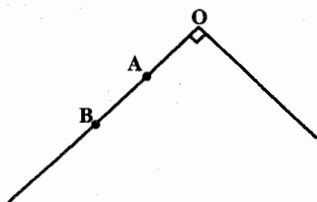
۴۴. قضیه. ثابت کنید، خطی که در وسط یک قوس از دایره‌ای بر آن دایره مماس شود، با وتر آن قوس، موازی است.

۴۵. قضیه. ثابت کنید، هر دو وتر متوازی که بر دو انتهای یک قطر دایره ای بگذرند، متساوی اند.
۴۶. ثابت کنید، هر دو وتر متساوی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می گذرند، متوازی اند.
۴۷. قضیه. در هر چهارضلعی محاطی، زاویه های روبه رو به هر ضلع با هم برابرند و بعکس.
۴۸. قضیه عکس. اگر در یک چهارضلعی، دو زاویه روبه رو به یک ضلع برابر باشند، آن چهارضلعی محاطی است.
۴۹. قضیه. در هر چهارضلعی محاطی، هر زاویه خارجی چهارضلعی با زاویه داخلی غیر مجاورش برابر است و بعکس.

۲.۲. شعاع

۵۰. ثابت کنید: طول شعاع دایره، برابر است با تفاضل طولهای دو پاره خط راست که یکی وتر کمان $\frac{1}{3}$ و دیگری وتر کمان $\frac{3}{4}$ دایره است.

المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶



۵۱. نقطه های A و B بر یک ضلع زاویه قائمه ای به رأس O اختیار می شوند، $OA = a$ و $OB = b$. شعاع دایره ای را پیدا کنید که از A و B می گذرد و بر ضلع دیگر زاویه، مماس است.

۳.۲. نقطه و دایره

۱.۳.۲. نقطه درون دایره

۵۲. ثابت کنید، مجموعه نقطه های درون دایره، مجموعه ای محدب است.
۵۳. روی یک کاغذ شطرنجی که طول ضلع هر خانه آن برابر واحد است، دایره ای به شعاع 10° رسم کرده ایم؛ ثابت کنید، بیش از 25° گره، از شبکه، درون این دایره وجود دارد.
۵۴. هفت نقطه در سطح دایره ای به شعاع واحد چنان قرار گرفته اند که فاصله هیچ دو نقطه ای از آنها، از واحد کوچکتر نیست. ثابت کنید، یکی از نقطه ها بر مرکز دایره واقع است.
- المیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۷۵

۲.۳.۲. نقطه روی دایره

۵۵. ثابت کنید، همه نقطه‌های محیط دایره را می‌توان به دو مجموعه چنان تقسیم کرد که بین رأس‌های هر مثلث قائم‌الزاویه محاط در این دایره، نقطه‌های هر دو مجموعه وجود داشته باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، برزیل، ۱۹۸۳

۵۶. نقطه P در صفحه دایره C و در خارج آن واقع است. حداکثر تعداد نقطه‌های دایره C که به فاصله ۳ سانتیمتر از P می‌توانند باشند، چند عدد است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۵۷. در ساحل یک دریاچه گرد بزرگ، چند نقطه مسکونی وجود دارد. بین برخی از این نقطه‌های مسکونی، می‌توان با کشتی رفت و آمد کرد. می‌دانیم، تنها وقتی بین دو نقطه، رفت و آمد با کشتی ممکن است که، بین دو نقطه مسکونی بعد از آنها (در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت)، این وسیله ارتباطی وجود نداشته باشد. ثابت کنید: از هر نقطه به هر نقطه دیگر، می‌توان با کشتی مسافرت کرد، به نحوی که حداکثر به دوبار جابه‌جایی نیاز باشد.

المپیادهای ریاضی شوروی سابق، ۱۹۸۰

۵۸. n نقطه روی محیط دایره‌ای قرار دارند و می‌دانیم، برای هر دو نقطه دلخواه، یکی از دو کمائی که آنها را به هم پیوسته، از 120° درجه کمتر است. ثابت کنید: همه این n نقطه، روی کمائی برابر 120° درجه واقعند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱

۵۹. در صفحه‌ای، دو نقطه متفاوت O و A داده شده‌اند. به ازای هر نقطه X صفحه، غیر از O ، اندازه زاویه بین OA و OX برحسب رادیان، و در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، را با $a(X)$ نمایش می‌دهیم ($0 \leq a(X) < 2\pi$). فرض می‌کنیم $C(X)$ دایره‌ای با مرکز O و شعاع به طول $OX + a(X)/OX$ باشد. هر نقطه صفحه با یکی از رنگها به تعداد متناهی رنگ شده است. ثابت کنید که، نقطه Y که به ازای آن: $a(Y) > 0$ است چنان موجود است که رنگ آن بر محیط دایره $C(Y)$ ظاهر می‌شود.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۴

۶۰. ۳۰۰ نقطه روی محیط دایره‌ای نشان گذاشته شده است. حشره‌ای در یکی از این نقطه‌ها نشسته است. او در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت، مرتب از نقطه‌ای به نقطه دیگر می‌جهد، به این ترتیب: اول روی نقطه مجاور، بعد از روی یک نقطه می‌جهد و در نقطه بعد از آن می‌نشیند، سپس از روی دو نقطه می‌جهد، بعد از روی سه نقطه و غیره.

ثابت کنید که: می‌توان نقطه‌ای پیدا کرد که حشره هرگز روی آن قرار نمی‌گیرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۶

۶۱. دایره‌ای به شعاع واحد و ۱۹۸۲ نقطه، روی صفحه داده شده است. ثابت کنید که: روی محیط این دایره نقطه‌ای پیدا می‌شود که مجموع فاصله‌های از آن تا ۱۹۸۲ نقطه، از ۱۹۸۲ بیشتر باشد.

المیادہای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

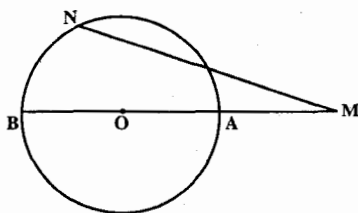
۶۲. فرض می‌کنیم $n \geq 3$ و مجموعه E از $2n-1$ نقطه متمایز روی یک دایره تشکیل شده باشد. فرض می‌کنیم، دقیقاً k نقطه از این نقطه‌ها به رنگ سیاه، رنگ آمیزی شده است. یک چنین رنگ آمیزی را «خوب» می‌گوییم. اگر حداقل، یک زوج از نقطه‌های سیاه وجود داشته باشد به طوری که درون یکی از دو کمان منتهی به این دو نقطه شامل درست n نقطه از E باشد.

کمترین مقدار k را برای این که هر رنگ آمیزی E خوب باشد، پیدا کنید.

المیادہای بین المللی ریاضی، چین، ۱۹۹۰

۳.۳.۲. نقطه برون دایره

۶۳. دایره‌ای به قطر AB داده شده است. روی این قطر و یا در امتداد آن نقطه M را اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که، فاصله M از هر نقطه N واقع بر محیط دایره، محصور بین MA و MB می‌باشد. به عبارت دیگر MA و MB



بترتیب کمترین و بیشترین فاصله نقطه M از دایره به مرکز O می باشند.

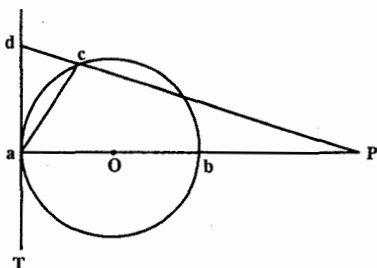
۶۴. تعداد نقطه‌هایی که از یک دایره و از دو خط موازی مماس بر آن دایره به یک فاصله‌اند، برابر است با:

الف) ۰ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) نامتناهی

المیادہای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳ و مسابقہ ہای ریاضی دبیرستانہای امریکا، ۱۹۶۹

۶۵. دایره‌ای به شعاع یک، داده شده است.

[ab] قطری از آن و خط T در a بر آن مماس است. وتر [ac] به طول k در این دایره رسم می‌شود و نقطه d بر خط T به گونه‌ای انتخاب می‌شود که c و d در یک



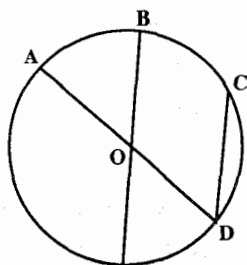
بخش ۲ / یک دایره □ ۴۳

طرف خط ab واقع باشند و $[ad = k]$. اگر نقطه برخورد دو خط ab و cd باشد، هرگاه k به سمت صفر میل کند، وضع حدی نقطه P چه خواهد بود؟

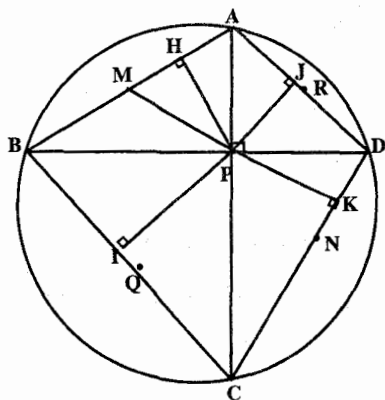
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۴.۳.۲. نقطه‌های همخط

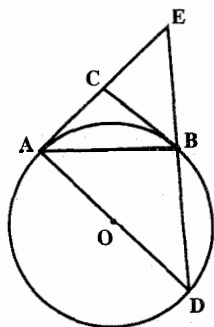
۶۶. سه نقطه A ، B و C به ترتیب، روی دایره به مرکز O طوری قرار دارند که $\widehat{AB} = \widehat{BC}$ می‌باشد. از نقطه C وتر CD را موازی شعاع OB رسم می‌کنیم. ثابت کنید که سه نقطه A ، O و D روی یک خط راست واقعند.



۶۷. در دایره O دو وتر AC و BD را عمود بر هم رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند. وسطهای وترهای AB ، BC ، CD و DA را به ترتیب، M ، N ، Q ، R و تصویرهای نقطه P روی این وترها را به ترتیب، H ، I ، K ، J می‌نامیم. ثابت کنید، سه نقطه M ، P و K بر یک استقامتند. سه دسته نقطه دیگر نظیر این نقطه‌ها را مشخص سازید.



۶۸. بر دایره داده شده از نقطه C ، دو مماس CA و CB را رسم می‌کنیم و قطر AD را در نظر گرفته و AC را به اندازه CE مساوی با خودش امتداد می‌دهیم. ثابت کنید که، نقطه‌های D ، B و E بر یک خط راست واقعند.



۵.۳.۲. تعداد دایره‌های گذرنده بر نقطه‌ها

۶۹. کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(الف) بر هر نقطه صفحه، بی نهایت دایره می‌گذرد.

(ب) بر دو نقطه صفحه، بی نهایت دایره می‌گذرد.

(ج) بر دو نقطه صفحه، یک و فقط یک دایره می‌گذرد.

(د) بر هر سه نقطه صفحه، غیر واقع بر یک خط راست، یک و فقط یک دایره می‌گذرد.

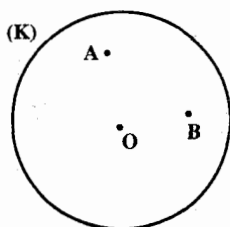
(هـ) بر سه نقطه صفحه واقع بر یک خط راست، هیچ دایره‌ای نمی‌گذرد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۷۰. A و B را دو نقطه در درون دایره K فرض کنید. ثابت کنید که بی نهایت دایره وجود دارد

که از A و B بگذرند و در درون دایره K باشند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۸

۷۱. $2n+3$ نقطه روی صفحه قرار دارند؛ هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط راست و هیچ چهار

نقطه‌ای بر محیط یک دایره واقع نیستند. آیا دایره‌ای وجود دارد که از سه نقطه از این

نقطه‌ها بگذرد و درست نیمی از بقیه نقطه‌ها را در درون خود جا دهد؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چین، ۱۹۶۳

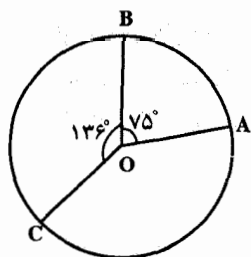
۴.۲. کمان

۱.۴.۲. اندازه کمان

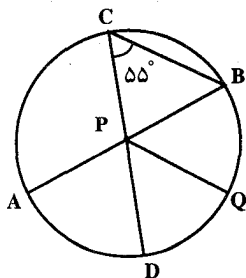
۷۲. سه نقطه A، B و C بر یک دایره به مرکز O چنان قرار دارند

که $\angle AOB = 75^\circ$ و $\angle BOC = 136^\circ$ و دو زاویه در دو طرف

OB هستند. اندازه کمان AC را تعیین کنید.



بخش ۲ / یک دایره □ ۴۵

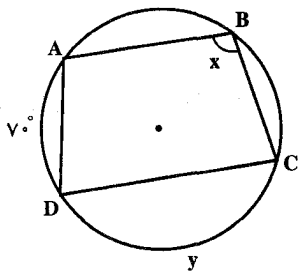


۷۳. P مرکز این دایره است و $CB \parallel PQ$. اگر $\angle BCP = 55^\circ$ ، اندازه کمانهای $\widehat{BQ}$ و $\widehat{AD}$ چه قدر است؟

۷۴. دو وتر عمود بر هم از دایره $C(O, R)$ بر دایره، چهار کمان پدید آورده اند، اگر اندازه های دو کمان از چهار کمان مزبور 40° و 60° باشند، اندازه های دو کمان دیگر را تعیین کنید.

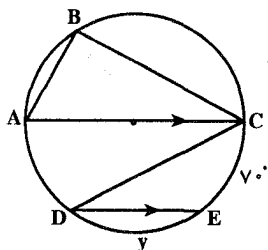
۷۵. اندازه کمانهای خواسته شده در هر شکل را تعیین کنید.

الف) اگر $x = 100^\circ$ باشد، y را بیابید.



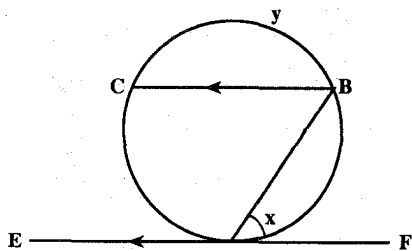
(الف)

ب) $DE \parallel AC$ است. اندازه y را بیابید.



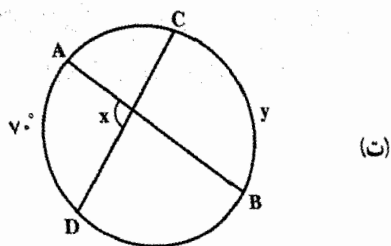
(ب)

پ) اگر $x = 70^\circ$ باشد، y را بیابید.

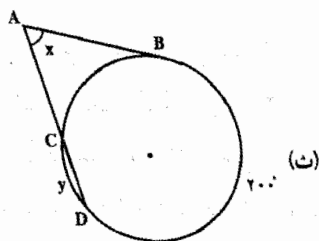


(پ)

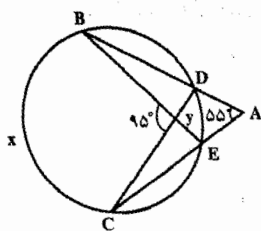
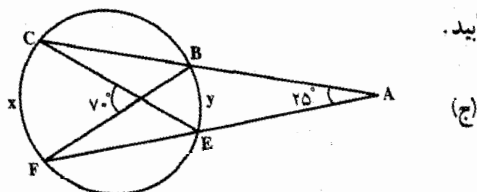
(ت) اگر $x = 95^\circ$ باشد، y را بیابید.



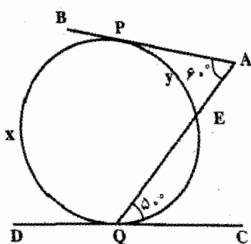
(ث) اگر $x = 67^\circ$ باشد، y را بیابید.



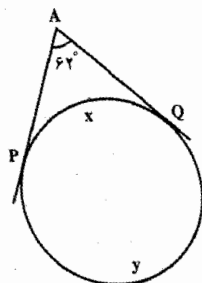
(ج، ج، ح و خ) x و y را بیابید.



(خ)



(ح)



(ج)

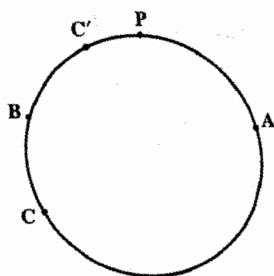
۲.۴.۲. رابطه بین کمانها

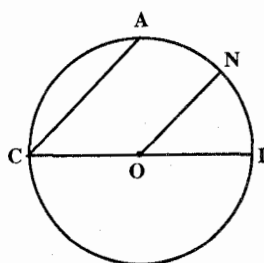
۷۶. روی محیط دایره ای، کمان $\widehat{AB}$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم P وسط کمان $\widehat{AB}$ باشد. اگر C ، نقطه ای خارج کمان $\widehat{AB}$ و روی محیط دایره باشد، ثابت کنید:

$$\widehat{CP} = \frac{\widehat{CA} + \widehat{CB}}{2}$$

اگر C' ، بین A و B اختیار شود،

رابطه بالا به چه صورت درمی آید؟





۷۷. در دایره به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \parallel ON$. ثابت کنید، $\widehat{AN} = \widehat{NI}$.

۳.۴.۲. تعداد کمانها

۷۸. مثلثهایی را در نظر می‌گیریم که دو به دو، نابرابر و رأسهای آنها در نقطه‌هایی از محیط دایره باشند که آن را به n کمان برابر تقسیم کرده‌اند ($n > 2$). به ازای چه مقداری از n، درست نیمی از این مثلثها متساوی الساقینند؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۹

۷۹. به ازای چه مقدارهایی از k، می‌توان ۱۰۰ کمان روی محیط دایره قرار داد، به نحوی که، هر کمان، درست به وسیله k کمان دیگر قطع شده باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۹

۸۰. روی محیط دایره‌ای به شعاع یک متر، نقطه دلخواه A_i را انتخاب و در جهت مثبت دایره مثلثاتی، نقطه‌های $A_1, A_2, A_3, \dots$ را طوری انتخاب می‌کنیم که متر $\widehat{AA_1} = 1$ ، متر $\widehat{A_1A_2} = \frac{1}{2}$ ، ...، متر $A_{n-1}A_n = \frac{1}{n}$ و ... (تعداد نقطه‌ها نامتناهی است).

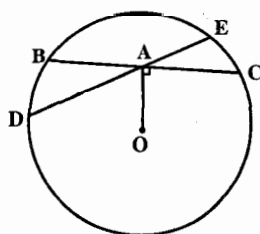
(الف) نشان دهید، هیچ دو نقطه A_i و A_j ($i \neq j$) بر هم منطبق نیستند.

(ب) نشان دهید، اقلاً یک کمان یک میلیمتری بر روی این دایره وجود دارد که تعداد نقطه‌های A_i واقع بر آن بی‌نهایت است.

مرحله اول هفتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۸

۵.۲. وتر

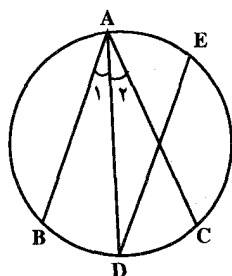
۱.۵.۲. اندازه وتر



۸۱. نقطه A، داخل دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. ثابت کنید، طول وتري که از نقطه A گذشته و بر OA عمود باشد، کوچکتر از طول هر وتر دیگری است که از نقطه A می‌گذرد.

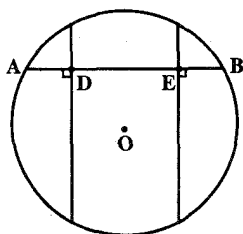
۸۲. نقطه X درون دایره‌ای به مرکز O قرار دارد. نقطه Y را روی قطری که از X می‌گذرد، طوری انتخاب می‌کنیم که نقطه O وسط دو نقطه X و Y باشد. می‌خواهیم از نقطه Y ، وتر AB را چنان بگذرانیم که زاویه AXB ، حداقل مقدار ممکن باشد.

المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴



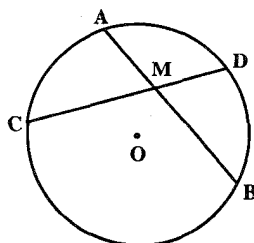
۲.۵.۲. برابری وترها

۸۳. زاویه BAC در یک دایره محاط است. نیمساز این زاویه، دایره را در نقطه D قطع می‌کند. ثابت کنید، وتر DE که به موازات AB رسم شود با وتر AC مساوی است.



۸۴. روی وتر AB دو نقطه D و E را چنان اختیار می‌کنیم که $AD = BE$ باشد. ثابت کنید، دو وتر DE که در نقطه‌های D و E عمود بر AB رسم می‌شوند، با هم برابرند.

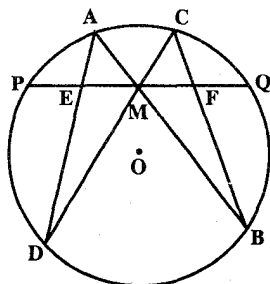
۸۵. در یک دایره، دو زاویه یکی محاطی و دیگری مرکزی، هر کدام برابر $12^\circ = \text{زاویه قائمه} \times \frac{4}{3}$ می‌باشند. ثابت کنید، که وترهای نظیر این دو زاویه برابرند.



۳.۵.۲. برابری قطعه‌های وترها

۸۶. هرگاه دو وتر متساوی در یک دایره، یکدیگر را در نقطه M قطع کنند، قطعه‌هایی که به وسیله M روی آنها جدا می‌شود، دو به دو متساوی‌اند.

۸۷. قضیه پروانه. در دایره مفروض، از نقطه M وسط وتر PQ دو وتر AB و CD را رسم می‌کنیم. وترهای AD و BC با وتر PQ ، بترتیب در E و F برخورد می‌کنند. ثابت کنید که، نقطه M وسط پاره خط EF است.

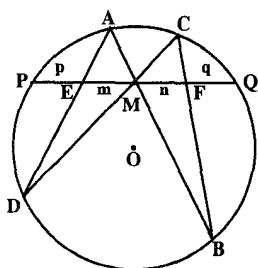


نکته. یکی از مسأله‌های مهم و جالب هندسه اقلیدسی، مسأله‌ای است که نام پروانه بر روی آن گذاشته‌اند. این که چه کسی این نام را بر این مسأله گذاشته است، به درستی روشن نیست. اما این نامگذاری برای اولین بار، در مجله

ریاضی American Mathematical Monthly در فوریه سال ۱۹۴۴ ظاهر شد و بتدریج مقبولیت عامه پیدا کرد. برای این مسأله تاکنون راه‌حلهای مختلفی توسط ریاضیدانان با استفاده از نسبتهای متقاطع، قضیه منولائوس، قضیه دزارگ، هندسه تحلیلی، مثلثات، هندسه اقلیدسی پیشرفته و روشهای دیگر ارائه گردیده است که برخی ساده و برخی مشکل می‌باشند، اما به نظر راجر جانسون Roger Johnson مؤلف کتاب هندسه مدرن Modern geometry، اثبات این قضیه ساده به طور شگفت‌انگیزی مشکل است.

۸۸. در پاورقی کتاب هندسه جدید راجر جانسون گفتار جالبی درباره حالت کلی تر مسأله پروانه توسط ا. کندی Arthur Candy آمده است که در سالنامه ریاضی Annals Mathematics

چاپ ۱۸۹۶ نیز همین قضیه به صورت زیر عنوان گردیده است:

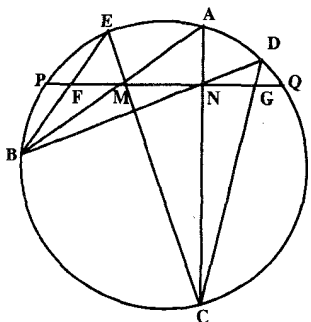


قضیه. اگر نقطه M را روی وتر PQ در یک دایره چنان اختیار کنیم که $MP = p$ و $MQ = q$ باشد و وترهای AB و CD گذرنده از M را رسم کنیم و نقطه‌های برخورد AD و BC با وتر PQ را E و F بنامیم و پاره‌خطهای $ME = m$ و $MF = n$ فرض شوند، داریم:

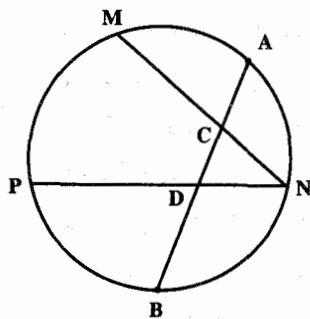
$$mn(p - q) = pq(m - n) \quad (۱) \quad \text{یا} \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \quad \text{یا} \quad \frac{pq}{mn} = \frac{p - q}{m - n}$$

قضیه پروانه، حالت بسیار ساده‌ای از این قضیه کلی و زیباست که اگر نقطه M وسط پاره‌خط PQ اختیار شود، $p = q$ و در نتیجه از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که $pq(m - n) = 0$ و چون $pq \neq 0$ است پس $m = n$ ، یعنی $ME = MF$ می‌باشد.

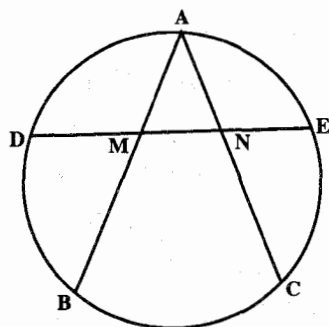
قضیه پروانه در حال حاضر، برای هر مقطع مخروطی تعمیم یافته است و مسأله‌ای نیز به نام «پروانه سه بال» در ماه مارس ۱۹۸۴ توسط ار. اس. لوتار R.S.Luthar در مجله Mathematics Magazin عنوان شده است.



مسأله پروانه سه بال. وتر PQ در دایره‌ای مفروض است. اگر نقطه‌های M و N پاره‌خط PQ را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند و A نقطه دلخواهی از محیط این دایره، غیر از نقاط P و Q باشد و نقطه‌های برخورد AM و AN با دایره را B و C و نقطه‌های برخورد BN و CM با دایره را D و E و نقطه‌های برخورد EB و DC با وتر PQ را F و G بنامیم، ثابت کنید: $PF = QG$.



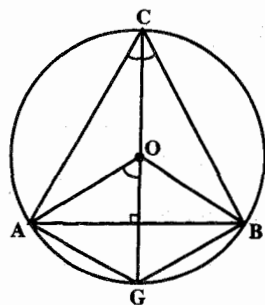
۸۹. بر دایره ای سه نقطه M, N, P را اختیار می کنیم و از A وسط کمان $\widehat{MN}$ به B وسط کمان $\widehat{NP}$ وصل می کنیم. این خط وترهای MN و NP را بترتیب در C و D قطع می کند. ثابت کنید که: $NC = ND$.



۹۰. روی یک دایره دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ هر کدام مساوی 120° می باشند. ثابت کنید، وتر DE که وسطهای این دو کمان را به هم وصل می کند، به وسیله وترهای AB و AC به سه قسمت برابر تقسیم می شود.

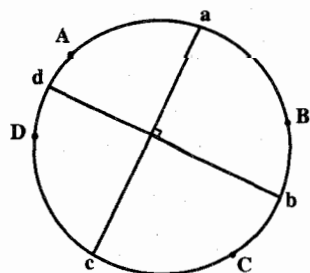
۴.۵.۲. نابرابری و ترها

۹۱. هنگامی که هر یک از زاویه های مساوی در یک



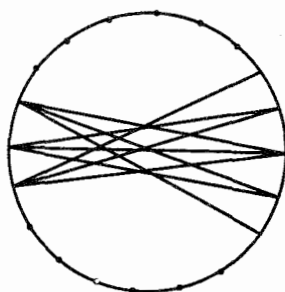
دایره، یکی محاطی و دیگری مرکزی، کمتر از $\frac{4}{3}$ زاویه قائمه باشد، وتر زاویه مرکزی از وتر زاویه محاطی کوچکتر، و از نصف وتر زاویه محاطی بزرگتر است، یعنی در این شکل باید ثابت کنیم $AG < AB$ و $AG > \frac{AB}{2}$ است.

۹۲. در دایره ای به شعاع 5cm ، دو وتر AB و CD بترتیب، به فاصله 2cm و 4cm از مرکز دایره قرار دارند. کدام وتر بزرگتر است؟



۵.۵.۲. ثابت کنید و ترها بر هم عمودند

۹۳. نقطه های A, B, C, D روی یک دایره به همین ترتیب داده شده اند. اگر a, b, c, d بترتیب، وسط کمانهای $\widehat{AB}, \widehat{BC}, \widehat{CD}, \widehat{DA}$ باشند، ثابت کنید، دو وتر ac و bd بر هم عمودند.



۶.۵.۲. تعداد وترها

۹۴. دایره‌ای به 20 کمان برای بخش می‌شود. هر یک از نقطه‌های به دست آمده به هر یک از نقطه‌های دیگر به غیر از هشت نقطه نزدیکتر به آن وصل می‌شود، تعداد همه پاره‌خطهایی که به این ترتیب رسم می‌شوند، برابر است با:

الف) 30 ب) 110 ج) 220 د) 300

المیادای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۹۵. 10 نقطه روی محیط دایره انتخاب کرده‌ایم. حداکثر چند پاره خط راست، که دو انتهای هر یک از آنها در این نقطه‌ها باشند، می‌توان رسم کرد، به نحوی که هیچ سه پاره خط راستی تشکیل یک مثلث، به رأسهایی در این نقطه‌ها، ندهند؟

المیادای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۷.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۶. P یک نقطه داخلی دایره K و متمایز از مرکز آن است. همه وترهای K را که بر P می‌گذرند، در نظر بگیرید. مکان هندسی نقطه‌های وسط این وترها عبارت است از:

الف. دایره‌ای به غیر از یک نقطه آن.

ب. یک دایره به شرط آن که فاصله P تا مرکز دایره، کوچکتر از نصف شعاع دایره K باشد؛ در غیر آن صورت کمائی کوچکتر از 36° از یک دایره.

ج. یک نیمدایره به غیر از یک نقطه آن.

د. یک نیمدایره.

ه. یک دایره.

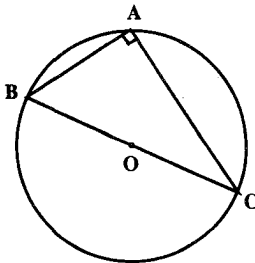
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۵

۹۷. $4n$ نقطه روی محیط دایره‌ای انتخاب و آنها را، یک در میان، به رنگهای قرمز و آبی درآورده‌ایم. نقطه‌های هر رنگ را به زوجهایی تقسیم و نقطه‌های هر زوج را با پاره‌خطهای راستی از همان رنگ، به هم وصل کرده‌ایم (در ضمن، هیچ سه پاره خط راستی، در یک نقطه به هم نرسیده‌اند). ثابت کنید، دست کم، n نقطه برخورد پاره‌خطهای راست قرمز با پاره‌خطهای راست آبی پیدا می‌شود.

المیادای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۴

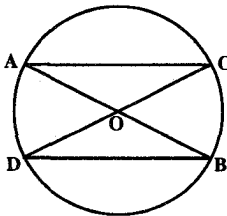
۹۸. مکان هندسی نقطه‌های وسط وترهایی از یک دایره مفروض که از نقطه ثابتی می‌گذرند، در صورتی که این نقطه ثابت، درون یا روی دایره باشد، یک دایره است.

۹۹. مکان هندسی نقطه‌های وسط همه وترهایی از یک دایره مفروض که طول مفروضی داشته باشند، دایره‌ای هم مرکز با دایره مفروض است.



۶.۲ قطر

۱۰۰. اگر از نقطه دلخواه A، واقع بر دایره‌ای دو وتر AB و AC را عمود بر یکدیگر رسم کنیم، قطعه خط BC که دو انتهای غیرمشترک آنها را به هم وصل می‌کند، یکی از قطرهای دایره است.



۱۰۱. در دایره‌ای به مرکز O از نقطه‌های A و B، دو سر قطر AB، دو وتر متوازی AC و BD را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، CD قطر دایره است.

۱۰۲. $3k$ نقطه، روی محیط دایره‌ای قرار داده‌ایم؛ از $3k$ کمائی که به دست می‌آید، k کمان به طول ۱، k کمان به طول ۲ و k کمان باقیمانده به طول ۳ هستند. ثابت کنید، بین این نقطه‌ها دو نقطه وجود دارد که در دو انتهای یک قطردند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۲

۱۰۳. ثابت کنید، وسط وترهای متوازی در یک دایره، روی قطری که بر وترها عمود است، قرار دارند.

۱۰۴. سطح دایره‌ای را به ۴۹ بخش، چنان تقسیم کرده‌ایم که هیچ سه بخشی، نقطه مشترک نداشته باشند. «نقشه» حاصل را با سه رنگ مختلف طوری رنگ کرده‌ایم که هر دو بخش مجاور، رنگهای متفاوت داشته باشند. مرز دو بخش را، با هر دو رنگ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، روی محیط دایره می‌توان دو نقطه پیدا کرد که دو سطر یک قطر و در ضمن به یک رنگ باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

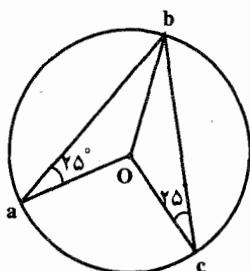
۱۰۵. تصویر یک شکل مسطحه، بر هر خط راستی که در صفحه شکل واقع باشد، از واحد تجاوز نمی‌کند. آیا درست است که این شکل را می‌توان در دایره‌ای به قطر a : ۱ : (b) $1/5$ جا داد؟

۱۰۶. اگر در یک دایره، دو وتر متساوی در یک سر مشترک باشند، قطری که از سر مشترکشان می‌گذرد، زاویه بین آنها را نصف می‌کند.

۷.۲. زاویه

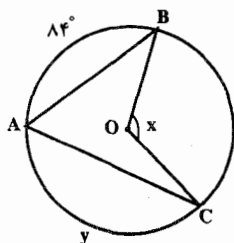
۱.۷.۲. زاویه مرکزی

۱۰۷. در شکل روبه‌رو، هر یک از دو زاویه $\angle Ocb$ و $\angle Oab$ به اندازه 25° و O مرکز دایره است. اندازه زاویه $\angle aOc$ چند درجه است؟



- (الف) 110° (ب) 130° (ج) 115°
(د) 95° (هـ) 100°

المیادای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴



۱۰۸. (الف) اگر $y = 140^\circ$ ، آن گاه $x = ?$

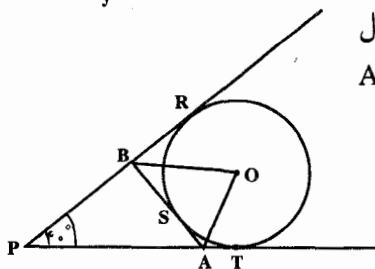
(ب) اگر $x = 165^\circ$ ، آن گاه $y = ?$

۱۰۹. با رسم سه مماس بر دایره O ، مثلث PAB تشکیل

می‌شود. اگر $\angle APB = 40^\circ$ ، آن گاه زاویه $\angle AOB$

برابر است با:

- (الف) 45° (ب) 50° (ج) 55°
(د) 60° (هـ) 70°



مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۶

۱۱۰. دایره‌ای به مرکز O و مماسهای AP و AQ که در نقطه‌های P و Q بر دایره مماسند، داده

شده‌اند. اگر M نقطه‌ای متحرک از قوس بزرگتر

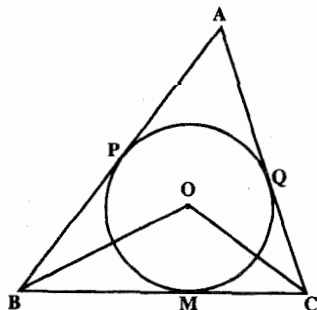
$\widehat{PQ}$ باشد (قوسی که تقعرش به طرف نقطه A است)

و در این نقطه مماسی بر دایره رسم کنیم تا مماسهای

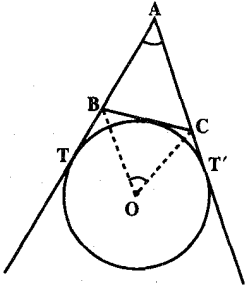
AP و AQ را در نقطه‌های B و C قطع کند، ثابت

کنید که با تغییر نقطه M ، اندازه $AB + AC - BC$

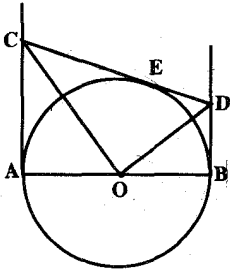
و اندازه زاویه $\angle BOC$ تغییر نمی‌کند (ثابت می‌ماند).



۱۱۱. قطعه‌ای از یک مماس متحرک که مابین دو مماس ثابت یک دایره محصور باشد، از مرکز آن دایره به زاویه ثابتی دیده می‌شود (حالت‌های مختلف شکل). حالت خاصی را که در آن مماس‌های ثابت متوازی‌اند، مطالعه کنید.

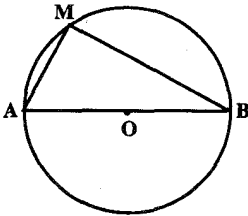


۱۱۲. دایره (O) و قطر AB از آن داده شده است. از نقطه‌های A و B دو خط مماس بر دایره رسم و مماس دیگری نیز بر دایره رسم می‌کنیم تا دو مماس اول را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید: زاویه COD قائمه است.

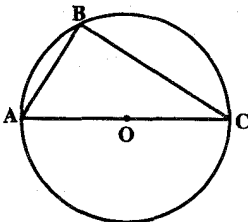


۲.۷.۲. زاویه محاطی

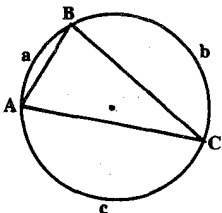
۱۱۳. نقطه M از یک دایره را به دو سر قطر AB از آن دایره وصل می‌کنیم. ثابت کنید که زاویه AMB مساوی یک قائمه است.

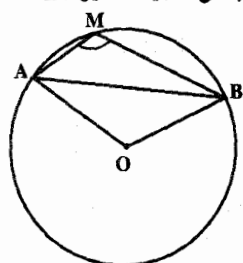


۱۱۴. در یک دایره، قطر AC و وتر AB مساوی باشند. دایره را رسم می‌کنیم. اندازه زاویه‌های مثلث ABC را به دست آورید.

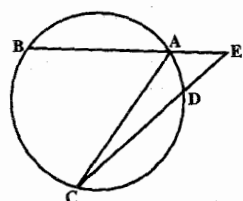


۱۱۵. روی یک دایره و در یک جهت دوران، کمان‌های $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $\widehat{BC} = 120^\circ$ را اختیار می‌کنیم. زاویه‌های مثلث ABC را حساب کنید.





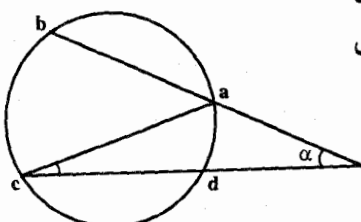
۱۱۶. نقطه O مرکز دایره و نقطه M واقع بر محیط آن را به دو سر وتر AB از این دایره وصل می‌کنیم. در صورتی که دو زاویه AOB و AMB متساوی باشند، اندازه هر یک از این دو زاویه را تعیین کنید.



۱۱۷. در شکل $\hat{E} = 40^\circ$ و کمانهای $\widehat{AB}$ ، $\widehat{BC}$ و $\widehat{CD}$ دارای طولهای برابرند. اندازه $\hat{ACD}$ را به دست آورید.

- الف) 10° ب) 15° ج) 20°
د) $\frac{45^\circ}{2}$ ه) 30°

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

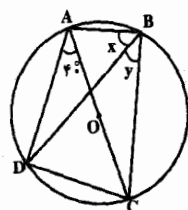


۱۱۸. مطابق شکل، چهار نقطه a, b, c و d بر یک دایره واقعند و کمانهای $\widehat{ab}$ و $\widehat{bc}$ و $\widehat{cd}$ اندازه‌های برابر دارند. اندازه زاویه $\hat{acd}$ برابر است با:

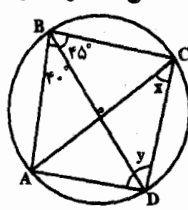
- الف) $45^\circ - \frac{3\alpha}{4}$ ب) $\frac{2}{3}\alpha$
ج) $90^\circ - 2\alpha$ د) $45^\circ - \frac{\alpha}{4}$

المیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۱۱۹. با توجه به شکل، اندازه x و y را بیابید.



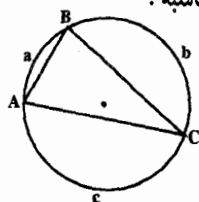
(ب)



(الف)

۱۲۰. مثلث ABC در دایره‌ای محاط است.

اگر $\widehat{AB} = a$ و $\widehat{BC} = b$ و $\widehat{AC} = c$ باشد، مطلوب است محاسبه:



الف. اندازه زاویه A، اگر $a = 110^\circ$ و $c = 200^\circ$

ب. اندازه زاویه A، اگر $AB \perp BC$ و $a = 102^\circ$

پ. اندازه زاویه A، اگر AC قطر دایره و $a = 80^\circ$

ت. اندازه زاویه A، اگر $a:b:c = 3:1:2$

ث. اندازه زاویه A ، اگر AC قطر و $a:b=5:4$

ج. اندازه زاویه B ، اگر $\widehat{ABC}=20^\circ$

ج. اندازه زاویه B ، اگر $a+b=3c$

ح. اندازه زاویه B ، اگر $a=75^\circ$ و $c=2b$

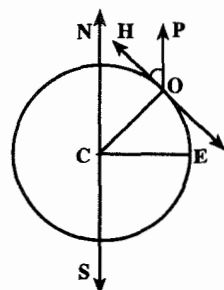
خ. اندازه زاویه C ، اگر $AB \perp BC$ و $a=5b$

د. اندازه زاویه C ، اگر $\hat{A}:\hat{B}:\hat{C}=5:4:3$

۱۲۱. $n \geq 3$ نقطه دلخواه $A_1, A_2, \dots, A_n$ را روی صفحه‌ای در نظر می‌گیریم، به نحوی که هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط راست نباشند. زاویه $A_1 A_j A_k$ را که به وسیله سه نقطه مختلف A_1, A_j, A_k به وجود می‌آید، α می‌نامیم. برای هر مقدار n ، حداکثر مقدار α را پیدا کنید. نقطه‌ها چگونه بر صفحه واقع باشند تا به این مقدار برسیم؟
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۴

۳.۷.۲. زاویه ظلی

۱۲۲. یکی از اولین حقایقی که در درس اخترشناسی فرا می‌گیرند این است که عرض جغرافیایی یک محل روی زمین برابر است با زاویه‌ای که ستاره قطبی با افق آن محل می‌سازد. درستی این مطلب را با اثبات قضیه زیر نشان دهید. وضعیت فیزیکی با علائم زیر نشان داده شده است:

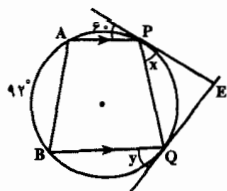


$\overline{NS}$ محور زمین، دایره‌ای که در شکل می‌بینید یک نصف النهار، C مرکز زمین، E نقطه‌ای از استوا، O ناظر، $\overline{OH}$ افق و $\widehat{POH}$ ارتفاع ستاره قطبی است.

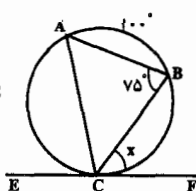
فرض: در دایره‌ای به مرکز C ، $CE \perp NS$ ، O در OH مماس است. $OP \parallel NS$.

حکم: $m\widehat{OH} = m\widehat{POH}$

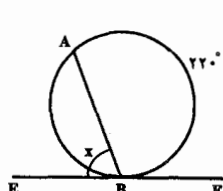
۱۲۳. اندازه زاویه‌های ظلی خواسته شده در هر شکل را بیابید.



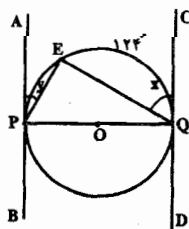
(ت)



(ب)

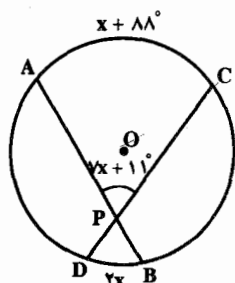


(ب)



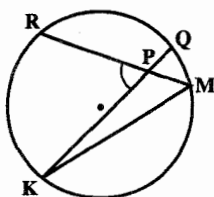
(الف)

۴.۷.۲. زاویه درونی (زاویه بین دو وتر)

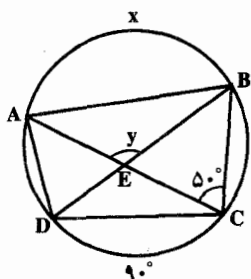


۱۲۴. دو وتر AB و CD از دایره O در نقطه ای مانند P درون دایره متقاطعند به قسمی که $\hat{P} = (7x + 11)^\circ$ و کمانهای مقابل به آن از دایره بترتیب، به اندازه های $(2x)^\circ$ و $(x + 88)^\circ$ می باشند. اندازه زاویه P را تعیین کنید.

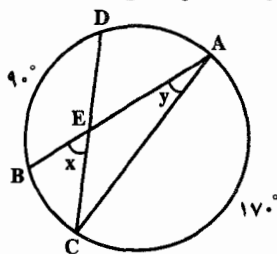
۱۲۵. در این شکل، اگر $MR = MK$ ، $\widehat{MK} = 14^\circ$ و $\widehat{MQ} = 26^\circ$ ، زاویه $\widehat{RPK}$ چه قدر است؟



۱۲۶. با توجه به هر شکل، اندازه x و y را بیابید.



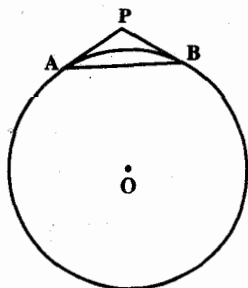
(ب)



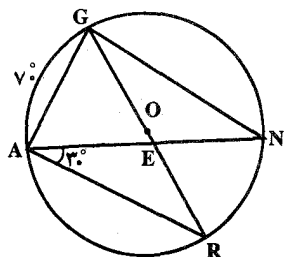
(الف)

۵.۷.۲. زاویه برونی (زاویه بین امتداد دو وتر یا دو مماس یا

یک وتر و یک مماس)

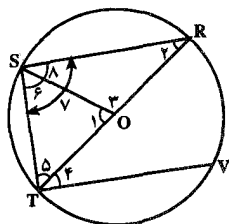


۱۲۷. کمان $\widehat{AB} = 60^\circ$ را بر دایره O اختیار کرده، در نقطه های A و B، دو مماس بر دایره رسم می کنیم تا یکدیگر را در نقطه P قطع کنند. اندازه زاویه های مثلث PAB را تعیین کنید.



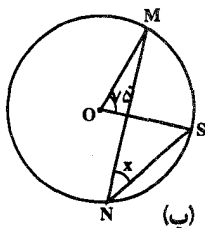
۱۳۲. در دایره به مرکز O ، GR قطر دایره است، $\widehat{AG} = 70^\circ$ و $\widehat{NAR} = 30^\circ$. اندازه‌های زیر را به دست آورید و در جای مناسب روی شکل، یادداشت کنید:

الف. $\widehat{N}$ ب. $\widehat{R}$ پ. $\widehat{NR}$
ت. $\widehat{GN}$ ث. $\widehat{GAN}$ ج. $\widehat{GAR}$

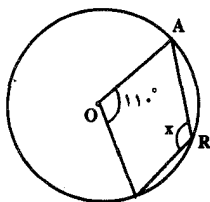


۱۳۳. در دایره به مرکز O ، $RS \parallel VT$ ، $\widehat{RTS} = 70^\circ$ و RT قطر دایره است. اندازه زاویه‌های ۱ تا ۸ را به دست آورید.

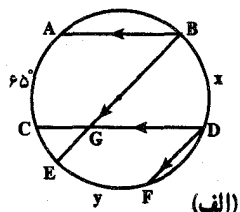
۱۳۴. اندازه x و y را در هر یک از شکلهای زیر تعیین کنید:



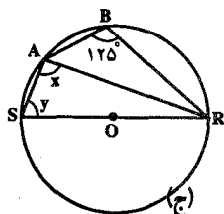
(پ)



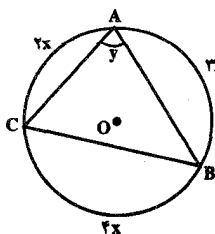
(ب)



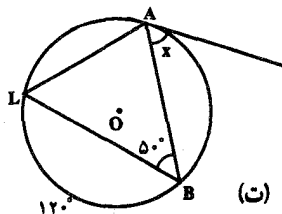
(الف)



(ج)

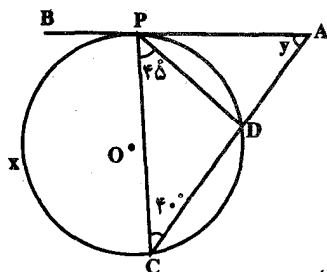


(ث)

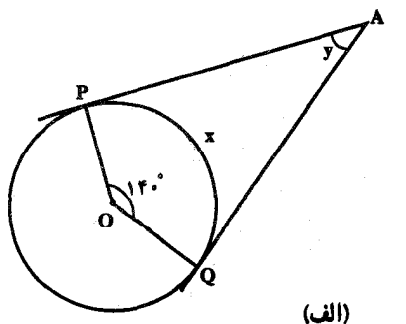


(ت)

۱۳۵. اندازه x و y را در هر شکل تعیین کنید.

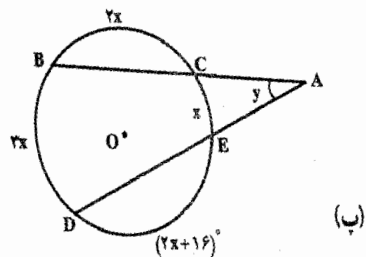
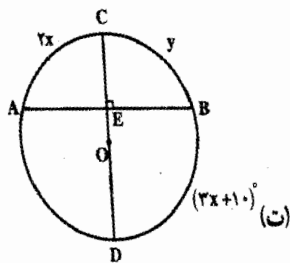


(ب)

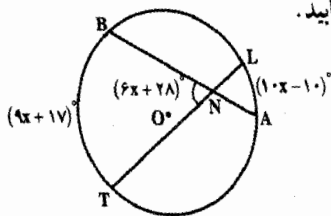


(الف)

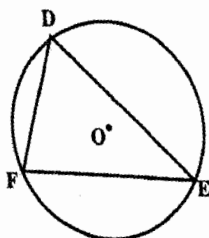
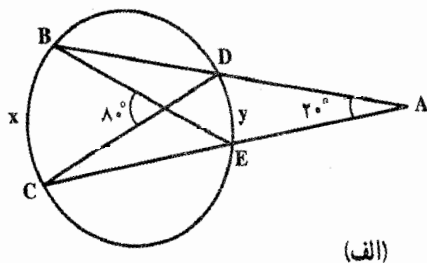
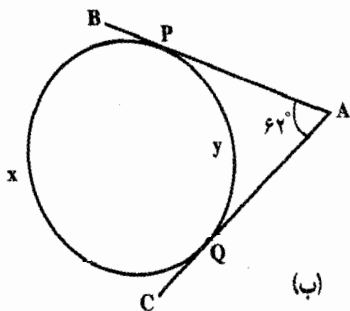
۶۰ □ دایره المعارف هندسه / ج ۲



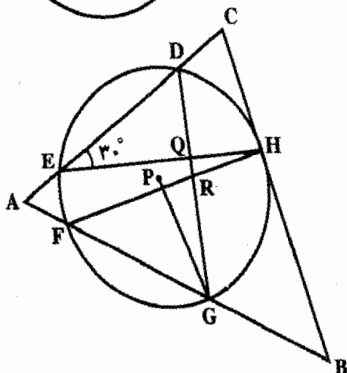
۱۳۶. در شکل اندازه x و اندازه زاویه BNT را بیابید.



۱۳۷. در هر کدام از شکلهای زیر x و y را بیابید.



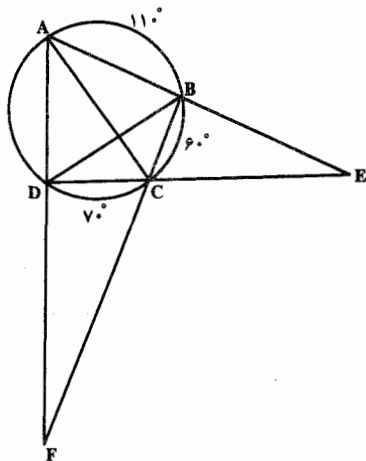
۱۳۸. با استفاده از تعریف زاویه محاطی، نشان دهید: مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° است.



۱۳۹. در شکل، P مرکز دایره است. CB در

H مماس بر دایره است. $ED = FG$

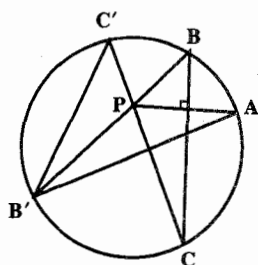
اندازه تمام $\widehat{DEH} = 30^\circ$ و $\widehat{ED} = 96^\circ$ زاویه ها و کمانهای شکل را بیابید.



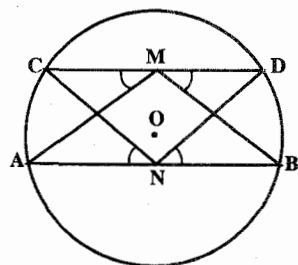
۱۴۰. روی محیط دایره‌ای در یک جهت، قوسهای $\widehat{AB} = 110^\circ$ و $\widehat{BC} = 60^\circ$ و $\widehat{CD} = 70^\circ$ را جدا می‌کنیم. زاویه‌های چهارضلعی ABCD و زاویه بین دو قطر و زاویه‌هایی را که ضلعهای روبه‌رو با هم می‌سازند، محاسبه کنید.

۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها

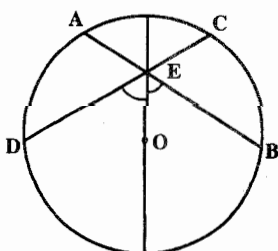
۱.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها (برابریها)



۱۴۱. نقطه A روی دایره O و نقطه P، داخل آن داده شده است. وتر BC را عمود بر PA و گذرنده از وسط PA رسم می‌کنیم. خط PB، دایره را در B' و خط PC، دایره را در C' قطع می‌کند. ثابت کنید: $\widehat{BB'C'} = \widehat{BB'A}$.

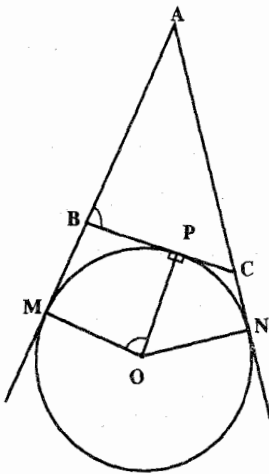


۱۴۲. دو وتر AB و CD در دایره O مفروضند. اگر خطهایی که نقطه‌های A و B را به نقطه M وسط وتر CD وصل می‌کنند، با آن، زاویه‌های مساوی بسازند، ثابت کنید، خطهایی که نقطه‌های C و D را به وسط AB وصل می‌کنند، با آن، زاویه‌های مساوی می‌سازند.

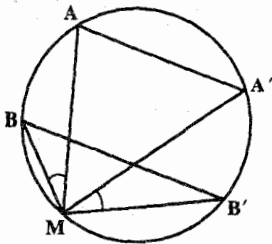


۱۴۳. در یک دایره، دو وتر متقاطع متساوی، با قطری که از نقطه تقاطعشان می‌گذرد، زاویه‌های متساوی می‌سازند.

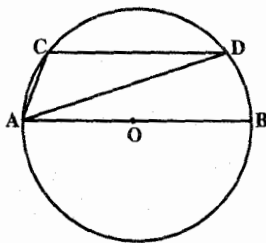
۱۴۴. دایره O در نقطه‌های M و N، با ضلعهای زاویه A مماس است. خطی رسم می‌کنیم که از نقطه A در دایره در نقطه‌ای مانند P مماس بوده و ضلعهای زاویه A را در نقطه‌های B و C قطع



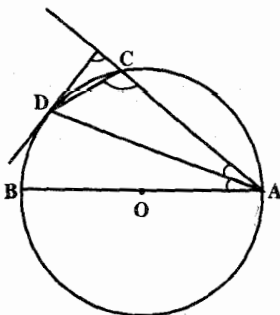
نمایند، به طوری که A و O در طرفین این خط واقع شوند. ثابت کنید که، زاویه دو شعاع که از دو نقطه تماس متوالی (P, M) یا (N, P) می گذرند، با یکی از زاویه های B یا C از مثلث ABC برابر است. اگر نقطه های A و O در یک طرف خط مماس در نقطه P واقع باشند، مسأله به چه صورتی درمی آید؟



۱۴۵. دو وتر متوازی و هم جهت AA' و BB' و نقطه دلخواه M واقع بر روی محیط دایره ای مفروضند. ثابت کنید که، زاویه های AMB و $A'MB'$ یا متساوی اند و یا مکمل یکدیگرند.

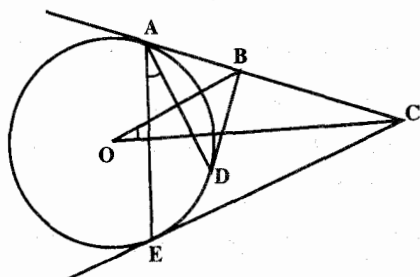


۱۴۶. قطر AB از دایره O رسم شده است. وتر CD، موازی قطر AB است. ثابت کنید، در مثلث ACD تفاضل دو زاویه 90° است.

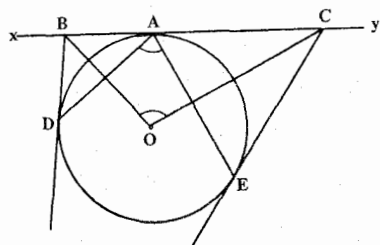


۱۴۷. دایره O و قطر AB و وتر AC داده شده اند. AD نیمساز زاویه CAB را رسم می کنیم. ثابت کنید که، تفاضل دو زاویه C و A از مثلث ACD یک قائمه و مماس در نقطه D بر دایره، ارتفاع مثلث ACD است.

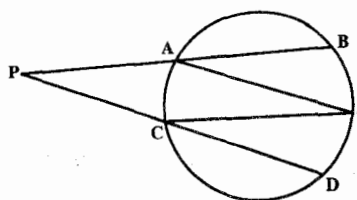
بخش ۲ / یک دایره $\square$ ۶۳



۱۴۸. روی مماس در نقطه A بر دایره (O)، دو نقطه B و C را اختیار کرده، از آن نقطه ها دو مماس BD و CE را بر دایره رسم می کنیم. ثابت کنید، زاویه های BOC و DAE متساوی یا مکمل یکدیگرند.

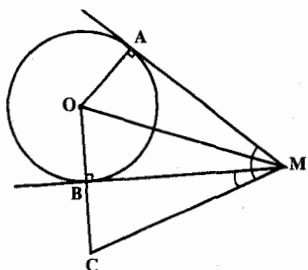


۱۴۹. خط xy در نقطه A بر دایره O مماس است. از نقطه های B و C در طرفین A واقع بر xy دو مماس BD و CE را بر دایره رسم می کنیم. ثابت کنید، $\hat{COB}$ و $\hat{EAD}$ مکمل یکدیگرند.

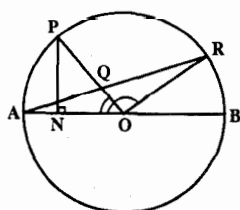


۱۵۰. در شکل روبه رو، نقطه های A، B، Q، D، C روی یک دایره و نقطه P خارج دایره قرار دارند و اندازه کمانهای $\widehat{BQ}$ و $\widehat{QD}$ بترتیب، 42° و 38° است. مجموع اندازه های زاویه های P و Q برابر است با:

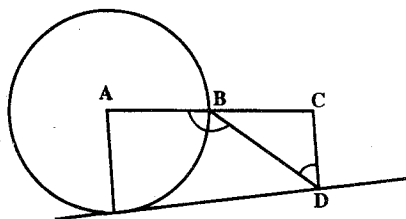
الف) 80° ب) 62° ج) 40° د) 46° ه) هیچ یک از اینها



مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۱
۱۵۱. از نقطه M دو مماس MA و MB را بر دایره (O) رسم کرده ایم. سپس شعاع OB را از طرف B به اندازه $BC = R$ امتداد داده ایم. ثابت کنید: $\hat{AMC} = 3\hat{BMC}$.



۱۵۲. از نقطه P روی محیط دایره ای به مرکز O عمودی بر قطر AO فرود می آوریم (N پای عمود) و روی PO نقطه Q را چنان اختیار می کنیم که $PQ = 2AN$ باشد. اگر AQ دایره را در نقطه R قطع کند، ثابت کنید، زاویه AOR سه برابر زاویه AOP می باشد.



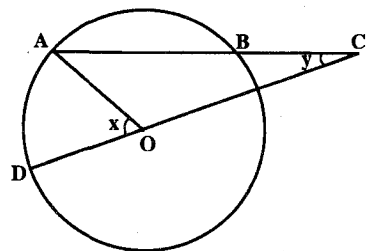
۱۵۳. نقطه B وسط پاره خط AC است؛ دایره (A, AB) را رسم می کنیم و از C، عمود CD را بر یک مماس دلخواه آن دایره رسم می کنیم. نشان دهید که، $\hat{ABD} = 3\hat{BDC}$.

۱۵۴. در دایره O وتر AB را به اندازه BC برابر با شعاع دایره امتداد می دهیم. امتداد CO، دایره را در نقطه D قطع می کند. AO را رسم می کنیم. کدام یک از موردهای زیر رابطه بین دو زاویه x و y را بیان می کند؟

الف) $x = 3y$ ب) $x = 2y$

ج) $x = 60^\circ$ د) رابطه خاصی بین x و y وجود ندارد.

ه) بسته به طول AB، $x = 2y$ یا $x = 3y$



مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۵

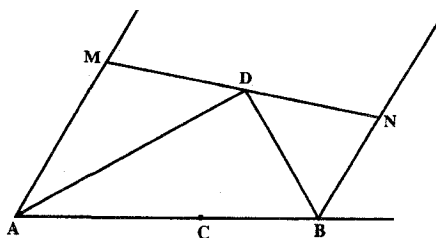
۲.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه ها (نابرابریها)

۱۵۵. A و B، دو نقطه از محیط دایره، C نقطه وسط کمان $\widehat{AB}$ و P نقطه ای از درون دایره است و در ضمن $|AP| < |BP|$. ثابت کنید: $\hat{APC} > \hat{BPC}$.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

۲.۷.۸. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۱۵۶. روی پاره خط AB، نقطه دلخواه C را انتخاب کرده، از A و B دو خط متوازی در یک



طرف AB رسم می نماییم و روی این دو خط متوازی، طولهای $AM = AC$ و $BN = BC$ را جدا می کنیم و پاره خط MN را D می نامیم. ثابت کنید، زاویه ADB قائمه است.

۱۵۷. صفحه را به وسیله $2n$ خط راست ($n > 1$) به بخشهایی تقسیم کرده ایم؛ در ضمن، هیچ دو خط راستی با هم موازی نیستند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نمی گذرند. ثابت کنید، این بخشها، با بیش از $2n - 1$ زاویه به وجود نیامده اند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۲

۱۵۸. بین مثلثهایی که طول قاعدهٔ ثابتی دارند و بر دایرهٔ ثابتی مماسند، کدام مثلث، بزرگترین زاویه (مقابل به این ضلع ثابت) را دارد؟

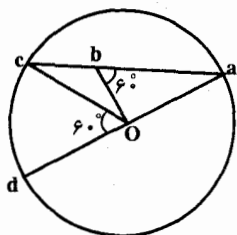
۲. ۸. یارہ خط

۲. ۸. ۱. اندازه باره خط

۱۵۹. در دایره به مرکز O قطر ad، وتر ac و نقطه b بر این وتر چنان انتخاب شده‌اند که هریک از زاویه‌های abO و cOd به اندازه 60° و $[bO] = 5$ است. مقدار $[bc]$ چه قدر است؟

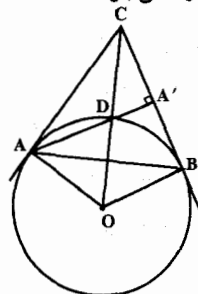
الف) 3 ب) $3 + \sqrt{3}$ ج) $5 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(د) ۵ (هـ) مقداری غیر از اینها

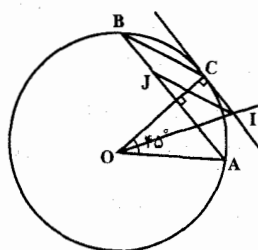


المیادہای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

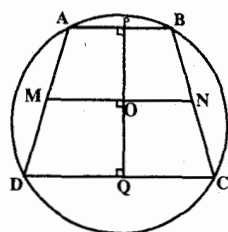
۱۶۰. دایره‌ای به مرکز O و دو نقطه A و B را روی آن در نظر می‌گیریم. در نقطه‌های A و B دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه C قطع کنند و از نقطه A عمودی بر مماس CB فرود می‌آوریم تا OC را در نقطه D قطع کند. ثابت کنید که AD مساوی با شعاع دایره است.



۱۶۱. در دایره O شعاعهای OC و OA باهم زاویه 45° می‌سازند. نیمساز زاویه COA مماس در نقطه C بر دایره را در I قطع می‌کند. اگر وتر AB را عمود بر OC رسم کنیم تا خط IJ موازی BC را در J قطع کند، ثابت کنید، AJ مساوی با شعاع دایره است.



۱۶۲. در دایره‌ای به مرکز O، در دو طرف مرکز دو وتر متوازی رسم می‌کنیم که یکی از آنها $AB = R$ و دیگری $CD = C_3$ است. ثابت کنید، پاره خطی که وسطهای دو ساق دوزنقه $ABCD$ را به هم وصل می‌کند، مساوی با ارتفاع این دوزنقه است.

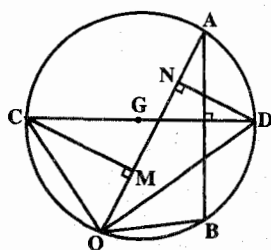


۲. ۸. ۲. رابطه بین پاره خطها

۲. ۸. ۲. ۱. رابطه بین پاره خطها (برابریها)

۱۶۳. قطر A_5A_1 ، دایرة به مرکز O را، به دو نیمدایرة تقسیم کرده است. کمان یکی از این نیمدایرة ها را، به پنج کمان برابر A_1A_2 ، A_2A_3 ، A_3A_4 ، A_4A_5 و A_5A_1 تقسیم کرده ایم. خط راست A_1A_4 ، پاره خطهای OA_2 و OA_3 را در نقطه های M و N قطع کرده است. ثابت کنید، مجموع طولهای دو پاره خط راست A_2A_3 و MN برابر است با شعاع دایرة $OA_2A_3 + MN = R$.

المیادهای ریاضی سراسری شوروی ۱۹۸۵



۱۶۴. در یک دایرة وتر AB عمود بر قطر CD را رسم می کنیم.

سپس نقطه دلخواه O واقع بر دایرة را به انتهای این قطر و وتر وصل می کنیم: OC و OD را روی OA تصویر می کنیم. نشان دهید که مجموع این تصویرها برابر OA است و تفاضل این دو تصویر برابر OB است.

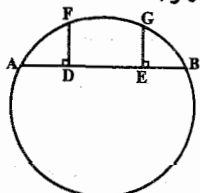
۱۶۵. در دایرة ای، دو وتر AB و AC داده شده اند. از نقطه

M وسط کمان BAC ، عمودی بر وتر با طول بزرگتر فرود آورده ایم. ثابت کنید، پای عمود خط شکسته BAC را نصف می کند.

المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

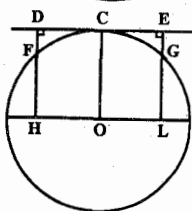
۱۶۶. نقطه هایی روی یک وتر که به یک فاصله از وسط آن وتر در یک دایرة قرار داشته باشند، از محیط دایرة به یک فاصله اند.

۱۶۷. تصویرهای دو سر یک قطر دایرة روی هر وتر دلخواه، از وسط این وتر به یک فاصله اند.



۱۶۸. از دو نقطه D و E که متساوی الفاصله از وسط وتر AB هستند،

دو عمود بر این وتر اخراج می کنیم تا بترتیب دایرة را در F و G قطع کنند. ثابت کنید، $DF = EG$ است.

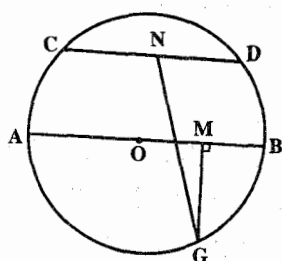


۱۶۹. روی خط مماس بر دایرة (O) در نقطه C و به یک فاصله از این

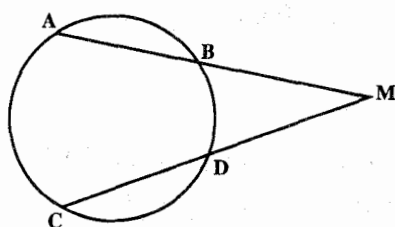
نقطه دو نقطه D و E را اختیار می کنیم و از این دو نقطه

عمودهایی بر خط مماس اخراج می کنیم تا دایرة را بترتیب در نقطه های F و G قطع کنند. ثابت کنید، $DF = EG$ است.

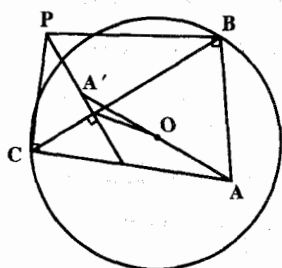
۱۷۰. دو وتر متساوی در یک دایره داده شده‌اند. ثابت کنید، روی همه قاطع‌هایی که به موازات خط واصل بین وسط کمانهای این دو وتر رسم می‌شوند، پاره خط‌هایی مساوی ایجاد می‌شود.



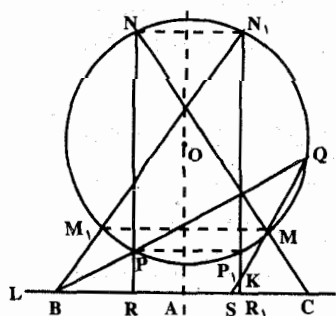
۱۷۱. در دایره O به قطر AB وتر CD را موازی با AB و مساوی با شعاع دایره رسم کرده، از نقطه M وسط پاره خط OB عمودی بر قطر AB اخراج می‌نماییم تا دایره را در نقطه G قطع کند. ثابت کنید، اگر نقطه G را به نقطه N وسط پاره خط CD وصل کنیم، قطر AB پاره خط GN را نصف می‌کند.



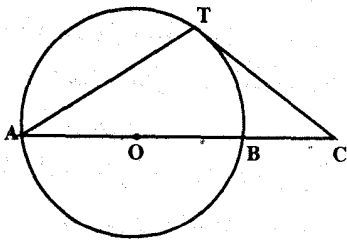
۱۷۲. دو وتر متساوی AB و CD در دایره به مرکز O رسم شده‌اند. امتداد این دو وتر یکدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند. ثابت کنید، دو پاره خطی که یک سر آنها نقطه M و سر دیگر آنها انتهای دو وتر مزبور باشند، برابرند.



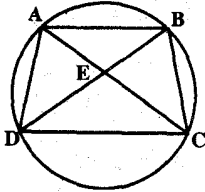
۱۷۳. نقطه اختیاری A را به دو نقطه B و C از دایره ای وصل کرده، از نقطه B عمودی بر BA و از نقطه C عمودی بر CA اخراج می‌کنیم و از نقطه P محل تلاقی این دو عمود خطی بر BC عمود می‌کنیم تا OA را در نقطه A' قطع کند. ثابت کنید: $OA = OA'$.



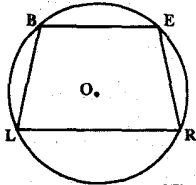
۱۷۴. فرض کنید، A معرف تصویر مرکز دایره‌ای روی خط راست l باشد. دو نقطه B و C روی این خط طوری اختیار می‌شوند که $AB = AC$. دو قاطع دلخواه که دایره را، بترتیب در جفت نقطه‌های P, Q, M و N قطع می‌کنند، از B و C رسم می‌شوند. فرض کنید، خط‌های NP و MQ، خط l را، بترتیب، در نقطه‌های R و S قطع کنند. ثابت کنید: $RA = AS$.



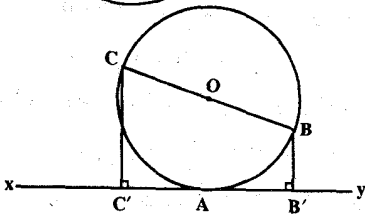
۱۷۵. قطر AB از یک دایره به مرکز O را به طول BC مساوی شعاع آن دایره امتداد می دهیم و از نقطه C مماس CT را بر آن دایره رسم می کنیم. ثابت کنید: $TA = TC$.



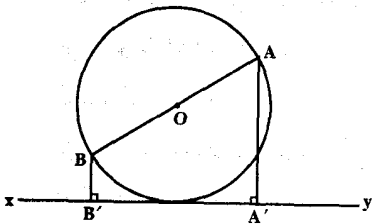
۱۷۶. با توجه به شکل نشان دهید:
الف. اگر $AD = BC$ ، آن گاه $AC = BD$.
ب. اگر $AC = BD$ ، آن گاه $AD = BC$.



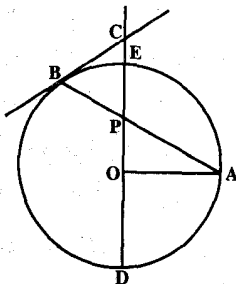
۱۷۷. در دایره (O)، $BL = ER$. نشان دهید: $BE \parallel LR$.



۱۷۸. خط xy در نقطه A بر دایره O مماس و BC قطر دلخواهی از این دایره است. از B و C عمودهای BB' و CC' را بر xy فرود می آوریم. ثابت کنید، نقطه A وسط پاره خط $B'C'$ است.



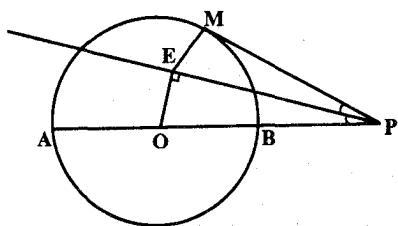
۱۷۹. در نقطه های A و B دو سر قطر دایره $C(O, R)$ عمودهای AA' و BB' را بر مماس دلخواه xy از این دایره فرود می آوریم. ثابت کنید، همواره $AA' + BB' = 2R$ است.



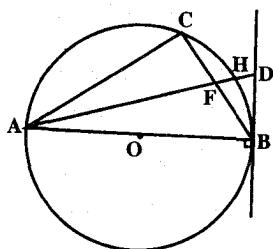
۱۸۰. از نقطه P واقع بر قطر دایره O، به انتهای شعاع عمود بر آن وصل می کنیم. امتداد AP دایره را در B قطع می کند. در نقطه B مماسی بر دایره رسم می کنیم تا OP را در نقطه

C قطع کند. ثابت کنید: $CB = CP$.

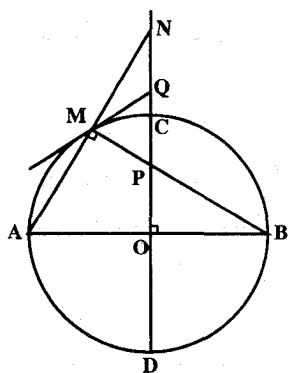
۱۸۱. روی امتداد قطر AB از دایره O نقطه P را اختیار کرده، از آن، مماس PM را بر دایره رسم می‌کنیم و سپس نیمساز زاویه MPA را می‌کشیم و از O عمودی بر آن فرود می‌آوریم و پای عمود را F می‌نامیم. ثابت کنید: $OF = FM$.



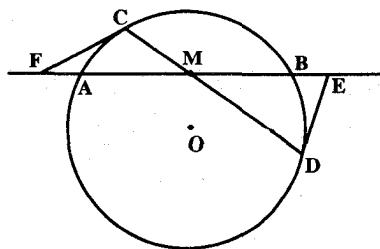
۱۸۲. دایره‌ای به قطر AB داده شده است. وتر دلخواه AC و نیمساز زاویه CAB را رسم می‌کنیم. این نیمساز وتر BC را در نقطه F و دایره را در نقطه H و مماسی را که بر دایره در نقطه B رسم شود، در نقطه D قطع می‌نماید. ثابت کنید: $FH = HD$ و $BD = BF$.

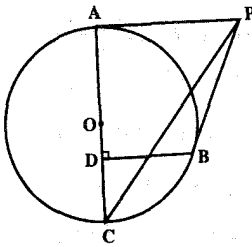


۱۸۳. در دایره‌ای به مرکز O دو قطر عمود بر هم AB و CD را رسم کرده، نقطه‌ای مانند M از دایره را به نقطه‌های A و B وصل می‌کنیم و مماس در نقطه M بر دایره را نیز می‌کشیم. خط‌های MA و MB و مماس در نقطه M، بترتیب خط CD را در نقطه‌های P، N و Q قطع می‌نمایند. ثابت کنید: $NQ = QM = QP$.

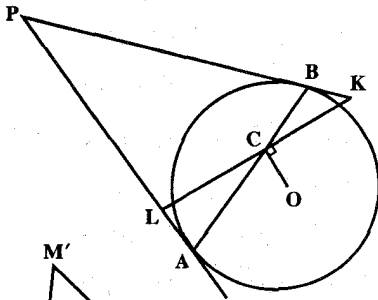


۱۸۴. در دایره‌ای به مرکز O از نقطه M وسط وتر AB قاطع اختیاری CMD را رسم کرده، از نقطه‌های C و D دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطه‌های F و E قطع کند. ثابت کنید که: $AF = BE$.

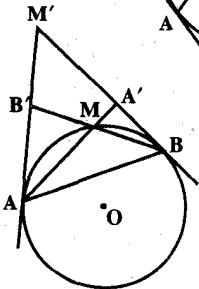




۱۸۵. از نقطه P دو مماس PA و PB بر یک دایره رسم شده است. قطر AC را نیز می کشیم و از نقطه B خط BD را بر آن عمود می کنیم. ثابت کنید، BD به وسیله PC به دو قسمت متساوی تقسیم می شود.

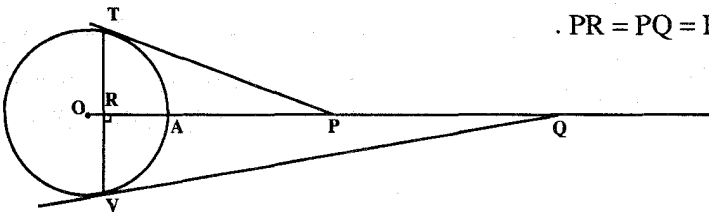


۱۸۶. از نقطه P دو مماس PA و PB را بر دایره به مرکز O رسم می کنیم و وتر AB نقطه C را اختیار کرده و به مرکز دایره وصل می کنیم. ثابت کنید، هر خطی که از نقطه C گذشته و بر OC عمود باشد، امتداد مماسها را در دو نقطه K و L قطع می کند که نقطه C وسط KL است.

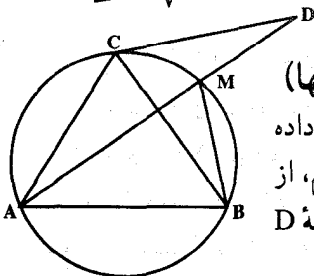


۱۸۷. در دایره O وتر AB مقابل به قوس 120° است. نقطه M روی قوس AB اختیار کنید. امتداد MA و MB مماسهای در نقطه های A و B بر دایره را در B' و A' قطع می کنند. ثابت کنید: $AA' = BB'$.

۱۸۸. در امتداد شعاع OA نقطه P را در نظر گرفته و مماس PT را رسم می کنیم. OP را طوری امتداد دهید که PQ مساوی PT باشد و مماس QV را بر دایره رسم کنید. اگر VR که عمود بر OA رسم می شود، OA را در R قطع کند، ثابت کنید:



$$PR = PQ = PT$$



۲. ۲. ۸. ۲. رابطه بین پاره خطها (نابرابریها)

۱۸۹. کمان AB از یک دایره و نقطه C وسط آن کمان داده شده اند. نقطه M را روی کمان AB اختیار می کنیم، از M به A وصل نموده، AM را از طرف M تا نقطه D

به قسمی امتداد می‌دهیم که $MD = MB$ باشد. ثابت کنید:

$$CB = CD \quad ۱.$$

$$MA + MB < CA + CB \quad ۲.$$

۳. ۸. ۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۹۰. قطر ثابت یک دایره به مرکز O است. از نقطه C بر این دایره وتر CD عمود بر AB

رسم می‌شود. آن گاه وقتی C بر نیم‌دایره حرکت کند، نیمساز زاویه OCD دایره را در نقطه‌ای قطع می‌کند که همواره:

الف. کمان AB را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند.

ب. AB را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.

ج. بر دایره تغییر می‌کند.

د. از AB و از D به یک فاصله است.

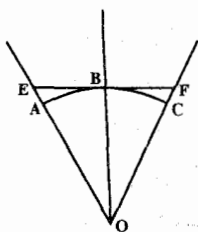
ه. از B و C به یک فاصله است.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۱۹۱. کمان ABC از یک دایره به مرکز O را در نظر می‌گیریم و شعاعهای

OA و OC را امتداد می‌دهیم. کدام مماس بر این کمان که بین دو

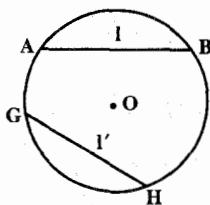
نیم‌خط OA و OC محصور است، کمترین طول را دارد؟



۱۹۲. دو وتر به طولهای l و l' محاط در یک دایره داده شده‌اند.

بیشترین و کمترین فاصله نقطه وسط این وترها از وترهای

موازی آنها را بیابید.



۲. ۹. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۲. ۹. ۱. خطها موازی‌اند

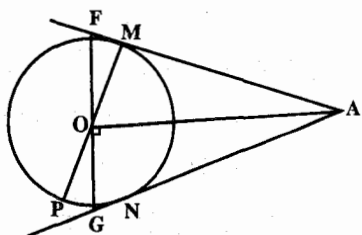
۱۹۳. نقطه‌های A, B, M و N روی محیط یک دایره‌اند. از نقطه M وترهای MA_1 و MB_1

را، بترتیب، عمود بر خطهای راست NA و NB رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، خطهای

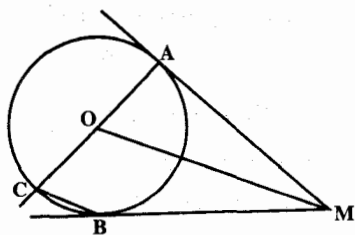
راست AA_1 و BB_1 موازی‌اند.

المیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۱

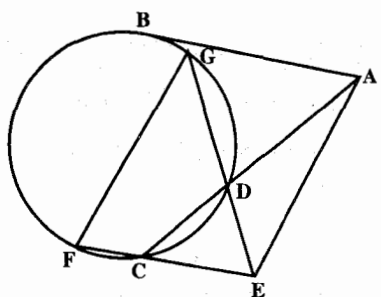
۱۹۴. دو خط قاطع یا مماس نسبت به دایره که یکدیگر را قطع نکنند و کمانهای مساوی روی دایره به وجود آورند، با هم موازی اند.



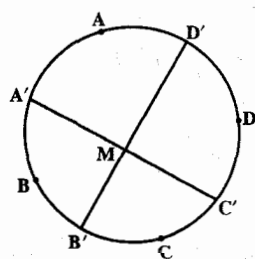
۱۹۵. از نقطه A واقع در خارج دایره O دو مماس AM و AN را بر آن رسم کرده، قطر MOP را می کشیم و قطر عمود بر OA را نیز رسم می کنیم تا خط AN را در نقطه G و خط AM را در نقطه F قطع کند. ثابت کنید، PG با AM موازی است.



۱۹۶. از نقطه M دو مماس MA و MB را بر دایره به مرکز O رسم کرده ایم و از نقطه A قطر AC را کشیده ایم. ثابت کنید، OM و CB متوازی اند.

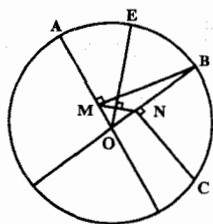


۱۹۷. از نقطه A واقع در خارج دایره O، مماس AB را بر آن رسم می کنیم و نقطه D را روی دایره و نقطه E را در خارج آن، چنان انتخاب می کنیم که $AB = AE$ باشد. DA دایره را در C و DE و CE دایره را به ترتیب در G و F قطع می کنند. ثابت کنید که FG با AE موازی است.

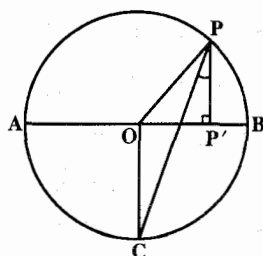


۲. ۹. ۲. خطها بر هم عمودند

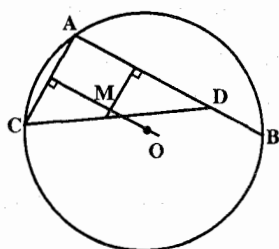
۱۹۸. چهار نقطه A، B، C و D با همین ترتیب، به توالی یکدیگر روی یک دایره مفروضند. وسط کمانهای AB، BC، CD و DA را به ترتیب A'، B'، C' و D' می نامیم. ثابت کنید، دو خط راست A'C' و B'D' بر هم عمودند.



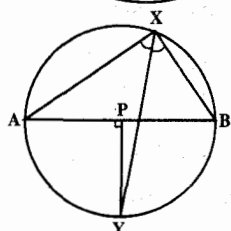
۱۹۹. در دایره O دو کمان AB و BC متساوی اند. از نقطه B عمود BM را بر خط OA و از نقطه C عمود CN را بر خط OB فرود می آوریم. ثابت کنید، MN بر نیمساز زاویه AOB عمود است.



۲۰۰. تصویر نقطه P متعلق به دایره O را بر قطر AB از همین دایره، نقطه P' می‌نامیم. نیمساز زاویه OPP' دایره را در نقطه C قطع می‌کند. ثابت کنید که OC بر AB عمود است.



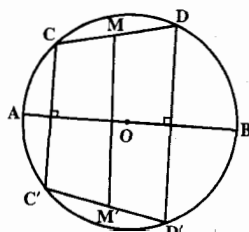
۲۰۱. در دایره O وتر AB را رسم کرده، روی آن نقطه‌ای مانند D اختیار می‌کنیم و این نقطه را به نقطه دلخواه C از دایره وصل می‌کنیم. عمود منصف پاره خط AD عمود منصف پاره خط CD را در M قطع می‌کند. ثابت کنید، OM بر AC عمود است.



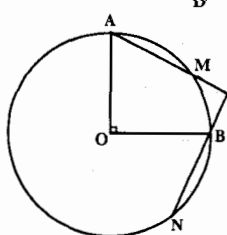
۲۰۲. اگر AB قطر دایره‌ای به مرکز P ، و X و Y دو نقطه از دایره باشند، به نحوی که XY نیمساز زاویه AXB باشد، ثابت کنید: $PY \perp AB$.

۲۰۳. نقطه‌های A ، B و C روی محیط دایره واقعند. D وسط خط شکسته ABC ، روی پاره خط راست BC و E وسط کمان ABC است. خط راست ED بر خط راست BC عمود است.

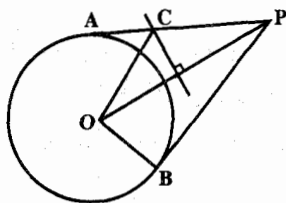
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴



۲۰۴. در دایره O دو وتر CC' و DD' را عمود بر قطر AB رسم کرده، CD و $C'D'$ را نیز رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط MM' که وسط CD را به وسط $C'D'$ وصل می‌کند، بر AB عمود است.



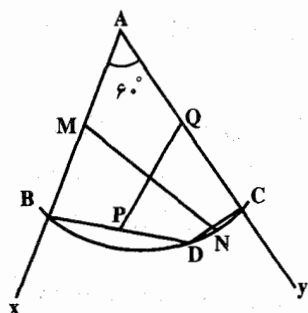
۲۰۵. در دایره O دو شعاع عمود برهم OA و OB را رسم کرده، از A و B در یک جهت دو کمان متساوی AM و BN را روی دایره جدا می‌کنیم. ثابت کنید که خط AM بر خط BN عمود است.



۲۰۶. از نقطه P دو مماس PA و PB را بر دایره O رسم می‌کنیم. عمود منصف پاره خط PO خط PA را در نقطه C قطع می‌کند. ثابت کنید که OC و OB برهم عمودند.

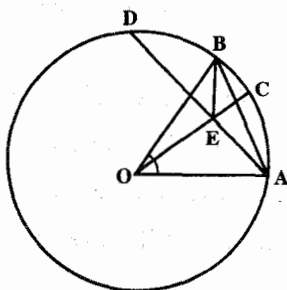
۲۰۷. نقطه P در بیرون دایره به مرکز O واقع است. خطهای راست L_1 ، L_2 را، از نقطه P طوری گذرانده‌ایم که L_1 ، در نقطه A بر دایره مماس است و L_2 ، در نقطه‌های B و C دایره را قطع می‌کند. مماسهای بر دایره، در نقطه‌های B و C ، یکدیگر را در X قطع کرده‌اند. ثابت کنید، خطهای راست AX و PO برهم عمودند.

المیادہای ریاضی لتینگراد، ۱۹۹۱

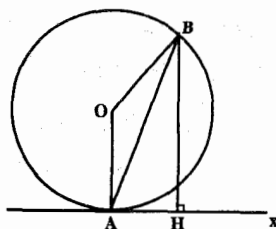


۲۰۸. زاویه $\hat{x}\hat{A}\hat{y} = 60^\circ$ را در نظر گرفته به مرکز A و به شعاعی دلخواه کمان $\widehat{BC}$ محصور بین ضلعهای این زاویه را رسم می کنیم و نقطه دلخواه D واقع بر این کمان را به نقطه های B و C وصل می کنیم. ثابت کنید، خطی که وسط پاره خط DC را به وسط پاره خط AB وصل می کند، بر خطی که وسط پاره خط BD را به وسط پاره خط AC وصل می کند، عمود است.

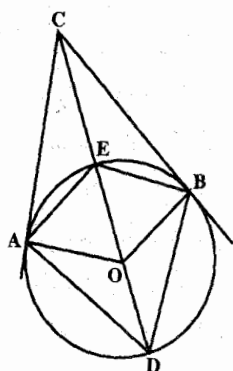
۲. ۹. ۳. خط نیمساز است



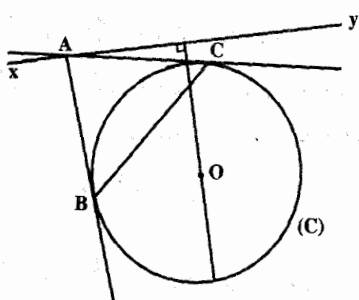
۲۰۹. در دایره‌ای به مرکز O کمان $\widehat{AB}$ مساوی 60° است. نقطه C را روی دایره چنان اختیار می‌کنیم که OC داخل زاویه AOB باشد و کمان $\widehat{BD}$ را مساوی با دو برابر کمان $\widehat{BC}$ طوری جدا می‌کنیم که نقطه‌های C و D در دو طرف OB واقع شوند و فصل مشترک AD و OC را E می‌نامیم. ثابت کنید، EB مماس از زاویه CED است.



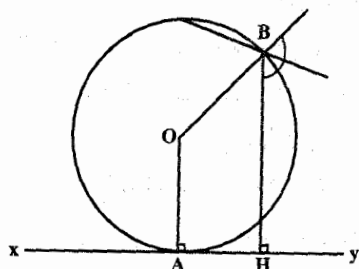
۲۱۰. خط Ax در نقطه A بر دایره O مماس است. از نقطه A غیر مشخص B واقع بر دایره خط BH را بر Ax عمود می‌کنیم، ثابت کنید که AB نیمساز زاویه OBH است.



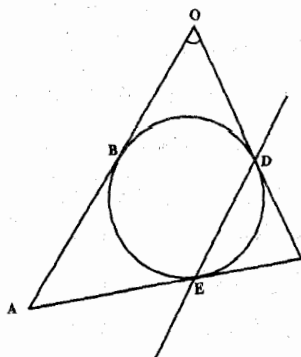
۲۱۱. دایره‌ای به مرکز O داده شده است. در نقطه‌های A و B واقع بر این دایره دو مماس بر آن رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه C قطع کنند. خط CO دایره را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند. ثابت کنید که CD نیمساز زاویه ADB و CE نیمساز زاویه AEB است.



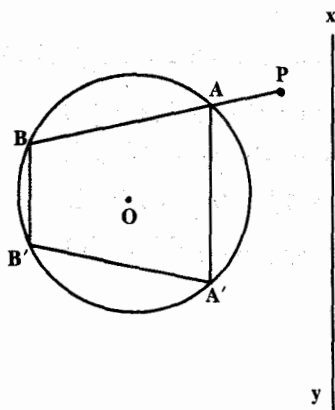
۲۱۲. دایره (C) به مرکز O و شعاع R و خط xy که دایره را قطع نمی‌کند داده شده است. از نقطه غیر مشخص A واقع بر xy دو مماس AB و AC را بر این دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط BC اصل بین نقطه‌های تماس، قطر عمود بر xy را در نقطه ثابتی قطع می‌کند.



۲. ۹. ۴. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد. ۲۱۳. از نقطه متغیر B واقع بر دایره به مرکز O عمود BH را بر خط xy که در نقطه ثابت A بر دایره مماس است رسم می‌کنیم. ثابت کنید که نیمساز زاویه مکمل و مجاور OBH از نقطه ثابتی می‌گذرد.



۲۱۴. دایره‌ای متغیر بر ضلعهای OB و OD از زاویه‌ای ثابت در نقطه‌های B و D مماس است. نقطه تماس این دایره با دومین مماسی است که از نقطه ثابت A روی OB بر آن رسم شده است. ثابت کنید که DE از نقطه ثابتی می‌گذرد.



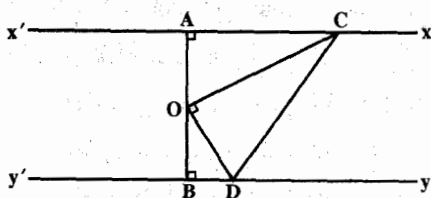
۲۱۵. دایره O و نقطه P و خط xy داده شده‌اند. از نقطه P قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند. سپس وترهای AA' و BB' از این دایره را به موازات xy رسم می‌کنیم. ثابت کنید وقتی که قاطع PAB حول نقطه P دوران کند، خط $A'B'$ نیز حول یک نقطه ثابت مانند P' دوران می‌کند.

۲. ۹. ۵. خطها هم رسند

۲۱۶. از یک نقطه سه عمود بر سه خط داده شده در یک صفحه رسم می‌کنیم. دایرهٔ گذرنده بر پای این سه عمود این سه خط را در سه نقطهٔ دیگر قطع می‌کند. ثابت کنید که عمودهای اخراج شده بر سه خط در این نقطه‌ها، هم‌رسمند.

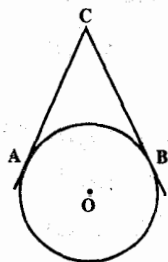
۲. ۹. ۶. وضع نسبی خط و دایره

۲. ۹. ۶. ۱. خط مماس بر دایره است



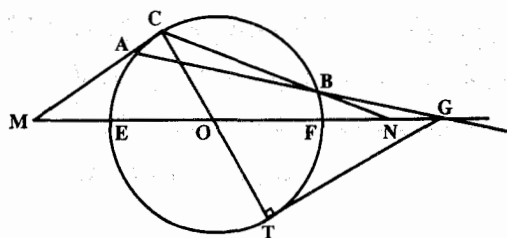
۲۱۷. پاره خط AB و نقطه O وسط آن داده شده‌اند. دو خط xx' و yy' در نقطه‌های A و B بر خط AB عمودند. از نقطه O زاویه قائمه COD را چنان رسم می‌کنیم که نقطه‌های C و D به ترتیب روی xx' و yy' قرار داشته

باشند. ثابت کنید که خط CD بر دایره به قطر AB مماس است.



۲۱۸. دو نقطه A و B روی دایره ای به مرکز O و نقطه C در خارج این دایره داده شده اند، به طوری که $CA = CB$ است. ثابت کنید اگر CA با دایره مماس باشد، خط CB نیز با دایره مماس است.

۲۱۹. در دایره به مرکز O دو نقطه M و N را به یک فاصله از مرکز دایره روی یک قطر در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ اختیاری C واقع بر این دایره به نقطه‌های M ، N و O وصل می‌کنیم و نقطه‌های برخورد CM ، CO و CN با دایره را به ترتیب A ، T و B می‌نامیم. اگر G



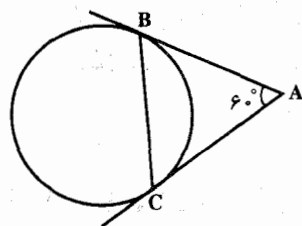
نقطه برخورد AB با امتداد قطر
EF (قطر گذرنده بر M و N)
باشد، ثابت کنید GT مماس بر
دایره است.

۲۲۰. اگر فاصله بین دو نقطه مساوی باشد با مجموع (یا تفاضل) دو مماس که از این دو نقطه بر یک دایره معلوم رسم می شوند، ثابت کنید خطی که این دو نقطه را به هم وصل می کند، بر دایره مماس است.

۲.۹.۶. خط متقاطع با دایره است

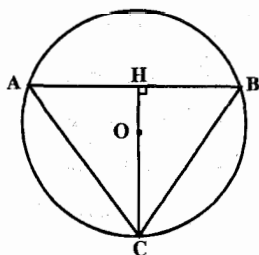
۲۲۱. ثابت کنید که اگر خط راستی، دایره ای را قطع نکند، آن وقت برای هر دو نقطه از خط، فاصله میان آنها، بین مجموع و تفاضل طول مماسهای رسم شده از این نقطه ها بر دایره، محدود است. عکس این را هم ثابت کنید: اگر برای دو نقطه روی خط، ادعای بالا محقق نباشد، آن وقت خط دایره را قطع می کند.

۲.۱۰. شکل های ایجاد شده

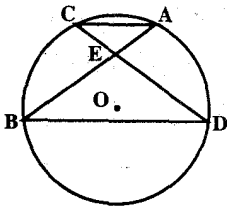


۲.۱۰.۱. شکل های ایجاد شده (مثلث)

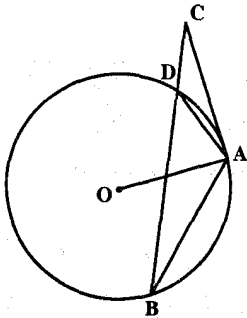
۲۲۲. ثابت کنید: اگر اندازه زاویه دو پاره خط مماسی که از نقطه ای بیرون یک دایره بر آن دایره رسم می شود 60° باشد، این دو پاره خط مماس، با وتر واصل بین دو نقطه تماس یک مثلث متساوی الاضلاع می سازد.



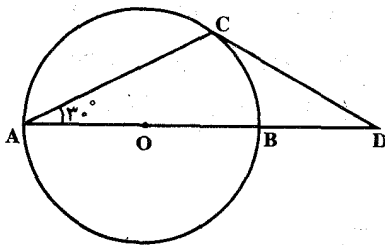
۲۲۳. در دایره به مرکز O عمود OH را بر وتر AB فرود آورده و آن را از طرف O امتداد می دهیم تا دایره را در نقطه C قطع کند. ثابت کنید مثلث CAB متساوی الساقین است.



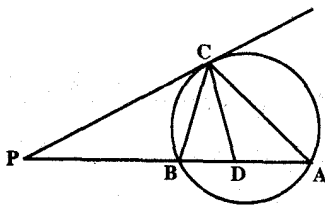
۲۲۴. دو وتر متقاطع AB و CD در دایره به مرکز O به یک فاصله از مرکز دایره می باشند. اگر نقطه برخورد این دو وتر باشد، ثابت کنید مثلثهای EAC و EBD متساوی الساقین می باشند.



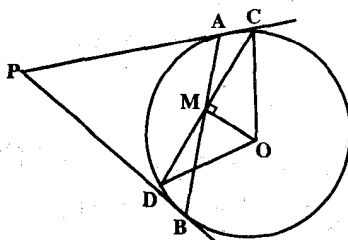
۲۲۵. در دایره ای مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی اند. خط BC دایره را در نقطه D قطع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC متساوی الساقین است.



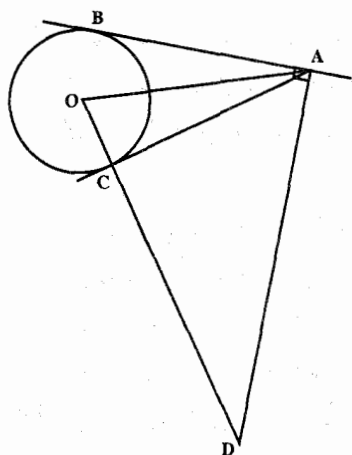
۲۲۶. در دایره O قطر AB با وتر AC زاویه 30° می سازد. مماس در نقطه C بر دایره، امتداد قطر AB را در نقطه D قطع می کند. ثابت کنید مثلث ACD متساوی الساقین است.



۲۲۷. در این شکل PC پاره خط مماس و CD نیمساز زاویه ACB است. ثابت کنید مثلث PCD متساوی الساقین است.

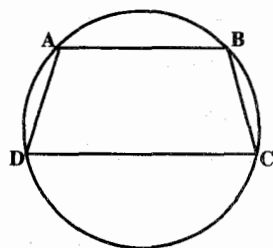


۲۲۸. از نقطه P واقع در خارج دایره O دو مماس PA و PB را رسم نموده از نقطه دلخواه M اخراج واقع بر پاره خط AB عمودی بر MO اخراج می نمایم تا PA را در C و PB را در D قطع کند. ثابت کنید مثلث OCD متساوی الساقین است.

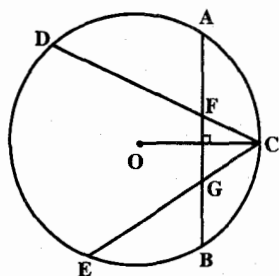


۲۲۹. از نقطه A واقع در خارج دایره ای به مرکز O دو مماس AB و AC را بر این دایره رسم می کنیم. خط OC و عمودی که از نقطه A بر خط AB رسم شود، یکدیگر را در نقطه D قطع می کند. ثابت کنید که مثلث AOD متساوی الساقین است.

۲. ۱۰. ۲. شکلهای ایجاد شده (چند ضلعیها $n \geq 4$)



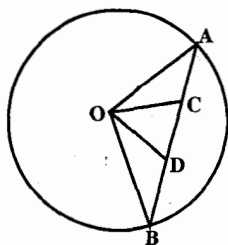
۲۳۰. در دایره به مرکز O دو وتر متوازی AB و CD رسم شده اند. ثابت کنید چهارضلعی ABCD دوزنقه متساوی الساقین است.



۲۳۱. در هر دایره دو وتر متقاطع متساوی، قطرهای یک دوزنقه متساوی الساقین هستند.

۲۳۲. نقطه C روی دایره به مرکز O قرار دارد. وتر AB را عمود بر شعاع OC رسم کرده از نقطه C دو وتر دلخواه CD و CE را رسم می کنیم تا AB را در نقطه های F و G قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی DEGF محاطی است.

۲. ۱۱. سایر مسأله های مربوط به این بخش



۲۳۳. در دایره به مرکز O وتر AB را رسم می کنیم و نقطه های C و D را روی آن چنان اختیار می کنیم که $AC = CD = DB$ باشد. ثابت کنید دو مثلث AOC و BOD همبند هستند.

۲۳۴. سطح دایره‌ای به n قطاع تقسیم شده و $n+1$ قورباغه، به نحوی در آنها نشسته‌اند. هر ثانیه، دو قورباغه‌ای که در یک قطاع باشند، به قطاعهای مجاور (و مختلف) می‌جهند. ثابت کنید، لحظه‌ای فرا می‌رسد که قورباغه‌ها، دست کم نیمی از قطاعها را اشغال کرده باشند. المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۲۳۵. به چند طریق می‌توان دایره‌ای که به P قطاع تقسیم شده است (P ، عددی است اول) به وسیله n رنگ مختلف، رنگ کرد؟ (هر قطاع فقط یک رنگ دارد؛ اجباری نیست از همه رنگها استفاده شود؛ اگر ضمن دوران دایره، دو روش رنگ آمیزی، بر هم منطبق شوند، آنها را یکی به حساب می‌آوریم.) المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق ۲۳۶. در جاده کمربندی، که به شکل دایره است، در یک لحظه و از یک نقطه، چهار اتومبیل A, B, C, D به راه افتادند؛ A و B در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و C و D در خلاف جهت آنها. سرعت هر اتومبیل، مقدار ثابتی است (ولی ممکن است با هم فرق داشته باشند). می‌دانیم، در همان لحظه‌ای که A و C ، برای نخستین بار به هم رسیده‌اند، B و D هم، یکدیگر را ملاقات کرده‌اند. ثابت کنید، در لحظه‌ای که A و B ، برای نخستین بار به هم می‌رسند، C و D هم یکدیگر را ملاقات می‌کنند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۱

۲۳۷. n نقطه روی محیط دایره داده شده است. دونفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند: مداد را از یک نقطه به نقطه دیگر (روی پاره خط راستی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند) می‌برند. حرکت، به نوبت انجام می‌گیرد؛ در ضمن، نمی‌توان روی یک پاره خط راست، دوبار حرکت کرد. کسی این بازی را باخته است که نتواند حرکت کند. ثابت کنید، کسی که بازی را آغاز کند - به شرط بازی درست - برنده می‌شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

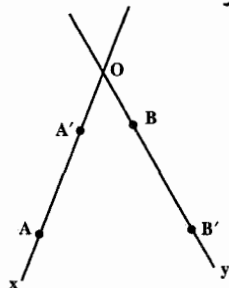
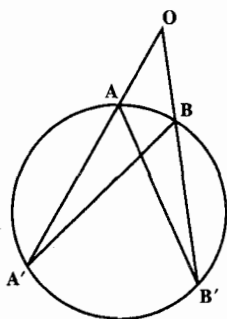
۲۳۸. روی محیط دایره‌ای، ۱۰۰ عدد درست نوشته‌ایم که، مجموع آنها، برابر واحد است. به هر عددی که از مجموع چند عدد پشت سرهم به دست آید، یک حلقه می‌گوییم. چند حلقه مثبت وجود دارد؟

۲۳۹. سرعت یک چرخ در حال حرکت با محیط ۱۱ فوت، بر حسب مایل بر ساعت r است. اگر زمان لازم برای یک دور کامل چرخ $1/4$ ثانیه کمتر شود، سرعت ۵ مایل بر ساعت افزایش می‌یابد. بنابراین r برابر است با:

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) $10\frac{1}{4}$ د) ۱۱ ه) ۱۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۲۴۰. از نقطه مفروض O دو قاطع OAA' و OBB' را نسبت به دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید، زاویه‌های مثلثهای OAB و $OA'B'$ و OAB' و $OA'B$ ، نظیر به نظیر متساوی‌اند. سپس ثابت کنید اگر دو خط x و y در نقطه O متقاطع باشند، روی x نقطه‌های A و A' و روی y نقطه‌های B و B' به قسمی باشند که نقطه O خارج پاره خطهای AA' و BB' باشد (یا بین هر دو پاره خط)، ثابت کنید که اگر در مثلثهای OAB و $OA'B'$ زاویه‌های A و B' برابر باشند، چهار نقطه A, B, A', B' روی یک دایره واقعند.



۲۴۱. خط xy و نقطه A روی آن و نقطه B خارج آن داده شده‌اند. ثابت کنید فقط یک دایره وجود دارد که از دو نقطه A و B می‌گذرد و در نقطه A بر خط xy مماس است.



• B

قضیه اشتینر - لموس

۲۴۲. دشواری ویژه‌ای که در حل برخی از مسأله‌های هندسه یافت می‌شود، خود موجب پدید آمدن کششی در اشخاص برای حل این مسأله‌ها است. در سده‌های گذشته وجود این چنین کششی از امتیازهای ویژه هندسه بوده است. برای نمونه از سه مسأله بسیار مشهور قدیمی می‌توان نام برد: تضعیف مکعب (رسم مکعبی که حجمش دو برابر حجم مکعب مفروضی باشد)، تثلیث زاویه (تقسیم زاویه به سه قسمت برابر از راه رسم)، تریع دایره (رسم مربع معادل با دایره مفروض). کوششهایی که برای حل این مسأله‌ها انجام گرفته خود شاخه‌های تازه‌ای را در ریاضیات پدید آورده است. حتی اکنون هم کسانی که به دنبال نام‌آوری در ریاضیات می‌باشند روشهای تازه‌ای در حل این مسأله‌ها ارائه می‌دهند و رقیبان را در پیدا کردن اشتباههای موجود در آنها به مبارزه می‌خوانند. یکی از مسأله‌هایی که به ویژه همواره انگیزه‌ای برای نام‌آوری بوده است، در این جا به

۱. ثابت کنید: $BC \perp AD$.

۲. AC را امتداد داده‌ایم تا دایره را در C' قطع کند. ثابت کنید BC' قطری از دایره است.

۲۴۸. دایره‌ای به مرکز O و دو مماس AP و AQ رسم شده از

نقطه A بر آن داده شده‌اند. روی کمان $\widehat{PQ}$ که کوچکتر از

نیمدایره است، نقطه‌ای مانند M اختیار کرده در آن نقطه

مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا AP و AQ را بترتیب در

نقطه‌های B و C قطع کند. ثابت کنید:

۱. محیط مثلث ABC همواره مساوی با $2AP$ است.

۲. زاویه $\hat{BOC}$ وقتی نقطه M تغییر کند همیشه مساوی

نصف زاویه $\hat{POQ}$ می باشد.

۲۴۹. در دایره‌ای به مرکز O دو قطر AB و CD

بر یکدیگر عمودند. از نقطه M که روی کمان

$\widehat{AC}$ قرار دارد مماسی بر دایره رسم شده و

CD را در نقطه P قطع کرده است.

۱. ثابت کنید: $\hat{MPO} = \hat{MOA}$.

۲. ثابت کند: $\hat{MPO} = 2\hat{MBA}$.

۲۵۰. در دایره به مرکز O وتر DE را از طرف D

به اندازه شعاع دایره تا نقطه C امتداد می دهیم.

نقطه C را به مرکز دایره وصل کرده امتداد

می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌های A و B قطع

کند (A پین O و C است).

١. زاوية ODE را يا زاوية DÔA مقايسه

کنید.

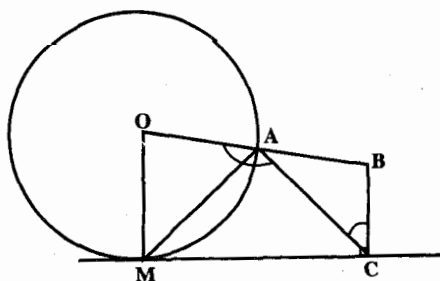
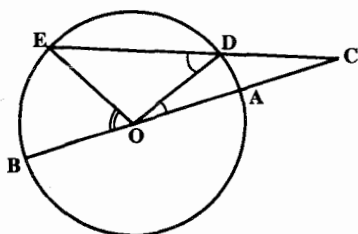
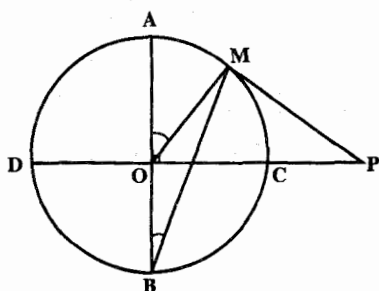
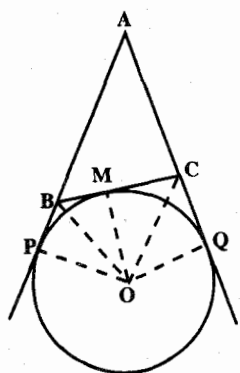
۲. ثابت کنید که: $\hat{B}OE - 3\hat{D}OA = 0$.

۲۵۱. در دایره‌ای به مرکز O، شعاع OA را از

طرف A به اندازه $AB = OA$ امتداد

می دهیم. از نقطه دلخواه M واقع بر دایره

معاسی بر دایره رسم کرده عمود BC را



بر آن فرود می آوریم. M و C در یک طرف AO قرار دارند.

۱. ثابت کنید: $\hat{OAC} = \hat{ACB}$.

۲. ثابت کنید: $AM = AC$.

۲۵۲. نقطه C روی دایره به مرکز O قرار دارد. وتر AB را

عمود بر OC رسم می کنیم. قطر AD و وتر CE عمود بر

این قطر را می کشیم. خطهای CD و CE وتر AB را در

نقطه های F و G قطع می کنند.

۱. ثابت کنید مثلث ACG متساوی الساقین است.

۲. ثابت کنید: $AG = GC = GF$.

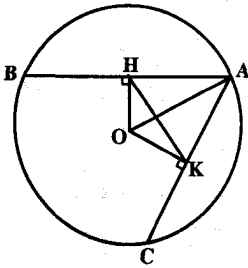
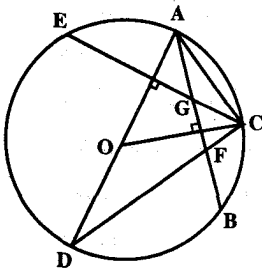
۲۵۳. در دایره به مرکز O دو وتر مساوی AB و AC رسم

شده اند. از نقطه O عمودهای OH و OK را بر این دو

وتر رسم می کنیم.

۱. ثابت کنید مثلث OHK متساوی الساقین است.

۲. ثابت کنید خط OA عمود منصف پاره خط HK است.



● دو دایره

۱.۳. دو دایره در حالت کلی

۱.۱.۳. تعریف و قضیه

۲.۱.۳. وضع نسبی دو دایره

۳.۱.۳. نقطه و دایره

۴.۱.۳. زاویه

۵.۱.۳. پاره خط

۱.۵.۱.۳. اندازه پاره خط

۲.۵.۱.۳. رابطه بین پاره خطها

۶.۱.۳. مماس مشترک دو دایره

۲.۳. دو دایره برون هم (متخارج)

۱.۲.۳. تعریف و قضیه

۲.۲.۳. شعاع

۳.۲.۳. نقطه و دایره

۴.۲.۳. وتر

۵.۲.۳. پاره خط

۱.۵.۲.۳. رابطه بین پاره خطها

۶.۲.۳. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۶.۲.۳. خطها برهم عمودند

۷.۲.۳. مماس مشترک دو دایره

۳.۳. دو دایره مماس برون

۱.۳.۳. تعریف و قضیه

۲.۳.۳. شعاع

۳.۳.۳. نقطه و دایره

۴.۳.۳. کمان

۵.۳.۳. وتر

۶.۳.۳. قطر

۷.۳.۳. زاویه

۱.۷.۳.۳. اندازه زاویه

۸.۳.۳. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۸.۳.۳. خطها موازی اند

۲.۸.۳.۳. خطها بر هم عمودند

۳.۸.۳.۳. خط نیمساز است

۴.۸.۳.۳. خط مماس بر دایره است

۹.۳.۳. مماس مشترک دو دایره

۱۰.۳.۳. شکلهای ایجاد شده

۱۱.۳.۳. دو دایره بر هم مماسند

۱۲.۳.۳. مسأله های ترکیبی

۴.۳. دو دایره متقاطع

۱.۴.۳. تعریف و قضیه

۲.۴.۳. شعاع

۳.۴.۳. نقطه و دایره

۴.۴.۳. کمان

۵.۴.۳. وتر

۶.۴.۳. قطر

۷.۴.۳. زاویه

۱.۷.۴.۳. اندازه زاویه

۲.۷.۴.۳. رابطه بین پاره خطها

۸.۴.۳. پاره خط

۱.۸.۴.۳. اندازه پاره خط

۲.۸.۴.۳. رابطه بین پاره خطها

۹.۴.۳. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۹.۴.۳. خطها موازی اند

۲.۹.۴.۳. خطها بر هم عمودند

۳.۹.۴.۳. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۴.۹.۴.۳. خط مماس بر دایره است

۱۰.۴.۳. شکلهای ایجاد شده

۱۱.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۲.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۵.۳. دو دایره مماس درون

۱.۵.۳. تعریف و قضیه

۲.۵.۳. زاویه

۱.۲.۵.۳. اندازه زاویه

۲.۲.۵.۳. رابطه بین زاویه‌ها

۳.۵.۳. پاره خط

۴.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

۶.۳. دو دایره یکی درون دیگری (متداخل)

۱.۶.۳. تعریف و قضیه

۲.۶.۳. شعاع

۳.۶.۳. خط و دایره

۴.۶.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷.۳. دو دایره هم مرکز

۱.۷.۳. تعریف و قضیه

۲.۷.۳. شعاع

۳.۷.۳. وتر

۴.۷.۳. پاره خط

۵.۷.۳. وضع نسبی دو دایره

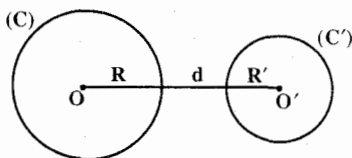
بخش ۳. دو دایره

۳.۱. دو دایره در حالت کلی

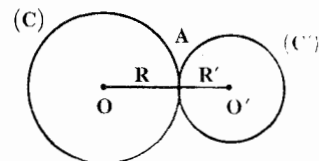
۳.۱.۱. تعریف و قضیه

وضع دو دایره نسبت به هم. دو دایره واقع در یک صفحه، نسبت به هم یکی از حالت‌های زیر را دارند:

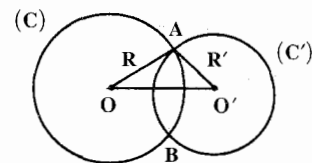
۱. دو دایره بیرون هم (متخارج). دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را که اندازه خط‌المركزین آنها از مجموع اندازه شعاع‌هایشان بیشتر است، دو دایره بیرون هم می‌نامند. در این صورت با فرض $OO' = d$ داریم: $d > R + R'$.



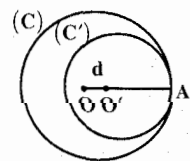
۲. دو دایره مماس بیرون. دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را مماس بیرون می‌نامند. در صورتی که اندازه خط‌المركزین آنها برابر مجموع شعاع‌های آن دو دایره باشد، یعنی با فرض $OO' = d$ ، داشته باشیم: $OO' = d = R + R'$.



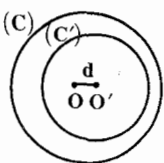
۳. دو دایره متقاطع. دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را متقاطع می‌نامند. در صورتی که اندازه خط‌المركزین آنها از مجموع اندازه‌های دو شعاع کمتر و از قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دو دایره بیشتر باشد. یعنی با فرض $OO' = d$ ، داشته باشیم: $|R - R'| < d < R + R'$.

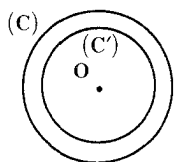


۴. دو دایره مماس درون. دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را مماس درون می‌نامند. در صورتی که اندازه خط‌المركزین آنها برابر قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دو دایره باشد، یعنی با فرض $OO' = d$ ، داشته باشیم: $d = |R - R'|$.



۵. دو دایره یکی درون دیگری (متداخل). دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را که اندازه خط‌المركزین آنها از قدرمطلق تفاضل شعاع‌های دو دایره کمتر باشد، دو دایره یکی درون دیگری (متداخل) می‌نامند. یعنی با فرض $OO' = d$ ، داشته باشیم: $d < |R - R'|$.

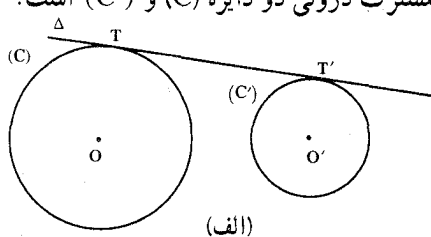
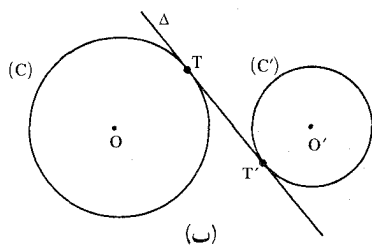




۶. دو دایره هم مرکز. دو دایره متمایزند که مرکز مشترک داشته باشند. به عبارت دیگر $OO' = d = 0$ باشد.

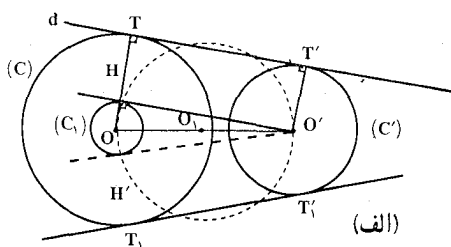
مماس مشترک دو دایره. خطی است که بر دو دایره، مماس است. اگر دو دایره در یک طرف این خط مماس قرار گیرند، مماس مشترک را برونی و اگر در دو طرف این خط مماس واقع شوند، مماس مشترک را درونی می نامند.

در شکل (الف) خط Δ مماس مشترک برونی دو دایره و در شکل (ب) خط Δ مماس مشترک درونی دو دایره (C) و (C') است.



رسم مماس مشترک دو دایره

رسم مماس مشترک برونی دو دایره. دایره های $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را در صفحه P در نظر می گیریم؛ اگر خط d در نقطه های T و T' بر این دو دایره مماس باشد و



مرکزهای دو دایره در یک طرف آن واقع باشند (شکل الف)، دو شعاع OT و $O'T'$ بر خط d عمودند، بنابراین موازی یکدیگرند، پس اگر $R > R'$ باشد، خطی که از نقطه O' (مرکز دایره کوچکتر) موازی مماس مشترک

رسم شود، شعاع OT را در نقطه ای مانند H

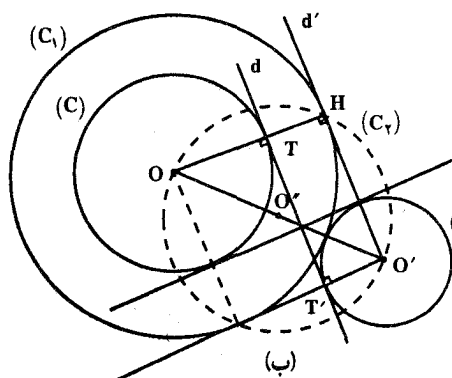
قطع می کند (چرا؟)، و بر آن عمود است. بنابراین چهارضلعی $HTT'O'$ مستطیل و خط $O'H$ با مماس مشترک خارجی دو دایره موازی است. در نتیجه اگر خط $O'H$ مشخص باشد، خطی که موازی آن و مماس بر یکی از دو دایره رسم شود همان مماس مشترک خارجی دو دایره است. اما مثلث $OO'H$ را به آسانی می توان رسم کرد، به این ترتیب که به مرکز O و به شعاع $R - R'$ دایره ای رسم می کنیم تا دایره به قطر OO' را در نقطه H قطع کند و مثلث $OO'H$ و در نتیجه خط $O'H$ ، که امتداد مماس مشترک را مشخص می کند، به دست آید.

در حالتی که $R = R'$ باشد، چهارضلعی $OO'T'T$ مستطیل است (چرا؟)، و مماس

مشترک خارجی دو دایره (در صورت وجود)، موازی خط‌المركزین است، یعنی خود خط‌المركزین راستای مماس مشترک خارجی دو دایره را مشخص می‌کند. هر دو دایره برون هم و دو دایره مماس برون و دو دایره متقاطع، هر کدام دو مماس مشترک برونی دارند و دو دایره مماس درون، تنها یک مماس مشترک برونی دارند.

دو دایره یکی درون دیگری و دو دایره هم مرکز مماس مشترک برونی ندارند.

رسم مماس مشترک درونی دو دایره. دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ واقع در یک صفحه و خط d را که در دو نقطه T و T' بر این دو دایره مماس است و مرکزهای دو دایره



در طرفین آن واقعند در نظر می‌گیریم (شکل ب). از نقطه O' خط d' را موازی d رسم می‌کنیم. این خط امتداد شعاع OT را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند و چهارضلعی $TT'O'H$ مستطیل است، پس $OH \perp d'$ و $OH = R + R'$ است. از این جا می‌توان نتیجه گرفت که خط $O'H$ که از مرکز یک دایره موازی مماس مشترک داخلی دو دایره رسم شود

بر دایره‌ای به مرکز دایره دیگر و شعاعی مساوی مجموع دو شعاع دایره‌ها مماس است و از همین خط برای به دست آوردن امتداد مماس مشترک داخلی دو دایره استفاده می‌کنیم. با توجه به شکل، طریقه ترسیم مماس مشترک داخلی دو دایره را بیان کنید.

هر دو دایره برون هم، دارای دو مماس مشترک داخلی هستند، و دو دایره مماس برونی فقط یک مماس مشترک داخلی دارند. دایره‌های متقاطع، مماس درونی، و درون هم، مماس مشترک داخلی ندارند.

۳. ۱. ۲. وضع نسبی دو دایره

۲۵۴. اگر R و R' شعاعها و d خط‌المركزین دو دایره C و C' باشند، وضع نسبی این دو دایره را در هر یک از حالت‌های زیر مشخص سازید.

الف. $d = 10$, $R = 4$, $R' = 6$

ب. $d = 1$, $R = 6$, $R' = 4$

پ. $d = 10$, $R = 2$, $R' = 3$

ت. $d = 4$, $R = 4$, $R' = 4$

ث. $d = 3$, $R = 6$, $R' = 3$

بخش ۳ / دو دایره □ ۹۱

۲۵۵. دو دایره $C(O, 4)$ و $C'(O', 6)$ داده شده‌اند. در صورتی که طول خط‌المركزین این دو دایره (OO') یکی از مقدارهای زیر باشد، وضع نسبی دو دایره را در هر حالت مشخص کنید.

پ) ۱۰

ب) ۲

الف) ۸

ث) ۱۲

ت) ۱

۲۵۶. دایره‌ای به مرکز P و شعاع p و دایره کوچکتری به مرکز Q و شعاع q داده شده‌اند. PQ را رسم کنید. کدام یک از حکمهای زیر نادرست است؟

الف) $p - q$ می‌تواند با $\overline{PQ}$ مساوی باشد.

ب) $p + q$ می‌تواند با $\overline{PQ}$ مساوی باشد.

ج) $p + q$ می‌تواند کوچکتر از $\overline{PQ}$ باشد.

د) $p - q$ می‌تواند کوچکتر از $\overline{PQ}$ باشد.

ه) هیچ یک از اینها.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۳

۳. ۱. ۳. نقطه و دایره

۲۵۷. دو دایره C و C' در یک صفحه مفروضند. مجموعه نقطه‌هایی از صفحه را تعیین کنید که حداقل روی یکی از خط‌هایی واقعند که نقطه‌ای از دایره C را به نقطه‌ای از دایره C' وصل می‌کنند (این دو نقطه متمایز فرض می‌شوند). برحسب اوضاع نسبی دو دایره در نوع جواب بحث کنید.

المیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۳. ۱. ۴. زاویه

۲۵۸. اندازه زاویه بین مماسهای مشترک داخلی و مماسهای مشترک خارجی دو دایره به شعاعهای R و r را پیدا کنید، به شرطی که فاصله میان مرکزهایشان برابر با $\sqrt{2(R^2 + r^2)}$ باشد (مرکز دایره‌ها در یک طرف مماس خارجی و دو طرف مماس داخلی قرار دارند).

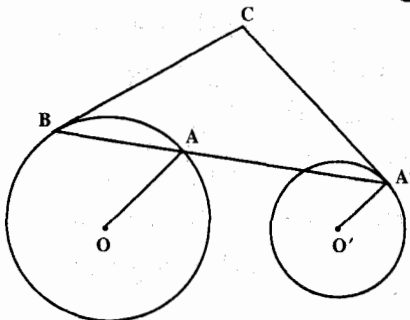
۳. ۱. ۵. پاره خط

۳. ۱. ۵. ۱. اندازه پاره خط

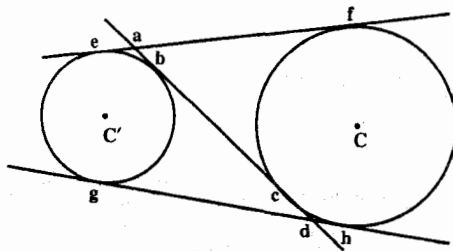
۲۵۹. بزرگترین و کوچکترین قطعه خطی را که دو سرش روی دو دایرة داده شده باشند تعیین کنید.

۳. ۱. ۵. ۲. رابطه بین پاره خطها

۲۶۰. دو دایره با مرکزهای O و O' و دو شعاع متوازی OA و $O'A'$ از آنها را رسم



می کنیم. خط AA' دایرة O را در نقطه دیگری مانند B قطع می کند. در نقطه مماسی بر دایرة O و در نقطه A' مماسی بر دایرة O' رسم می کنیم. این دو مماس یکدیگر را در نقطه C قطع می کنند. ثابت کنید: $CA' = CB$.



۲۶۱. دو دایرة C و C' متخارجند. ef و gh مماسهای مشترک خارجی آنها و bc یکی از مماسهای داخلی آنها است. bc با ef در a و با gh در d برخورد کرده است. ثابت کنید که پاره خطهای $[ab]$ و $[cd]$ با هم برابرند.

المیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۳. ۱. ۶. مماس مشترک دو دایره

۲۶۲. مماس مشترکهای خارجی دو دایره، همچنین مماس مشترکهای داخلی دو دایره یکدیگر را روی خط المکزین دو دایره قطع می کنند.

۲۶۳. تعداد مماسهای مشترک دو دایرة مساوی واقع در یک صفحه نمی تواند برابر باشد با:

(ج) ۳

(ب) ۲

(الف) ۱

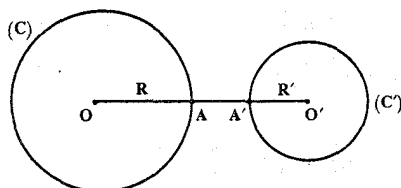
(ه) هیچ یک از اینها

(د) ۴

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۲

۳.۲. دو دایره برون هم (متخارج)

۳.۲.۱. تعریف و قضیه



دو دایره را برون هم (متخارج) می نامند، در صورتی که هر یک در برون دیگری باشد. می توان ثابت کرد که:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره

$C(O, R)$ و $C'(O', R')$ برون هم باشند، آن است که اندازه خط مرکزین آنها $(OO' = d)$ از مجموع اندازه شعاعهای دو دایره بیشتر باشد. یعنی: $d > R + R'$ $\Leftrightarrow$ دو دایره برون هم

۳.۲.۲. شعاع

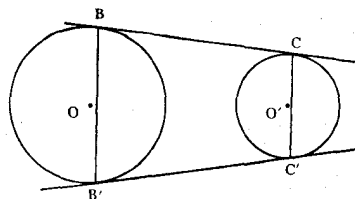
۲۶۴. دو دایره A و B به شعاعهای ۳ سانتیمتر و ۱ سانتیمتر و خط مرکزین ۵ سانتیمتر مفروضند. دایره C را چنان رسم می کنیم که با هر دو دایره A و B مماس و مرکزش روی خط مرکزین این دو دایره باشد، شعاع دایره C و فاصله مرکز آن از مرکز هر یک از دایره های A و B را پیدا کنید.

۲۶۵. فاصله مرکزهای دو دایره برون هم برابر با d است. ثابت کنید که چهار نقطه برخورد مماسهای مشترک درونی و برونی آنها، بر یک دایره واقعند. شعاع این دایره را پیدا کنید.

۳.۲.۳. نقطه و دایره

۲۶۶. روی صفحه، دو دایره، در بیرون یکدیگر داده شده اند. آیا نقطه ای در بیرون این دو دایره وجود دارد، به نحوی که هر خط راستی که از این نقطه می گذرد، دست کم یکی از دایره ها را قطع کند؟
المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۳.۲.۴. وتر



۲۶۷. دو دایره به مرکزهای O و O' متخارجند. دو مماس مشترک خارجی آنها را BC و $B'C'$ می نامیم (B و B' روی دایره O هستند). ثابت کنید، دو وتر BB' و CC' متوازی اند.

۳. ۲. ۵. پاره خط

۳. ۲. ۱. رابطه بین پاره خطها

۲۶۸. ثابت کنید که طول قطعه‌ای از مماس مشترک خارجی دو دایرة برون هم که بین مماسهای مشترک داخلی آنها محصور شده، برابر با طول مماس مشترک داخلی آنهاست.

۳. ۲. ۶. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۳. ۲. ۱. خطها برهم عمودند

۲۶۹. دو دایرة O و O' برون هم هستند.

مماس مشترک خارجی MM' آنها را

رسم کرده، خط المרכזین OO' را

می‌کشیم تا دایرة O را در نقطه‌های A

و B و دایرة O' را در نقطه‌های A' و

B' قطع کند. ثابت کنید، دو خط

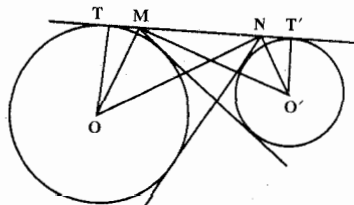
MA و $M'B'$ در نقطه E ، و دو خط

MB و $M'A'$ در نقطه F برهم عمودند. EF نیز بر خط المרכזین عمود می‌باشد.

۲۷۰. دو دایرة برون هم O و O' را در نظر گرفته، مماسهای مشترک داخلی آنها و یک مماس

مشترک خارجی آنها را رسم می‌کنیم. مماس مشترک خارجی، دو مماس مشترک دیگر را

در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. ثابت کنید، OM بر $O'M$ و ON بر $O'N$ عمود است.



۳. ۲. ۷. مماس مشترک دو دایره

۲۷۱. دو دایره به شعاعهای ۲ و ۳ سانتیمتر و فاصله مرکزهای آنها ۶ سانتیمتر است. این دو

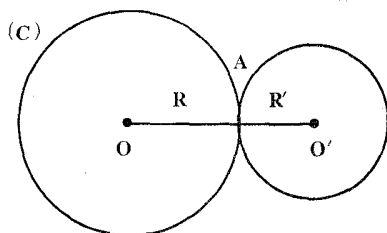
دایره چند مماس مشترک خارجی دارند؟

۳.۳. دو دایره مماس برون

۳.۳.۱. تعریف وقضیه

تعریف. دو دایره را مماس برون می‌نامند، در صورتی که تنها یک نقطه مشترک داشته و هر دایره در برون دایره دیگر باشد.

می‌توان ثابت کرد:

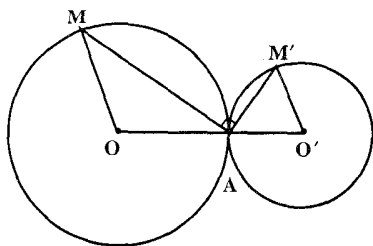


شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس برون باشند، آن است که اندازه خط‌المرکزین آنها $(OO' = d)$ برابر مجموع شعاعهای آن دو دایره باشد.

$$d = R + R' \Leftrightarrow \text{دو دایره مماس برون}$$

یعنی:

۳.۳.۲. شعاع



۲۷۲. دو دایره O و O' در نقطه A مماس برون هستند. در دایره O وتر AM را به اختیار رسم کرده و در دایره O' وتر AM' را عمود بر AM رسم می‌کنیم. ثابت کنید، شعاعهای OM و $O'M'$ موازی‌اند.

۲۷۳. مماس مشترک دو دایره مماس برونی با خط‌المرکزین دایره‌ها زاویه‌ای برابر α درست می‌کند. نسبت شعاعهای دو دایره را پیدا کنید.

۳.۳.۳. نقطه و دایره

۲۷۴. مماسهای مشترک برونی دو دایره مماس برون را رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، چهار نقطه تماس روی یک دایره قرار دارند.

۲۷۵. دو دایره مماس برون مفروضند. ثابت کنید، نقطه‌هایی که روی یکی از این دو دایره به یک فاصله از نقطه تماس باشند، از دایره دوم نیز به یک فاصله‌اند.

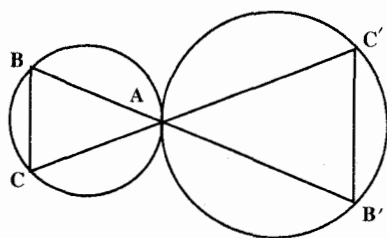
۲۷۶. دایره $C(O, 1)$ و نقطه A که به فاصله ۲ سانتیمتر از نقطه O قرار دارد مفروضند. مرکز دایره ای را مشخص سازید که شعاعش برابر ۲ بوده، از نقطه A بگذرد، و با دایره C مماس باشد.

۲۷۷. دایره به مرکز O و به شعاع ۱۶ سانتیمتر و خط D که از نقطه O می گذرد، مفروضند. مرکز دایره ای را مشخص کنید که شعاعش برابر ۴ باشد و به دایره O و خط D مماس باشد.

۳.۳.۴. کمان

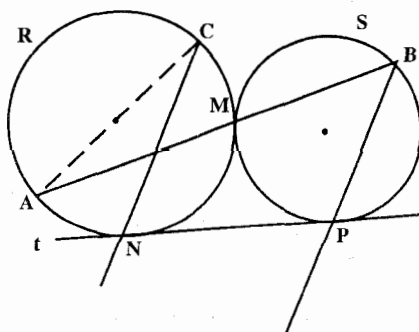
۲۷۸. تمام قاطعهای که از نقطه تماس دو دایره مماس می گذرند در دو دایره کمانهای ایجاد می کنند که از نظر عدد درجه ها با هم برابرند.

۳.۳.۵. وتر



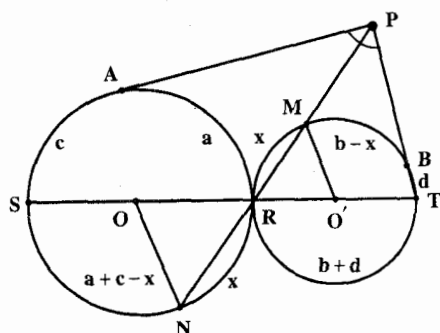
۲۷۹. دو دایره غیر مساوی در نقطه A بر هم مماس برون می باشند. از نقطه A دو قاطع BAB' و CAC' را رسم می کنیم. (B و C روی یک دایره اند.) ثابت کنید، وترهای BC و $B'C'$ موازی اند.

۳.۳.۶. قطر



۲۸۰. فرض می کنیم دایره های R و S در نقطه M بر یکدیگر مماس برون هستند و t را مماس مشترک بر این دو دایره و P و N را ترتیب نقطه های مماس t با دو دایره می گیریم (شکل). A را نقطه ای دلخواه از R می گیریم و فرض می کنیم B دومین نقطه برخورد AM با S باشد. از N خطی موازی با PB می کشیم تا R را در نقطه C قطع کند. ثابت کنید که A و C دو نقطه متقاطر (دو سر یک قطر) از R هستند.

۳.۳.۷. زاویه


$$\frac{1}{2}(a+b) \text{ (ب)}$$
 $a - b$ (3)
$$\frac{1}{2}(a-b) \text{ (الف)}$$
$$(c - a) - (d - b) \quad (7)$$

$a + b$ (هـ)

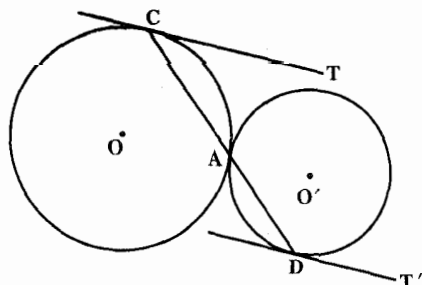
مسابقه های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۵

مسأله‌ای از موبیوس

۲۸۲. از یک نقطه برخورد دو دایره متقاطع، خط متغیری می‌گذرانیم، تا دایره‌ها را در دو نقطه قطع کند. ثابت کنید، زاویه‌ای که نقطه دیگر برخورد دو دایره را به نقطه‌های برخورد قاطع متغیر با دو دایره وصل می‌کند اندازه ثابتی دارد.

مویبوس MOEBIUS (۱۷۹۰-۱۸۶۸) شاگرد گوس GAUSS و ادامه دهنده کارهای

۳.۳.۸. خط‌های: موازی، عمود بر هم، ...

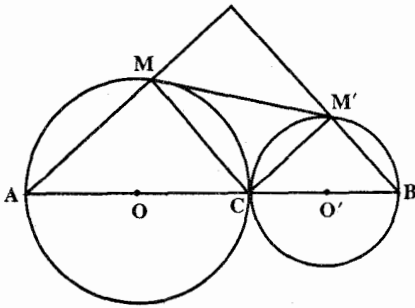


۳.۳.۸.۱. خطها موازی اند

۲۸۳. دو دایره به مرکزهای O و O' در نقطه A مماس بیرون می‌باشند. از نقطه A خطی رسم می‌کنیم تا دو دایره را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید، مماسهایی که در این دو نقطه بر دو دایره رسم شوند، متوازی اند.

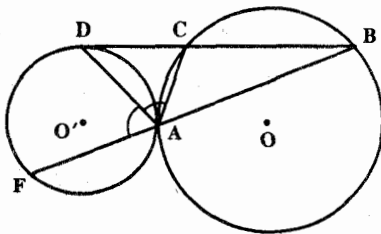
۳. ۳. ۸. ۲. خطها برهم عمودند

۲۸۴. دو دایره O و O' در نقطه C مماس برون هستند. مماس مشترک برونی آنها MM' را رسم کرده، خط مرکزین OO' را می کشیم تا دایره O را در A و دایره O' را در نقطه B قطع کند. ثابت کنید، دو خط MA و $M'B$ و دو خط MC و $M'C$ برهم عمودند.



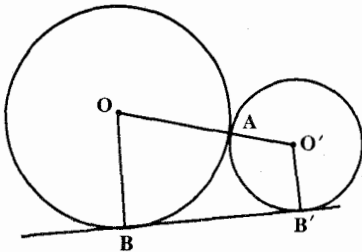
۳. ۳. ۸. ۳. خط نیمساز است

۲۸۵. دو دایره O و O' در نقطه A مماس برون هستند، از نقطه B واقع بر یکی از آنها مماس BD را بر دایره دیگری رسم می کنیم. BD دایره اول را بار دیگر در نقطه C قطع می نماید. BA را امتداد می دهیم تا دایره دوم را باز در نقطه F قطع کند. ثابت کنید که AD نیمساز زاویه CAF است.



۳. ۳. ۸. ۴. خط مماس بر دایره است

۲۸۶. دو دایره به مرکزهای O و O' را که در نقطه A مماس خارج هستند در نظر گرفته، مماس مشترک خارجی آنها BB' را رسم می کنیم. ثابت کنید، دایره به قطر BB' در نقطه A با خط OO' مماس است.

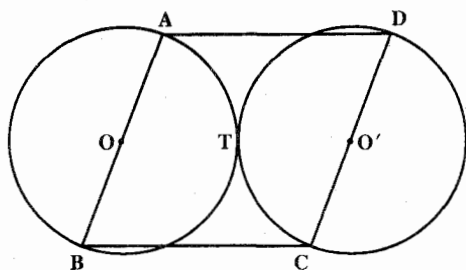


۳. ۳. ۹. مماس مشترک دو دایره

۲۸۷. ثابت کنید، مماس مشترک درونی دو دایره مماس برهم، از وسط مماسهای مشترک برونی آنها می گذرد.

۲۸۸. ثابت کنید که در دو دایره مماس برونی، مماس مشترک برونی بر دایره ای که به قطر خط مرکزین رسم شود، مماس است.

۳.۳.۱۰. شکلهای ایجاد شده

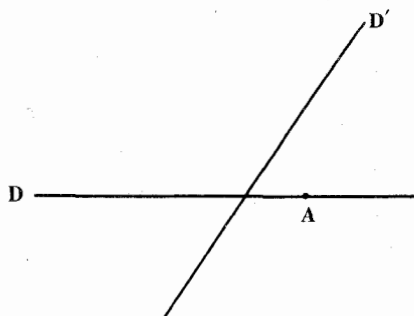


۲۸۹. دو دایره متساوی در نقطه ای مانند T مماس برونی هستند و AB و CD دو قطر متوازی از این دو دایره اند، ثابت کنید که چهارضلعی ABCD لوزی است.

۳.۳.۱۱. دو دایره بر هم مماسند

۲۹۰. دایره‌های K_1 و K_2 دارای نقطه‌های مشترک درونی نیستند. خط‌های راست L_1 و L_2 بر این دو دایره از بیرون مماسند و چهار نقطه تماس، رأسهای یک چهارضلعی محیطی هستند. ثابت کنید، دایره‌های K_1 و K_2 ، برهم از بیرون مماسند.

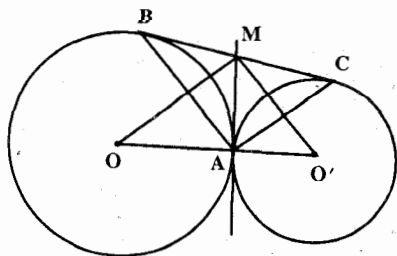
المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۳



۲۹۱. دو خط متقاطع D و D' و نقطه A روی خط D داده شده‌اند. ثابت کنید، دو دایره وجود دارد که بر خط D در نقطه A و همچنین بر خط D' مماس می‌باشند.

۳.۳.۱۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۹۲. دو دایره به مرکزهای O و O' در نقطه A مماس برون می‌باشند. مماس مشترک برونی آنها را BC می‌نامیم. مماس مشترک درونی



آنها را BC می نامیم. مماس مشترک درونی آنها BC را در نقطه M قطع می کند.

۱. ثابت کنید، زاویه BAC قائمه است.

۲. ثابت کنید، مثلث OMO' قائم الزاویه است.

۲۹۳. دو دایره که نسبت شعاعهای آنها ۱:۳ است، بر هم مماس برونی بوده و طول مماس مشترک برونی آنها برابر $6\sqrt{3}$ سانتیمتر است.

۱. زاویه بین دو مماس مشترک برونی را تعیین کنید.

۲. اندازه خط‌المركزین دو دایره ($d = OO'$) را بیابید.

۲۹۴. دو دایره غیر مساوی به مرکزهای O و O' در نقطه A با هم مماس برون هستند. یکی از

مماسهای مشترک برونی دو دایره را رسم می‌کنیم و نقطه‌های تماسش با دو دایره را

بترتیب T و T' و نقطه‌های تلاقیش را با خط OO' و مماس مشترک داخلی، بترتیب،

S و M می‌نامیم. ثابت کنید:

۱. M وسط قطعه خط TT' است.

۲. شکل محدود به نقطه‌های تلاقی چهار خط AT, AT', MO, MO' مستطیل است.

۳. اگر K وسط OO' باشد، بر KM عمود است.

۴.۳. دو دایره متقاطع

۱.۴.۳. تعریف و قضیه

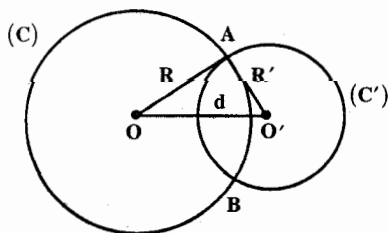
دو دایره را متقاطع می‌نامند، در صورتی که تنها دو نقطه مشترک داشته باشند. می‌توان

ثابت کرد که:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ متقاطع باشند، آن

است که، اندازه خط‌المركزین آنها از مجموع شعاعهای دو دایره کمتر و از قدر مطلق تفاضل

شعاعهای آن دو دایره بیشتر باشند، یعنی با فرض $OO' = d$:



$$\text{دو دایره متقاطع} \Leftrightarrow |R - R'| < d < R + R'$$

دایره‌های متعامد

۲۹۵. تعریف. دو دایره را متعامد می‌نامیم، در صورتی که زاویه بین مماسهای رسم شده بر دو دایره در هر نقطه برخورد، برابر 90° باشد.

قضیه ۱. (الف) در دو دایره متعامد دو شعاعی که از یک نقطه مشترک دو دایره می‌گذرند، بر هم عمودند. (ب) بعکس، اگر دو شعاعی که از یک نقطه مشترک دو دایره می‌گذرند، بر هم عمود باشند، دو دایره متعامدند.

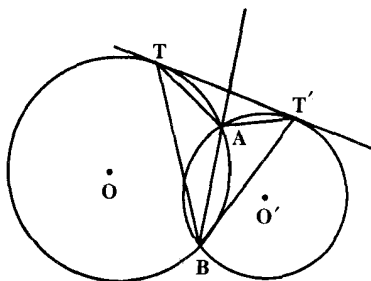
قضیه ۲. (الف) اگر دو دایره متعامد باشند، دایره‌ای که خط‌المركزین دو دایره قطر آن است، از نقطه‌های مشترکشان می‌گذرد. (ب) بعکس، اگر دایره‌ای که خط‌المركزین دو دایره مفروض قطر آن است، از نقطه‌های مشترک دو دایره بگذرد، آن دو دایره متعامدند.

قضیه ۳. اگر دو دایره متعامد باشند، شعاع یکی از دو دایره که از نقطه مشترک دو دایره می‌گذرد، بر دایره دیگر مماس است.

قضیه عکس. دو دایره متقاطع مفروضند. اگر شعاع یک دایره که از یک نقطه مشترک دو دایره می‌گذرد، بر دایره دوم مماس باشد، آن گاه دو دایره متعامدند.

۲.۴.۳. شعاع

۲۹۶. دو دایره به مرکزهای O و O' و شعاعهای R و R' در نقطه‌های A و B یکدیگر را قطع کرده‌اند. خط TT' مماس مشترک برونی آنها را رسم می‌کنیم (T روی دایره به مرکز O می‌باشد). ثابت کنید، دایره محیطی دو مثلث ATT' و BTT' متساوی‌اند.



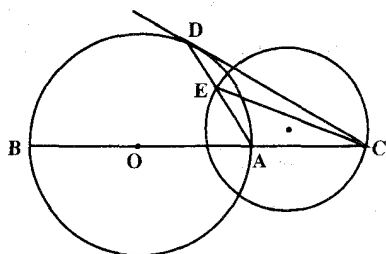
۳.۴.۳. نقطه و دایره

۲۹۷. دو دوچرخه سوار دور دو دایره متقاطع می چرخند، هر دوچرخه سوار دور دایره خودش با تندی ثابت می چرخد. با شروع همزمان از یک نقطه برخورد دایره ها، دوچرخه سوارها، پس از یک دور چرخش، یک بار دیگر در همین نقطه به هم می رسند. ثابت کنید که نقطه ای ثابت وجود دارد، به طوری که فاصله های آن تا دوچرخه سوارها، در هر لحظه برابرند، به شرطی که آنها

الف. در یک جهت (جهت گردش عقربه های ساعت)؛

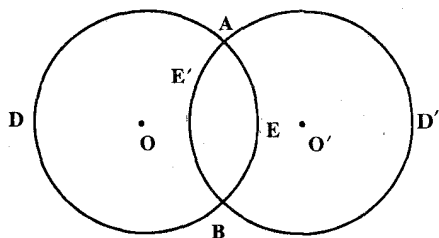
ب. در جهت مخالف هم، گردش کنند.

۲۹۸. از نقطه C واقع بر قطر دایره ای مماس CD را بر آن رسم کرده، وسط AD را نقطه E می نامیم. ثابت کنید که مرکز دایره محیطی مثلث ACD بر دایره به قطر CE قرار دارد.



۲۹۹. دو دایره به مرکزهای O و O' و به شعاع R که اندازه خط مرکزین آنها برابر R است، مفروضند. مرکزهای دایره هایی را که شعاعهایشان برابر $\frac{R}{4}$ و با دو دایره بالا مماس باشند، مشخص سازید.

۳.۴.۴. کمان

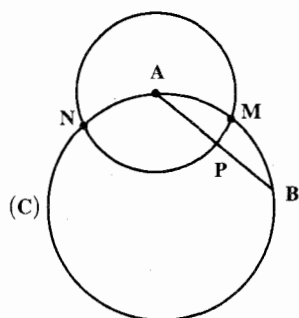


۳۰۰. اگر دو دایره متساوی یکدیگر را قطع کنند، دو کمانی که به وسیله نقطه های تقاطع روی هر یک از آنها پدید می آید، نظیر به نظیر با هم برابرند.

بخش ۳ / دو دایره □ ۱۰۳

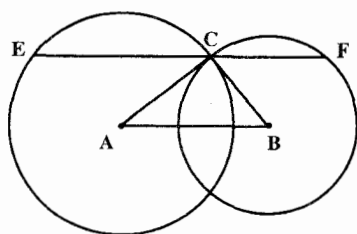
۳۰۱. A و B را دو نقطه از محیط دایره K می گیریم. فرض می کنیم، دو انتهای کمانی مانند K' از دایره دیگری مانند I بر دو نقطه A و B منطبق باشد و مساحت دایره K را به دو بخش برابر تقسیم کند. ثابت کنید، طول کمان K' از قطر دایره K بزرگتر است.

المیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۴



۳۰۲. وتر AB از دایره (C) را در نظر می گیریم. دایره دیگری به مرکز A و به شعاع کوچکتر از طول AB رسم می کنیم تا دایره (C) را در نقطه های M و N و وتر AB را در نقطه P قطع کند. ثابت کنید، عمود منصف BP از وسط کمان MB می گذرد.

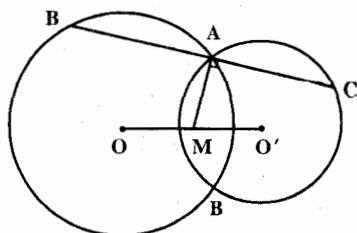
مرحله اول هشتمین المیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۹

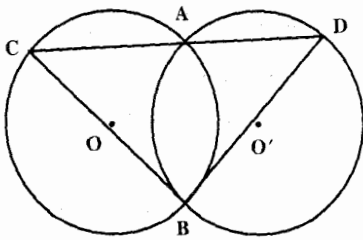


۳۰۳. از نقطه C، نقطه برخورد دو دایره متقاطع به مرکزهای A و B، قاطع ECF را رسم می کنیم. ثابت کنید، $CE + CF$ مقدار ثابتی است.

۵.۴.۳. وتر

۳۰۴. دو دایره O و O' متقاطع در نقطه های A و B مفروضند. نقطه A را به نقطه M وسط خط المرکزین OO' وصل کرده، عمودی از نقطه A بر AM اخراج می نماییم تا دایره O را در نقطه B و دایره O' را در نقطه C قطع کند. ثابت کنید: $AB = AC$.





۳۰۵. دو دایرة متساوی در نقطه های A و B متقاطعند. از نقطه A خطی رسم کرده ایم که دو دایره را در نقطه های C و D قطع کرده است. ثابت کنید، $BC=BD$ است.

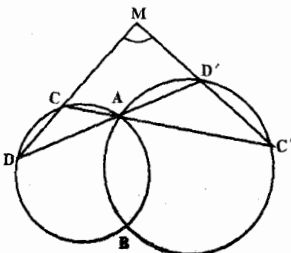
۶.۴.۳. قطر

۳۰۶. دو دایره، در نقطه های A و B، یکدیگر را قطع کرده اند. مماسهای بر دایره ها در نقطه های A و B، بر هم عمودند. M را نقطه ای واقع بر محیط یکی از دایره ها می گیریم، به نحوی که در درون دایره دیگر قرار گرفته باشد. AM و BM را از طرف M امتداد می دهیم تا محیط دایره ای را که M در درون آن است، در نقطه های X و Y قطع کنند. ثابت کنید XY، قطری از این دایره است.

المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

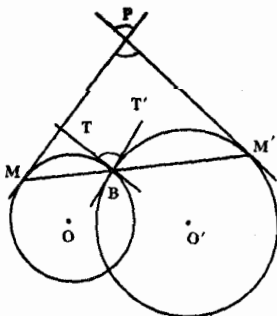
۳۰۷. قضیه. دو خطی که از نقطه های برخورد دو دایره متعامد به نقطه ای روی یکی از دایره ها رسم می شوند، دایره دیگر را در دو انتهای قطری از آن دایره قطع می کنند.

۷.۴.۳. زاویه



۱.۷.۴.۳. اندازه زاویه

۳۰۸. دو دایره در نقطه های A و B متقاطعند. از نقطه A دو قاطع CAC' و DAD' را رسم می کنیم. ثابت کنید، دو وتر CD و C'D' به زاویه ثابت یکدیگر را قطع می کنند.



۳۰۹. از نقطه B محل تقاطع دو دایره O و O' قاطع MBM' را در دو دایره رسم کرده و در نقطه های M و M' دو مماس بر دو دایره رسم می کنیم تا در نقطه P یکدیگر را قطع نمایند. ثابت کنید که زاویه بین این دو مماس با زاویه بین مماسهایی که در نقطه B بر دو دایره رسم شوند، برابر است.

۳۱۰. یک قاطع متغیر از یک نقطه برخورد دو دایره متقاطع رسم می‌شود. ثابت کنید، خطهایی که از نقطه دیگر تقاطع دو دایره به دو سر قاطع وصل می‌شوند، زاویه ثابتی می‌سازند.

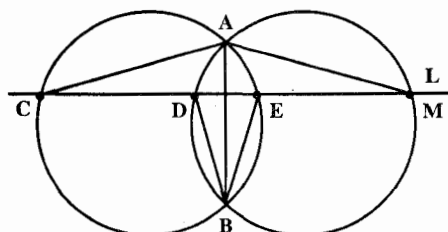
۳۱۱. دو دایره متقاطع و دو نقطه را، هر کدام روی یکی از دایره‌ها، به طوری که در دو طرف وتر مشترک باشند در نظر بگیرید. نشان دهید اگر مجموع دو زاویه‌ای که وتر مشترک از این نقطه‌ها با آن زاویه‌ها دیده می‌شود 90° یا 270° باشد، دو دایره متعامدند.

۲.۷.۴.۳. رابطه بین زاویه‌ها

۳۱۲. K و M، نقطه‌های برخورد دو دایره‌اند. از نقطه K، دو نیمخط راست رسم کرده‌ایم؛ یکی از نیمخطها، دایره اول را در A و دایره دوم را در نقطه B و نیمخط دیگر، دایره اول را در نقطه C و دایره دوم را در نقطه D قطع کرده است. ثابت کنید، دو زاویه MAB و MCD برابرند.

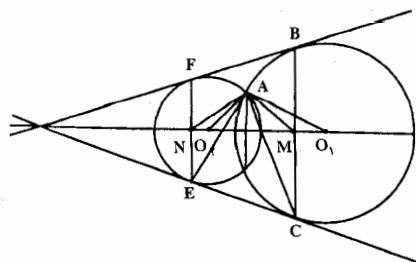
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۳۱۳. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطع هستند. خط L دایره‌ها را در نقطه‌های C، D، E،



و M قطع می‌کند. نقطه‌های A و B در دو طرف این خط قرار دارند. ثابت کنید که مجموع زاویه‌های CAM و DBE برابر 180° است.

۳۱۴. نقطه‌های O_1 و O_2 مرکزهای دو دایره متقاطع هستند و A یکی از نقطه‌های برخورد آنهاست. دو مماس مشترک بر دایره‌ها رسم می‌شوند؛ BC و EF وترهای این دایره‌ها با نقطه‌های انتهایی نقطه‌های تماس هستند. M و N، بترتیب، وسط BC و EF هستند. ثابت کنید که $\angle O_1 A O_2 = \angle MAN = 2\angle CAE$.



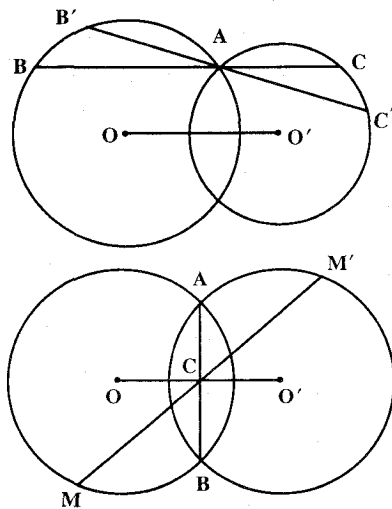
۸.۴.۳. پاره خط

۱.۸.۴.۳. اندازه پاره خط

۳۱۵. خطی که از نقطه تقاطع دو دایره، موازی با خط مرکزین رسم شود، بزرگترین قطعی است که می توان در دو دایره رسم کرد.

۲.۸.۴.۳. رابطه بین پاره خطها

۳۱۶. دو دایره متساوی یکدیگر را در نقطه های A و B قطع کرده اند و وتر مشترک AB خط مرکزین OO' را در نقطه C قطع کرده است. ثابت کنید، اگر خطی از نقطه C بگذرد و دو دایره را در نقطه های M و M' قطع کند، داریم: $MC = M'C$.



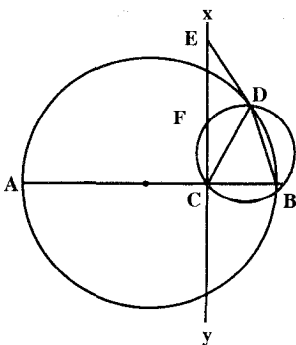
۳۱۷. اگر دو دایره متساوی، یکدیگر را قطع کنند، هر نقطه دلخواه از خط راستی که از نقطه های برخورد گذشته است، از دو مرکز به یک فاصله است.

از لئوناردو داوینچی، مسأله های تاریخی ریاضیات

لئوناردو داوینچی

لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲-۱۵۱۹) از ریاضیدانان ایتالیاست. او در وینچی نزدیک فلورانس به دنیا آمد و در نزدیکی آملواز وفات یافت. علاوه بر شهرتش در مقام نقاش، مجسمه ساز، زرگر، پژوهشگر گردش خون، دانشمند عمومی، معمار، نویسنده مکانیک، اپتیک و مناظر و مریا، ریاضیدان بزرگی نیز بود. در زمینه ریاضیات کاربردی او را می توان از بنیانگذاران اصول اپتیک جدید دانست. در زمینه هندسه میان منحنیهای انحناى منفرد و مضاعف فرق گذاشت.

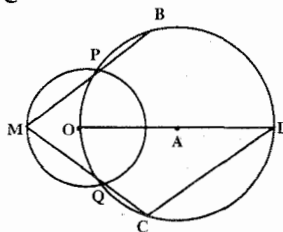
به چندضلعیهای ستاره ای توجه خاصی کرد. به ترسیم شکلها با یک گشادگی پرگار علاقه خاصی نشان داد و ترسیمهای دقیق یا تقریبی از چندضلعیهای منتظم فراهم ساخت. در فیزیک از اصول سطح شیب دار اطلاع داشت. گرانیگاه هرم را به دست آورد. در زمینه مویینگی و شکست نور کار کرد. اتاق تاریک بدون عدسی را می شناخت. از مقاومت هوا و اثر اصطکاک



خبر داشت. جهان کمترین یک چنین نابغه جامع الاطراف پرورده است.

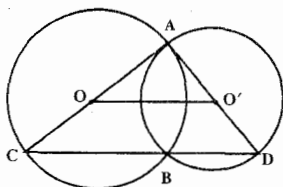
۳۱۸. دایره به قطر AB و خط xy که در نقطه C واقع بر قطر AB (یا امتداد آن) بر این قطر عمود است، مفروضند. اگر نقطه‌ای از این دایره باشد، خط مماس بر دایره در این نقطه، خط xy را در نقطه E قطع می‌کند. دایره محیطی مثلث CBD خط xy را در نقطه دیگری F تلاقی می‌نماید. ثابت کنید: $ED=EF$.

۳۱۹. دایره‌ای به مرکز O و نقطه‌ای مانند A داده شده است. به مرکز A و به شعاع AO دایره دیگری رسم می‌کنیم تا دایره O را در نقطه‌های P و Q و امتداد OA را در نقطه D قطع کند، سپس نقطه M متعلق به دایره O را به نقطه‌های P و Q وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا خطهای حاصل، دایره A را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع کنند. ثابت کنید: $MB=DC$.



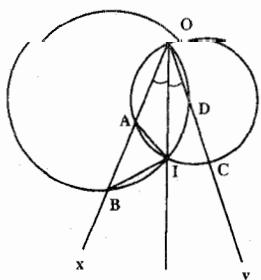
حالات مختلف شکل را برحسب آن که نقطه A داخل دایره C یا خارج آن واقع باشد در نظر بگیرید.

۳۲۰. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. قطرهای AC و AD از این دو دایره را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که پاره خط CD از نقطه B می‌گذرد و اندازه‌اش مساوی دو برابر طول خط‌المركزین دو دایره است.

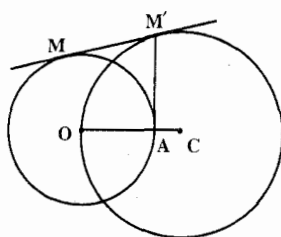


۳۲۱. دایره‌ای و دو نقطه A و B روی آن داده شده است. مماسهای بر دایره که از A و B می‌گذرند، یکدیگر را در نقطه C قطع می‌کنند. دایره‌ای که از C می‌گذرد، در نقطه B بر AB مماس است و، برای بار دوم، دایره داده شده را در نقطه M قطع می‌کند. ثابت کنید که خط AM ، پاره خط CB را نصف می‌کند.

۳۲۲. روی یک خط راست، نقطه‌های A ، B ، C و D طوری قرار گرفته‌اند که $BC=2AB$ و $CD=AC$. دایره‌ای از A و C ، و دایره دیگری از B و D می‌گذرد. ثابت کنید که وتر مشترک این دایره‌ها، پاره خط AC را نصف می‌کند.

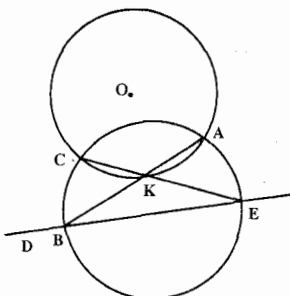


۳۲۳. زاویه $\angle xOy$ و نقطه I روی نیمساز آن مفروض است، روی Ox دو نقطه دلخواه A و B را اختیار کرده، دایره‌های محیطی دو مثلث OAI و OBI را رسم می‌کنیم تا نیمخط Oy را در نقطه‌های C و D قطع کند. ثابت کنید: $CD=AB$.



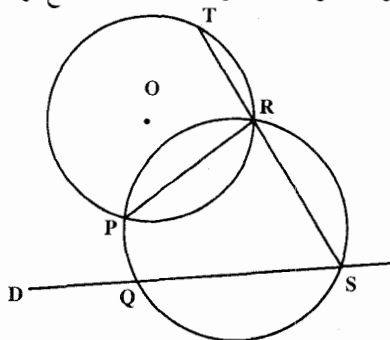
و مماس مشترک خارجی MM' دو دایره (O) و (C) را نیز می‌کنشیم (M' روی دایره (C)). خط‌المرکزین دو دایره، دایره (O) را در نقطه A قطع می‌کند. ثابت کنید که $M'A$ بر OC عمود است.

۳.۹.۴.۳. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد



۳۲۹. دایره ثابت O و خط ثابت D و نقطه ثابت A روی دایره O و نقطه ثابت B روی خط D داده شده است. دایره متغیری از A و B گذشته، دایره O را در نقطه دیگری مانند C و خط D را در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند. ثابت کنید که خط CE از نقطه ثابتی می‌گذرد.

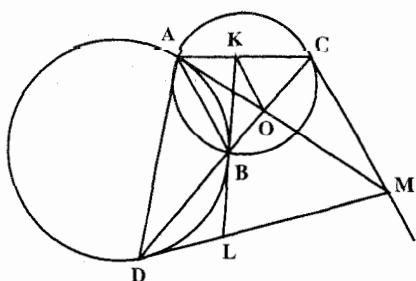
۳۳۰. دایره (C) به مرکز O و نقطه ثابت P واقع بر آن و خط راست D و نقطه ثابت Q واقع بر



آن مفروضند. از نقطه‌های P و Q دایره‌ای با شعاع متغیر می‌گذرد که دوباره دایره (C) را در نقطه R و خط D را در نقطه S قطع کند. ثابت کنید که خط RS دایره (C) را در یک نقطه ثابت T قطع می‌کند.

۴.۹.۴.۳. خط مماس بر دایره است

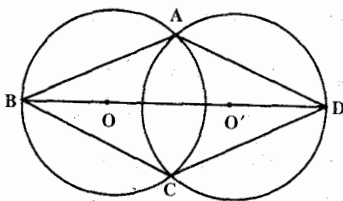
۳۳۱. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. خط راستی دلخواه از نقطه B می‌گذرد و برای بار دوم، دایره اول را در نقطه C و دایره دوم را در نقطه D قطع می‌کند. مماس بر دایره



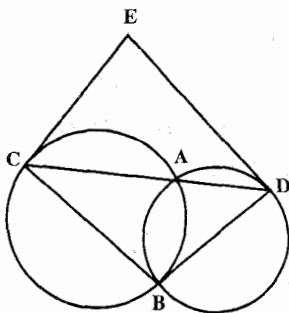
اول در نقطه C و مماس بر دایره دوم در نقطه D ، در نقطه M متقاطعند. از نقطه برخورد AM و CD ، خط راستی به موازات CM می‌گذرد و AC را در نقطه K قطع می‌کند. ثابت کنید، KB بر دایره دوم مماس است.

۱۰.۴.۳. شکل‌های ایجاد شده

۳۳۲. دو دایره C' و C'' در دو نقطه متمایز a و b یکدیگر را قطع می‌کنند. بر a و b دو خط موازی با هم A و B به گونه‌ای رسم می‌شوند که A با دایره‌های C' و C'' به ترتیب در a' و a'' و B با دایره‌های C' و C'' به ترتیب در b' و b'' برخورد کند و a بین a' و a'' و b بین b' و b'' واقع باشد. ثابت کنید که چهارضلعی $a'b'b''a''$ متوازی الاضلاع است. المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲



۳۳۳. دو دایره متساوی O و O' در نقطه‌های A و C متقاطعند. اگر محل تلاقی OO' با دو دایره را B و D فرض کنیم، ثابت کنید، چهارضلعی $ABCD$ لوزی است.



۳۳۴. دو دایره در نقطه‌های A و B متقاطعند. قاطع گذرنده بر A دو دایره را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. اگر نقطه E برخورد مماسهای مرسوم بر دو دایره در نقطه‌های C و D باشند، ثابت کنید چهارضلعی $BCED$ محاطی

۱۱.۴.۳. سایر مساله‌های مربوط به این قسمت

۳۳۵. هرگاه D_1 و D_2 دو قرص باز $[\text{سطح داخلی دایره بدون محیط آن}]$ از صفحه با فصل مشترک ناتهی باشند، از گزاره‌های زیر کدام‌ها به ازای هر وضعی از D_1 و D_2 درست هستند؟

(الف) $D_1 \cap D_2$ یک قرص باز است.

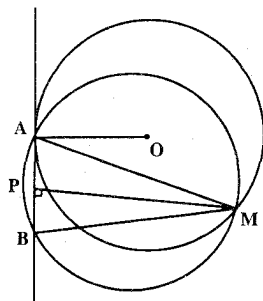
(ب) هر نقطه $D_1 \cap D_2$ در قرص بازی قرار دارد که مشمول در $D_1 \cap D_2$ است.

(ج) $D_1 \cup D_2$ یک قرص باز است.

(د) هر نقطه $D_1 \cup D_2$ در قرص بازی واقع است که مشمول در $D_1 \cup D_2$ است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

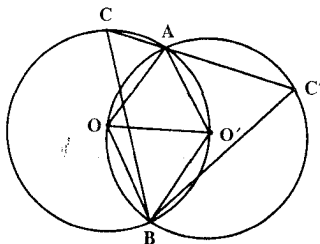
۳۳۶. دایره O و مماس در نقطه A بر آن مفروض است. از نقطهٔ اختیاری M واقع بر دایره عمود MP را بر مماس فرود آورده روی مماس طول $PA=PB$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث AMB همواره بر دایرهٔ ثابتی مماس است.



۱۲.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

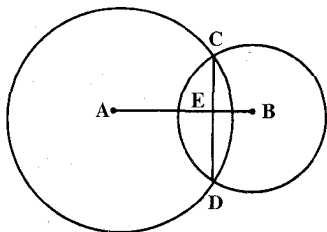
۳۳۷. دو دایره به مرکزهای O و O' طوری رسم شده‌اند که مرکز یکی روی دیگری قرار دارد. نقطه‌های A و B محل تلاقی دو دایره را به نقطه‌های O و O' وصل می‌کنیم.

۱. ثابت کنید مثلثهای AOO' و BOO' متساوی‌الاضلاعند.
۲. از نقطهٔ A قاطع CAC' را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، مثلث BCC' متساوی‌الساقین است.



۳۳۸. دو دایره به مرکزهای A و B یکدیگر را در C و D قطع کرده‌اند.

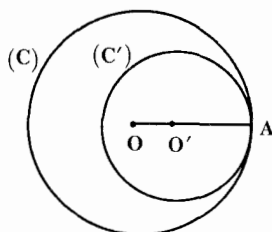
- الف. ثابت کنید که AB ، عمود منصف CD است.
- ب. ثابت کنید: $\hat{ACB} = \hat{ADB}$.



۵.۳. دو دایره مماس درون

۱.۵.۳. تعریف و قضیه

دو دایره که تنها یک نقطه مشترک داشته و یکی درون دیگری باشد، دو دایره مماس درون یا مماس درونی نامیده می‌شوند. می‌توان ثابت کرد که:



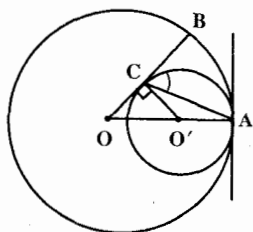
شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ مماس درون باشند، آن است که اندازه خط‌المركزين آنها برابر قدرمطلق تفاضل شعاعهای دو دایره باشد. یعنی با فرض $OO' = d$:

$$d = |R - R'| \Leftrightarrow \text{دو دایره مماس درون}$$

۲.۵.۳. زاویه

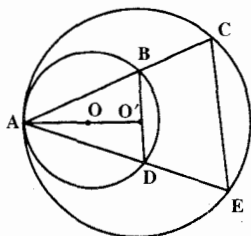
۱.۲.۵.۳. اندازه زاویه

۳۳۹. دو دایره بر یکدیگر در نقطه A مماس درونی‌اند. شعاع OB مماس بر دایره کوچکتر در نقطه C ، از نقطه O ، مرکز دایره بزرگتر، رسم می‌شود. اندازه زاویه BAC را پیدا کنید.



۲.۲.۵.۳. رابطه بین زاویه‌ها

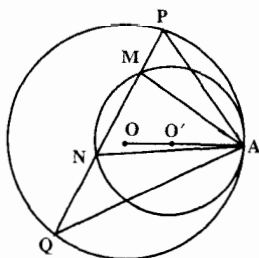
۳۴۰. دو دایره O و O' در نقطه A مماس درونی‌اند. از نقطه A دو قاطع ABC و ADE را رسم می‌نماییم (B و D روی دایره O هستند). ثابت کنید که زاویه‌های دو مثلث DBA و ECA نظیر به نظیر با هم برابرند.



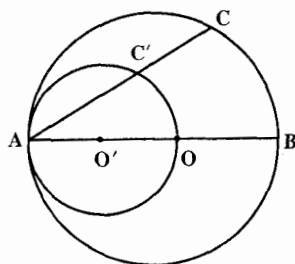
۳۴۱. دو دایره O و O' در نقطه A مماس درونی‌اند. قاطع دلخواهی دو دایره را در نقطه‌های P, M, N و Q قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$1. \hat{PAM} = \hat{NAQ}$$

$$2. \hat{PAN} = \hat{MAQ}$$

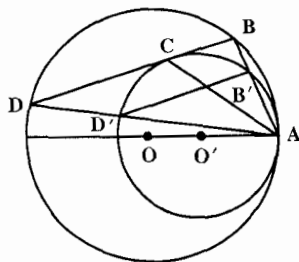


۳.۵.۳. پاره خط



۳۴۲. دایره‌ای به قطر AB و به مرکز O داده شده است. دایره دیگری به قطر AO رسم نموده، از نقطه A خطی می کشیم که دایره بزرگ را در نقطه C و دایره کوچکتر را در نقطه C' قطع کند. ثابت کنید: $AC' = CC'$.

۴.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی



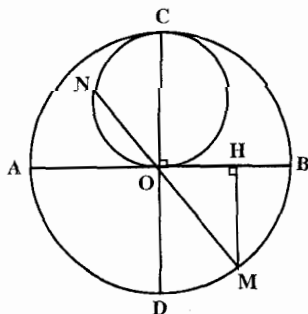
۳۴۳. دو دایره در نقطه A مماس درون می باشند. از نقطه C روی دایره درونی مماسی بر آن رسم می کنیم تا دایره دیگر را در نقطه های B و D قطع کند. خطهای AB و AD دایره درونی را در نقطه های B' و D' قطع می کنند.

۱. ثابت کنید، $B'D' \parallel BD$ است.
۲. ثابت کنید، خط AC نیمساز زاویه BAD می باشد.

۳۴۴. در دایره‌ای به مرکز O قطرهای AB و CD را عمود بر هم رسم می کنیم و به قطر OC دایره‌ای می زنیم.

۱. ثابت کنید، این دایره بر قطر AB مماس است.

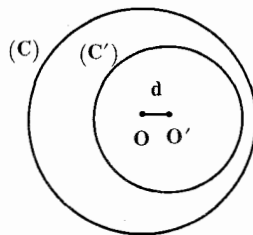
۲. شعاع دلخواه OM را رسم کرده، از M عمود MH را بر AB فرود می آوریم. اگر N نقطه تلاقی OM با دایره به قطر OC باشد، ثابت کنید: $ON = MH$.



۳.۶. دو دایره یکی درون دیگری (متداخل)

۳.۶.۱. تعریف و قضیه

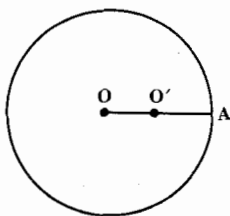
دو دایره را یکی درون دیگری (متداخل) می نامند، در صورتی که هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند و یکی از دایره ها درون دایره دیگر باشد. ثابت می شود که :



شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ یکی درون دیگری باشد، آن است که اندازه خط مرکزین آنها از قدر مطلق تفاضل شعاعهای آن دو دایره کمتر باشد، یعنی با فرض $OO' = d$:

$$d < |R - R'| \Leftrightarrow \text{دو دایره یکی درون دیگری}$$

۳.۶.۲. شعاع



۳۴۵. دایره (C) به مرکز O و شعاع ۴ سانتیمتر و نقطه O' در درون این دایره مفروض است. حدود شعاع دایره های به مرکز O' و واقع در درون این دایره را تعیین کنید.

۳۴۶. دایره ای با مساحت $A = \pi r^2$ داخل دایره ای بزرگتر با مساحت $A_1 + A_2 = 9\pi$ واقع است و A_1 ، A_2 و $A_1 + A_2$ یک تصاعد حسابی تشکیل می دهند، اندازه r شعاع دایره کوچکتر برابر است با :

(الف) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) ۱ (ج) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (د) $\frac{3}{2}$ (ه) $\sqrt{3}$

۳.۶.۳. خط و دایره

۳۴۷. دایره β در درون دایره α قرار دارد. روی دایره α ، دو دنباله از نقطه‌ها داده شده‌اند: $A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots$ پشت سر هم در یک جهت و به طوری که خطهای راست $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots$ بر دایره β مماسند. ثابت کنید که خطهای راست $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ بر یک دایره، که مرکزش روی خط راستی قرار دارد که از مرکز دایره‌های α و β می‌گذرد، مماسند.

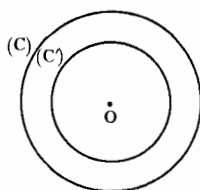
۴.۶.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۴۸. روی محیط دایره به مرکز O_1 و شعاع r_1 ، نقطه‌های M و K را انتخاب کرده‌ایم. در زاویه مرکزی، MO_1K ، دایره‌ای به مرکز O_2 و شعاع r_2 محاط شده است. مساحت چهارضلعی MO_1KO_2 را پیدا کنید.

المیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۲

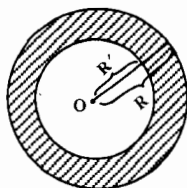
۷.۳. دو دایره هم مرکز

۱.۷.۳. تعریف و قضیه



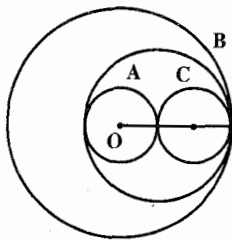
دو دایره با شعاعهای متفاوت را هم مرکز می‌نامند؛ در صورتی که مرکز مشترک داشته باشند. به طور کلی:

شرط لازم و کافی برای آن که دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ هم مرکز باشند، آن است که اندازه خط‌المركزین آنها برابر صفر باشد، یعنی با فرض $OO' = d$:
 $d = 0 \Leftrightarrow$ دو دایره هم مرکز

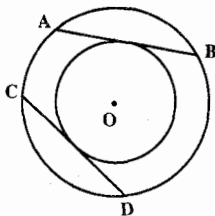


طوق دایره. بخشی از صفحه محصور بین دو دایره هم مرکز است که به آن، تاج دایره نیز می‌گویند.

۲.۷.۳. شعاع

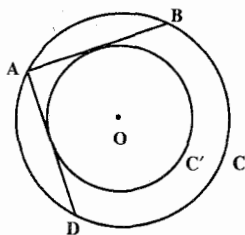


۳۴۹. دو دایرة متحدالمرکز A و B به شعاعهای ۱ و ۳ سانتیمتر مفروضند. دایرة C به این دو دایره مماس است. مطلوب است، محاسبه شعاع دایرة C و فاصله مرکز آن از مرکز مشترک دو دایره.



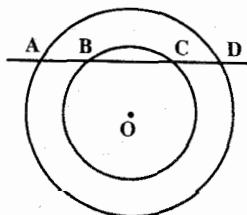
۳.۷.۳. وتر

۳۵۰. در دو دایرة هم مرکز همه وترهایی از دایرة بزرگتر که بر دایرة کوچکتر مماس باشند، با هم برابرند.



۳۵۱. دو دایرة هم مرکز $C'(O, R')$ و $C(O, R)$ با فرض $R > R'$ را در نظر می گیریم. ثابت کنید، مماسهایی که از نقطه های مختلف واقع بر دایرة C بر دایرة C' رسم می شوند، متساوی اند.

۴.۷.۳. پاره خط



۳۵۲. اگر خطی دو دایرة متحدالمرکز را قطع کند، پاره خطهای محصور بین دو دایره با هم مساوی اند.

۵.۷.۳. وضع نسبی دو دایره

۳۵۳. دو دایرة متحدالمرکز A و B به شعاعهای ۱ cm و ۴ cm، همچنین دایرة سوم C به شعاع ۲ cm مفروضند. دایرة C در چه ناحیه ای باید قرار گیرد تا با دو دایرة A و B متقاطع باشد؟

بخش ۴

• سه دایره و بیشتر

۱.۴. سه دایره

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

۲.۱.۴. شعاع

۳.۱.۴. نقطه و دایره

۴.۱.۴. کمان

۵.۱.۴. وتر

۶.۱.۴. قطر

۷.۱.۴. پاره خط

۸.۱.۴. خط و دایره

۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۲.۴. چهار دایره

۱.۲.۴. تعریف و قضیه

۲.۲.۴. شعاع

۳.۲.۴. نقطه و دایره

۴.۲.۴. خط و دایره

۵.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳.۴. پنج دایره و بیشتر

۱.۳.۴. تعریف و قضیه

۲.۳.۴. شعاع

۳.۳.۴. نقطه و دایره

۴.۳.۴. کمان

۴.۳.۵. قطر

۴.۳.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

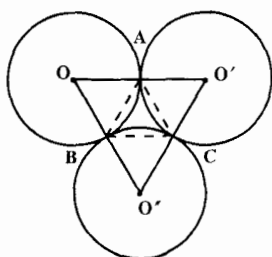
بخش ۴. سه دایره و بیشتر

۱.۴. سه دایره

۱.۱.۴. تعریف و قضیه

در این بخش به بررسی قضیه‌ها و مسأله‌هایی که به سه دایره متمایز مربوط می‌شوند، می‌پردازیم. مرکزهای سه دایره ممکن است روی یک خط راست قرار داشته باشند و یا غیرواقع بر یک خط راست باشند. همچنین شعاعهای سه دایره ممکن است مساوی و یا نابرابر باشند.

۲.۱.۴. شعاع



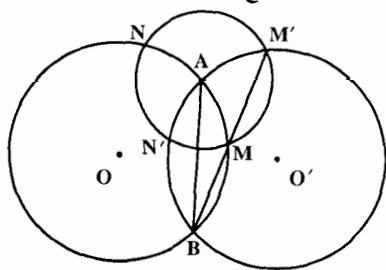
۳۵۴. سه دایره مساوی به شعاع ۲ سانتیمتر، دایره دو مماس بیرون هستند. شعاع دایره‌ای را که از نقطه‌های تماس این دایره‌ها می‌گذرد را پیدا کنید.

۳۵۵. دو دایره مساوی، با یک دایره دو به دو مماس هستند. شعاع دایره سوم برابر ۸ cm است. طول خط واصل نقطه‌های تماس دایره سوم با دو دایره مساوی برابر ۱۲ cm است. شعاع دایره‌های مساوی را بیابید.

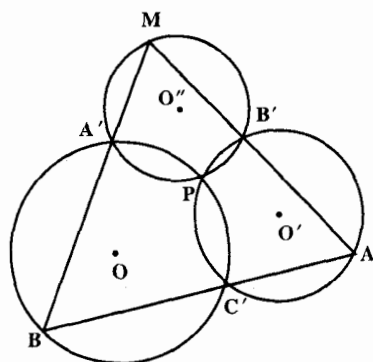
۳۵۶. سه دایره به شعاعهای ۱، ۲ و ۳ بر یکدیگر مماس بیرونی‌اند. شعاع دایره‌ای را که از نقطه‌های تماس این دایره‌ها می‌گذرد، مشخص سازید.

۳.۱.۴. نقطه و دایره

۳۵۷. دو دایره متساوی O و O' یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. به مرکز A دایره دیگری رسم می‌کنیم که هر یک از دو دایره O و O' را در دو نقطه قطع کند. ثابت کنید که نقطه B با دو نقطه‌های مزبور که در یک طرف AB واقع هستند (مانند M و M') بر یک استقامت می‌باشند.



۳۵۸. ثابت کنید، اگر سه دایره در یک نقطه و دوه دو در سه نقطه واقع بر یک استقامت نیز متقاطع باشند، آن نقطه مشترک با مرکزهای این سه دایره واقع بر یک دایره اند.
۳۵۹. سه دایره $(PA'B')$ ، $(PB'C')$ و $(PC'A')$ که در نقطه P مشترکند، یکدیگر را دوه دو

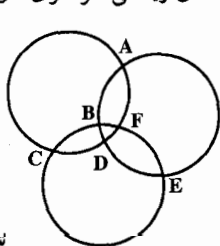


در نقطه های A' ، B' و C' قطع کرده اند.
از نقطه C' خط غیر مشخصی رسم شده
است که دایره های $(PB'C')$ و $(PC'A')$
را در نقطه های A و B قطع کرده است.
ثابت کنید، AB' و BA' روی دایره
 $(PA'B')$ یکدیگر را قطع می کنند.

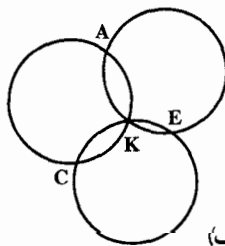
۴.۱.۴. کمان

۳۶۰. سه دایره با شعاعهای برابر روی یک صفحه داده شده است.
- (a) ثابت کنید، اگر این سه دایره، مثل شکل (الف) از یک نقطه بگذرند، مجموع کمانهای مشخص شده AK ، CK و EK برابر است با ۱۸۰ درجه.
- (b) ثابت کنید، اگر سه دایره در وضع شکل (ب) باشند، مجموع کمانهای مشخص شده AB ، CD و EF برابر است با ۱۸۰ درجه.

المیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۶



شکل (ب)

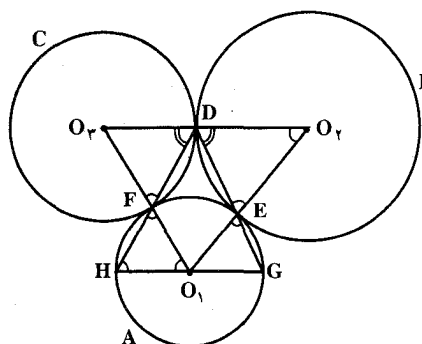


شکل (الف)

۵.۱.۴. وتر

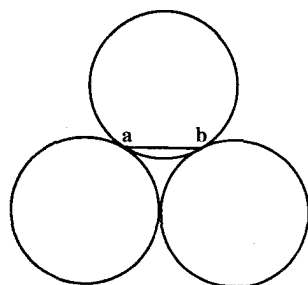
۳۶۱. ثابت کنید، دایره های دلخواه گذرنده بر دو رأس A و B از مثلث ABC ، دو ضلع CA و CB را در وترهایی موازی یکدیگر قطع می کنند.

۶.۱.۴. قطر



۳۶۲. سه دایره A, B و C دوه دو مماس به یکدیگر در نقطه های D, E و F می باشند و خطهای DE و DF دایره A را در G و H قطع می کنند. نشان دهید که GH از مرکز A عبور می کند و موازی خط مرکزین دو دایره B و C است.

۷.۱.۴. پاره خط



۳۶۳. مطابق شکل، سه دایره به شعاع یک، دوه دو بر یکدیگر مماس هستند. طول پاره خط $[ab]$ برابر است با:

الف) ۱ ب) $\sqrt{2}$

ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

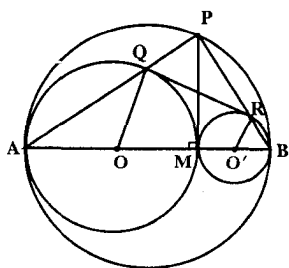
المیادای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۸.۱.۴. خط و دایره

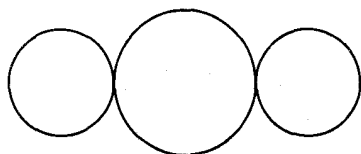
۳۶۴. سه دایره α, β و γ داده شده اند. فرض کنید l_1 و l_2 معرف مماسهای مشترک درونی دایره های α و β ، و m_1 و m_2 مماسهای مشترک درونی دایره های β و γ ، و n_1 و n_2 مماسهای مشترک درونی دایره های γ و α باشند. ثابت کنید که اگر خطهای l_1, m_1 و n_1 همرس باشند، آن وقت خطهای l_2, m_2 و n_2 نیز همرسند.

نکته. اگر یک مماس مشترک درونی α و β و یک مماس مشترک برونی α و γ و یک مماس مشترک برونی β و γ همرس باشند، مماس مشترکهای متناظر دیگر نیز همرسند.

۳۶۵. نقطه P را روی دایره ای به قطر AB اختیار، و از آن عمود PM را بر AB رسم می کنیم. دو دایره که به قطرهای AM و BM رسم شوند، خطهای AP و BP را بترتیب در نقطه های Q و R قطع می کنند. ثابت کنید که خط QR



مماس مشترک دو دایره مزبور است.



۳۶۶. منحنی شکل زیر اجتماعی است از سه دایره، یک دایره بزرگ و دو دایره کوچکتر که بر دایره بزرگتر مماس بیرونی اند. تعداد نقطه‌های برخورد

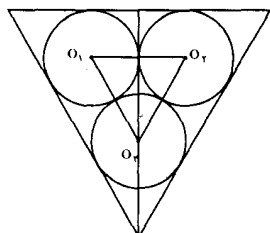
یک خط با این منحنی در اوضاع مختلف، کدام مجموعه زیر را مشخص می‌کنند؟

الف) $\{۱, ۲, ۴, ۶\}$ (ب) $\{۰, ۲, ۴, ۶\}$ (ج) $\{۰, ۱, ۲, ۴, ۶\}$

(د) $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ (ه) $\{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸\}$

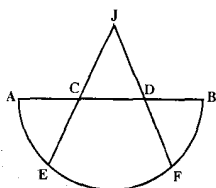
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۳۶۷. سه دایره دوه‌به‌دو مماس به شعاع r مفروضند. مساحت مثلث تشکیل شده با سه خط را که هریک از آنها بر دو دایره مماس است و دایره سوم را قطع نمی‌کند، پیدا کنید.

۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی



۳۶۸. پاره خط AB را به سه قسمت مساوی $AC = CD = DB$ تقسیم

کرده‌ایم. سپس روی ضلع CD مثلث متساوی‌الاضلاع CDJ را ساخته‌ایم. به مرکز D و شعاع DB قوسی رسم نموده‌ایم تا امتداد DJ را در F قطع کند و به مرکز C و شعاع CA قوس

دیگری رسم نموده‌ایم تا امتداد CJ را در E قطع کند. آن‌گاه با قوسی به مرکز J و شعاع JF دو قوس اول را به هم وصل کرده‌ایم. قوس $AEFB$ که به این ترتیب به دست می‌آید، قوس سه مرکزی یا شبه بیضی نامیده می‌شود.

۱. ثابت کنید، قوس EF بر دو قوس EA و FB مماس است.

۲. آیا اگر روی پاره خط AB فقط دو پاره خط AC و DC برابر باشند، باز هم خاصیت بالا وجود دارد؟

۳۶۹. سه جفت دایره (B) ، (C) ؛ (C) ، (A) ؛ (A) ، (B) ، در D ، E و F برهم می‌مانند.

خطهای DE و DF دایره (A) را در G و H نیز قطع می‌کنند. نشان دهید که:

۱. GH از مرکز (A) می‌گذرد.

۲. GH با خط‌المرکزین (B) و (C) موازی است.

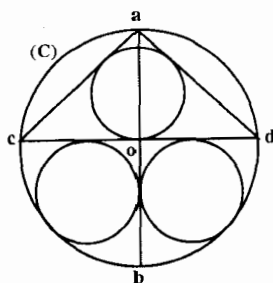
۲.۴. چهار دایره

۱.۲.۴. تعریف و قضیه

در این قسمت مسأله‌های مربوط به چهار دایره متمایز مورد بررسی قرار می‌گیرد. دایره‌ها ممکن است دارای شعاع برابر باشند و یا شعاع‌هایشان متفاوت باشند. همچنین مرکزهای دایره‌ها ممکن است همخط باشند و یا همخط نباشند.

۲.۲.۴. شعاع

۳۷۰. در دایره C دو قطر ab و cd عمود برهم و وترهای ac و ad رسم شده‌اند. ثابت کنید، سه دایره زیر باهم برابرند:



الف. دایره محاطی داخلی مثلثی acd.

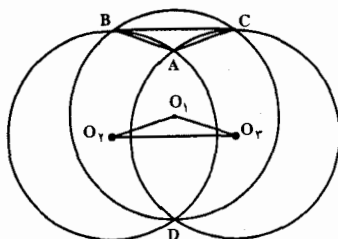
ب. دایره‌ای که بر C و بر ab و od مماس است.

ج. دایره‌ای که بر C و بر ab و oc مماس است.

المیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۳۷۱. سه دایره، هر کدام به شعاع R از نقطه O می‌گذرند و یکدیگر را در نقطه‌های A، B، C و قطع می‌کنند. ثابت کنید، دایره‌ای که از سه نقطه A و B و C بگذرد، شعاعی برابر R دارد.

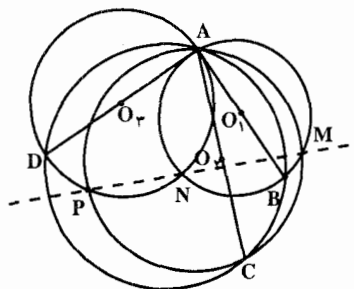
المیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۳



۳.۲.۴. نقطه و دایره

۳۷۲. قضیه سالمون salmon. اگر از نقطه‌ای

واقع بر محیط یک دایره، سه وتر رسم، و سه دایره به قطرهای این سه وتر رسم کنیم، ثابت کنید که این سه دایره دایره دوه‌دو بر سه نقطه واقع بر یک استقامت متقاطع می‌شوند.



۳۷۳. دو دایره Δ و Δ' در نقطه‌های M و M' متقاطعند. سه وتر MA، MB، MC از دایره Δ دایره Δ' را بترتیب در نقطه‌های A'، B'، C' قطع می‌کنند. ثابت کنید که دایره‌های محیطی مثلثهای AA'M'، BB'M'، CC'M' دایره دوه‌دو یکدیگر را روی سه نقطه همخط قطع می‌کنند.

۳۷۴. ثابت کنید که هرگاه A، B، C و D نقطه‌های دلخواهی در صفحه باشند آن وقت چهار دایره که هر کدام از وسط پاره خطهای AB، AC، AD و BC، BA، BD و CA، یا CB و CD؛ یا DA، DB و DC می‌گذرند، یک نقطه مشترک دارند.

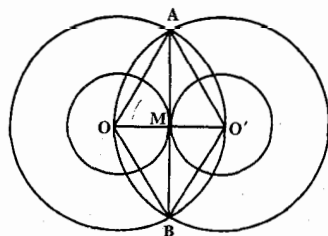
۳۷۵. چهار نقطه در صفحه که هیچ سه تایی همخط نیستند، در نظر بگیرید. ثابت کنید، چهار دایره پایی که هریک نظیر یکی از نقطه‌ها نسبت به مثلی است که رأسهای سه نقطه باقیمانده هستند، یک نقطه مشترک دارند.

۴.۲.۴. خط و دایره

۳۷۶. چهار دایره به شعاعهای برابر از نقطه A می‌گذرند. ثابت کنید که سه پاره خط که دو انتهای آنها از A متمایز هستند (دو سر هر پاره خط به یک دایره متعلق نیستند)؛ در یک نقطه به هم می‌رسند.

۵.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۷۷. دو دایره متساوی (O) و (O') در نقطه M مماس خارج هستند. به مرکزهای O و O' و به شعاع OO' دو دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کنند.



۱. ثابت کنید، AB از نقطه M می‌گذرد.
۲. ثابت کنید که چهارضلعی AOBO' لوزی است.

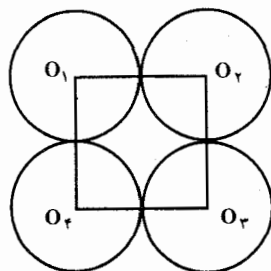
۳.۴. پنج دایره و بیشتر

۴.۳.۱. تعریف و قضیه

در این قسمت مسأله‌های مربوط به پنج دایره و یا بیشتر از پنج دایره مورد بررسی قرار می‌گیرد. دایره‌ها ممکن است شعاع برابر داشته باشند و یا شعاعهایشان برابر نباشند. همچنین مرکز دایره‌ها می‌توانند همخط و یا ناهمخط باشند.

۴.۳.۲. شعاع

۳۷۸. چهار دایره به شعاع ۴ سانتیمتر دایره دو برهم مناسند. شعاع دایره‌ای را بیابید که بر این چهار دایره مماس است.



۴.۳.۳. نقطه و دایره

۳۷۹. از پنج دایره مفروض، هر چهار دایره، از یک نقطه می‌گذرند. ثابت کنید، نقطه‌ای وجود دارد که هر پنج دایره از آن می‌گذرند.

المیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۳

۳۸۰. پنج دایره، روی یک صفحه، دایره دو متقاطعند. ثابت کنید، سه تا از آنها، در یک نقطه مشترکند.

المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۳۸۱. شش دایره روی یک صفحه چنان رسم شده‌اند که، مرکز هر کدام، بیرون از سایر دایره‌ها قرار دارد. ثابت کنید، همه این شش دایره، نقطه مشترکی ندارند. (یعنی نقطه‌ای وجود ندارد که در درون یا روی محیط هر شش دایره باشد).

المیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چین، ۱۹۶۳

۳۸۲. $2k + 3$ نقطه روی صفحه‌ای داده شده‌اند، به نحوی که هیچ چهار نقطه‌ای روی محیط دایره نیستند. ثابت کنید، می‌توان سه نقطه پیدا کرد که، اگر دایره‌ای از آنها بگذرانیم، درست k نقطه در درون آن قرار می‌گیرد.

المیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

۳۸۳. چند دایره به شعاع واحد، روی صفحه‌ای واقعند. آیا درست است اگر بگوییم، همیشه می‌توانیم چند نقطه را طوری نشان کرد که، در درون هر دایره، درست یک نقطه نشان‌دار واقع باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۳۸۴. روی یک صفحه، دایره‌های غیرمقاطعی قرار دارند، به نحوی که هریک از آنها، دست کم، بر شش دایره دیگر مماس است. ثابت کنید، این دایره‌ها، مجموعه‌ای نامتناهی را تشکیل می‌دهند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، لهستان، ۱۹۷۸

۳۸۵. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را که از نقطه ثابتی می‌گذرند و شعاع ثابتی دارند، تعیین کنید.

۴.۳.۴. کمان

۳۸۶. n دایره مختلف، و هر کدام به شعاع واحد، روی صفحه‌ای رسم شده‌اند. ثابت کنید، دست کم روی محیط یکی از دایره‌ها، می‌توان کمانی پیدا کرد که طولی کمتر از $\frac{2\pi}{n}$ نداشته باشد و درضمن، شامل هیچ نقطه‌ای از محیط دایره‌های دیگر نباشند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۲

۵.۳.۴. قطر

۳۸۷. ۱۰۰ نقطه روی صفحه‌ای قرار دارند. ثابت کنید، مجموعه‌ای متناهی از دایره‌ها وجود دارد که با سه شرط زیر سازگار باشد.

۱. هریک از نقطه‌های داده شده در داخل یکی از دایره‌ها باشد.
۲. هر دو نقطه از سطح دایره‌های مختلف، فاصله‌ای بیش از واحد داشته باشند.
۳. مجموع قطرهای همه دایره‌ها، کمتر از ۱۰۰ باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۷

۳۸۸. ۱۰۰ نقطه روی صفحه داده شده است. ثابت کنید، این نقطه‌ها را می‌توان با چند دایره غیرمقاطع پوشاند، به نحوی که مجموع قطرهای این دایره‌ها، کوچکتر از ۱۰۰ و فاصله بین هر دو دایره بیشتر از واحد باشد (فاصله بین دو دایره غیرمقاطع، به فاصله بین نزدیکترین نقطه‌های آنها گفته می‌شود).

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۶

۴.۳.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۸۹. شش دایره روی صفحه رسم شده است. درضمن دایره اول بر دایره ششم و دوم مماس است. دایره دوم بر دایره اول و سوم، دایره سوم بر دایره دوم و چهارم مماس است و غیره. ثابت کنید، دایره تازه‌ای وجود دارد که هر شش دایره داده شده را قطع می‌کند.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۸

۳۹۰. دایره‌ای به شعاع R مفروض است. در دیسک‌هایی به شعاع $\frac{R}{3}$ مماس درونی بر این دایره در نظر می‌گیریم. ثابت کنید، تعدادی از این دیسک‌ها را می‌توان جابه‌جا کرد به قسمی که بر دایره مماس درون بمانند و بر یکدیگر مماس برون گردند. تعداد این دیسک‌ها چند است؟

۳۹۱. ثابت کنید، با ۷ دایره به شعاع واحد، می‌توان دایره‌ای به شعاع ۲ را به طور کامل پوشاند، ولی با این ۷ دایره، نمی‌توان دایره‌ای به شعاع بزرگتر از ۲ را پوشاند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۳۹۲. صفحه را به چند دایره تقسیم کرده‌ایم که، در بین آنها، دایره‌های متقاطع هم وجود دارد، ولی یکی در درون دیگری نیست. ثابت کنید، قطعه‌هایی را که، به این ترتیب، از کاغذ جدا شده‌اند، نمی‌توان به صورت چند دایره غیرمتقاطع درآورد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۳۹۳. n نقطه در روی صفحه داده شده است، به طوری که فاصله بین هر دو نقطه از آنها بزرگتر یا مساوی ۱ است. ثابت کنید، تعداد جفتهایی از این نقطه‌ها که فاصله آنها دقیقاً مساوی یک باشد، از $3n$ تجاوز نمی‌کند.

مرحله اول هفتمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۸

بخش ۵

• دایره و مثلث

۱.۵. دایره محیطی مثلث

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

۲.۱.۵. شعاع

۳.۱.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۱.۵. نقطه درون دایره

۲.۳.۱.۵. نقطه روی دایره

۳.۳.۱.۵. نقطه برون دایره

۴.۳.۱.۵. نقطه های همدايره

۵.۳.۱.۵. نقطه های همخط

۴.۱.۵. کمان

۵.۱.۵. وتر

۶.۱.۵. قطر

۷.۱.۵. زاویه

۱.۷.۱.۵. اندازه زاویه

۲.۷.۱.۵. رابطه بین زاویه ها

۸.۱.۵. پاره خط

۱.۸.۱.۵. اندازه پاره خط

۲.۸.۱.۵. رابطه بین پاره خطها

۹.۱.۵. خطهای: موازی، عمودبرهم، نیمساز، ...

۱.۹.۱.۵. خطها موازی اند

- ۲.۹.۱.۵. خطها برهم عمودند
- ۳.۹.۱.۵. خط نیمساز است
- ۴.۹.۱.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد
- ۵.۹.۱.۵. خطها همرسند
- ۶.۹.۱.۵. خط مماس بر دایره است
- ۱۰.۱.۵. خط سیمسون
- ۱.۱۰.۱.۵. تعریف و قضیه
- ۲.۱۰.۱.۵. نقطه و دایره
- ۳.۱۰.۱.۵. زاویه
- ۴.۱۰.۱.۵. پاره خط
- ۵.۱۰.۱.۵. خطهای: موازی، عمودبرهم، نیمساز، ...
- ۱.۵.۱۰.۱.۵. خطها موازی اند
- ۲.۵.۱۰.۱.۵. خطها برهم عمودند
- ۳.۵.۱۰.۱.۵. خط نیمساز است
- ۴.۵.۱۰.۱.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد
- ۵.۵.۱۰.۱.۵. خطها همرسند
- ۶.۱۰.۱.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
- ۱۱.۱.۵. شکل های ایجاد شده
- ۱۲.۱.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
- ۱۳.۱.۵. مسأله های ترکیبی

۲.۵. دایره های محاطی مثلث

- ۱.۲.۵. تعریف و قضیه
- ۲.۲.۵. شعاع
- ۱.۲.۲.۵. اندازه شعاع
- ۲.۲.۲.۵. رابطه بین شعاعها

۳.۲.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۲.۵. نقطه روی دایره

۲.۳.۲.۵. نقطه های همخط

۳.۳.۲.۵. نقطه های همدایره

۴.۲.۵. قطر

۵.۲.۵. زاویه

۱.۵.۲.۵. اندازه زاویه

۶.۲.۵. پاره خط

۱.۶.۲.۵. اندازه پاره خط

۲.۶.۲.۵. رابطه بین پاره خطها

۷.۲.۵. خطهای: موازی، عمودبرهم، نیمساز، ...

۱.۷.۲.۵. خط نیمساز است

۲.۷.۲.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۳.۷.۲.۵. خطها همرسند

۴.۷.۲.۵. خط مماس بر دایره است

۸.۲.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۹.۲.۵. مسأله های ترکیبی

۳.۵. دایره های محیطی و محاطی مثلث

۱.۳.۵. تعریف و قضیه

۲.۳.۵. شعاع

۱.۲.۳.۵. اندازه شعاع

۲.۲.۳.۵. رابطه بین شعاعها

۳.۳.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۵. نقطه درون دایره

۲.۳.۳.۵. نقطه روی دایره

۵. ۳. ۳. ۳. نقطه برون دایره

۵. ۳. ۳. ۴. نقطه های همدايره

۵. ۳. ۳. ۵. نقطه های همخط

۵. ۳. ۴. قطر

۵. ۳. ۵. زاویه

۵. ۳. ۶. پاره خط

۵. ۳. ۶. ۱. رابطه بین پاره خطها

۵. ۳. ۷. خطهای: موازی، عمودبرهم، نیمساز، همرس، ...

۵. ۳. ۷. ۱. خطها همرسند

۵. ۳. ۷. ۲. خط مماس بر دایره است

۵. ۳. ۸. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۵. ۳. ۹. مسأله های ترکیبی

۵. ۴. دایره های نه نقطه، بروکارد، لوموان، ...

۵. ۴. ۱. دایره نه نقطه

۵. ۴. ۱. ۱. تعریف و قضیه

۵. ۴. ۱. ۲. شعاع

۵. ۴. ۱. ۳. نقطه و دایره

۵. ۴. ۱. ۳. ۱. نقطه روی دایره

۵. ۴. ۱. ۳. ۲. نقطه های همدايره

۵. ۴. ۱. ۳. ۳. نقطه های همخط

۵. ۴. ۱. ۴. کمان

۵. ۴. ۱. ۵. پاره خط

۵. ۴. ۱. ۶. زاویه

۵. ۴. ۱. ۷. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۵. ۴. ۱. ۷. ۱. خطها برهم عمودند

۵. ۴. ۱. ۷. ۲. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۵. ۴. ۱. ۷. ۳. خطها هم‌رسند

۵. ۴. ۱. ۷. ۴. خطها پاد موازی‌اند

۵. ۴. ۱. ۸. شکل‌های ایجاد شده

۵. ۴. ۱. ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵. ۴. ۱. ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۵. ۴. ۲. دایره بروکارد

۵. ۴. ۱. ۲. تعریف و قضیه

۵. ۴. ۲. ۲. نقطه و دایره

۵. ۴. ۲. ۳. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۵. ۴. ۲. ۱. خطها موازی‌اند

۵. ۴. ۲. ۲. خطها هم‌رسند

۵. ۴. ۲. ۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵. ۴. ۳. دایره لوموان

۵. ۴. ۱. ۳. تعریف و قضیه

۵. ۴. ۲. ۳. نقطه و دایره

۵. ۴. ۱. ۲. ۳. نقطه‌های هم‌دایره

۵. ۴. ۲. ۲. ۳. نقطه‌های هم‌خط

۵. ۴. ۲. ۳. ۳. نقطه‌های دیگر

۵. ۴. ۳. ۳. پاره‌خط

۵. ۴. ۳. ۴. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۵. ۴. ۱. ۴. ۳. خطها هم‌رسند

۵. ۴. ۲. ۴. ۳. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۵. ۴. ۳. ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵. ۴. ۳. ۶. مسأله‌های ترکیبی

۵. ۴. ۴. دایره تیپلور

۱.۴.۴.۵. تعریف و قضیه

۵.۴.۵. دایره آدامس

۱.۵.۴.۵. تعریف و قضیه

۶.۴.۵. دایره آپولونیوس

۱.۶.۴.۵. تعریف و قضیه

۵.۵. دایره‌های دیگر و مثلث

۱.۵.۵. تعریف و قضیه

۲.۵.۵. شعاع

۳.۵.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۵.۵. نقطه درون دایره

۲.۳.۵.۵. نقطه روی دایره

۳.۳.۵.۵. نقطه‌های هم‌دایره

۴.۳.۵.۵. نقطه‌های هم‌خط

۴.۵.۵. زاویه

۱.۴.۵.۵. اندازه زاویه

۲.۴.۵.۵. رابطه بین زاویه‌ها

۵.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۵. اندازه پاره‌خط

۲.۵.۵.۵. رابطه بین پاره‌خطها

۶.۵.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۱.۶.۵.۵. خطها برهم عمودند

۲.۶.۵.۵. خط نیمساز است

۳.۶.۵.۵. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۴.۶.۵.۵. خطها هم‌رسند

۵.۶.۵.۵. خط مماس بر دایره است

۷.۵.۵. شکلهای ایجاد شده

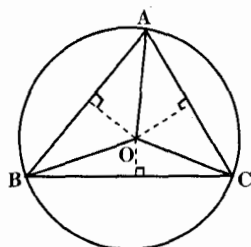
۸.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹.۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۵. دایره و مثلث

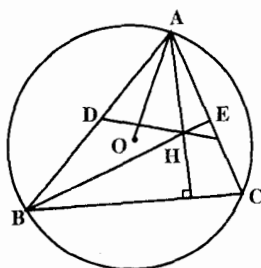
۱.۵. دایره محیطی مثلث

۱.۱.۵. تعریف و قضیه

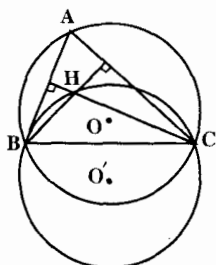


در این قسمت مطالب مربوط به دایره محیطی مثلث داده شده، و دایره محیطی مثلثهای دیگر ایجاد شده در مسأله مورد بررسی قرار می گیرد. می دانیم که دایره محیطی هر مثلث منحصر به فرد است. مرکز این دایره محل برخورد عمود منصفهای ضلعهای مثلث است.

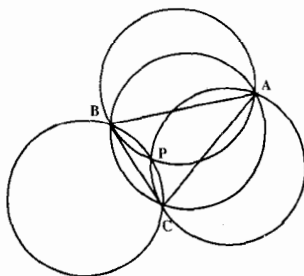
۲.۱.۵. شعاع



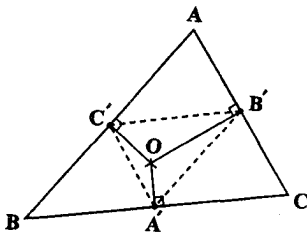
۳۹۴. اگر H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و O مرکز دایره محیطی آن باشد، روی AB و روی AC ، به ترتیب $AD = AH$ و $AE = AO$ را جدا می کنیم. ثابت کنید، DE مساوی شعاع دایره محیطی مثلث ABC است.



۳۹۵. ثابت کنید، دایره گذرنده بر دو رأس، و نقطه تقاطع ارتفاعهای مثلث، با دایره محیطی همان مثلث هم‌نهشت است.



۳۹۶. سه دایره با هم برابر و در نقطه P مشترکند و دایره دو در سه نقطه A ، B و C یکدیگر را قطع نموده اند. ثابت کنید که نقطه P مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.



۳۹۷. اگر A' ، B' و C' بترتیب، وسطهای ضلعهای AC ، BC و AB از مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دایره‌های محیطی مثلثهای $AB'C'$ ، $BA'C'$ و $CA'B'$ مساوی‌اند و از مرکز دایرة محیطی مثلث ABC می‌گذرند.

۳.۱.۵. نقطه و دایره

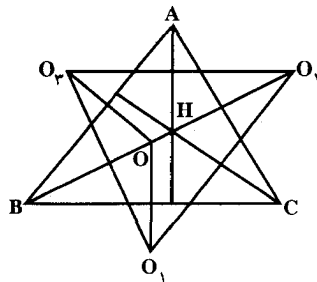
۱.۳.۱.۵. نقطه درون دایره

۳۹۸. روی ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC ، بترتیب نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1

طوری اختیار می‌شوند که $\hat{AA_1C} = \hat{BB_1A} = \hat{CC_1B}$ (زاویه‌ها در یک جهت سنجیده می‌شوند). ثابت کنید که مرکز دایرة محیطی مثلث محدود به خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 ، بر نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC منطبق است.

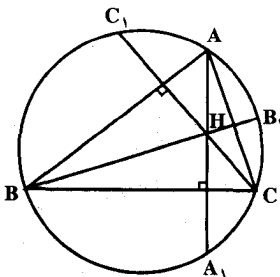
۳۹۹. ثابت کنید که مرکز دایرة محیطی هر مثلث محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که رأسهای و وسطهای ضلعهای مثلث اصلی است.

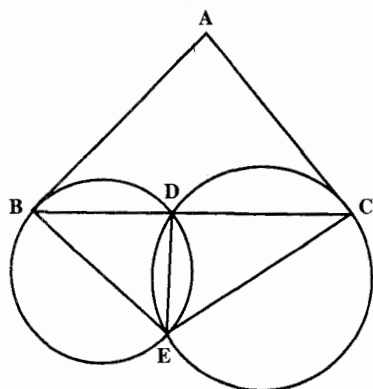
۴۰۰. مرکزهای دایره‌های محیطی چهار مثلثی که از چهار نقطه A ، B ، C و H (نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث) می‌گذرند، چهار مثلث می‌سازند که هر مرکز، محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که از سه مرکز دیگر ساخته شده است.



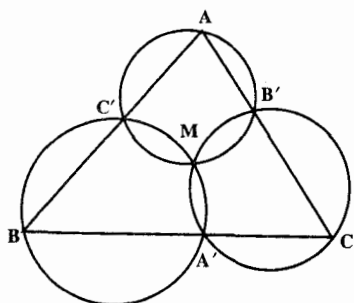
۲.۳.۱.۵. نقطه روی دایره

۴۰۱. ثابت کنید، قرینه‌های نقطه برخورد ارتفاعهای هر مثلث نسبت به ضلعهای آن، روی دایرة محیطی مثلث قرار دارند.





۴۰۲. مثلث ABC و نقطه D روی ضلع BC مفروض است. دایره‌ای از D مرور می‌دهیم که در نقطه B بر ضلع AB مماس شود، و همچنین دایره دیگری از D مرور می‌دهیم که در نقطه C بر ضلع AC مماس شود. ثابت کنید، نقطه E محل برخورد این دو دایره روی دایره محیطی مثلث ABC است.



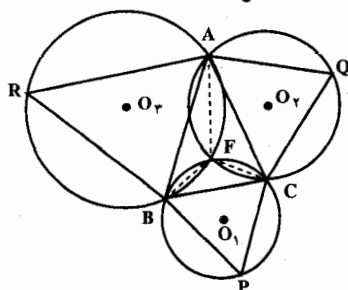
۴۰۳. نقطه‌های اختیاری A' ، B' و C' را به ترتیب روی ضلعهای BC ، AC و AB از مثلث ABC اختیار می‌کنیم. ثابت کنید دایره‌های محیطی مثلثهای $AB'C'$ ، $BC'A'$ و $CA'B'$ از یک نقطه می‌گذرند.

۴۰۴. چهار دایره محیطی چهار مثلثی که توسط ترکیبهای سه به سه از چهار خط راست داده شده تعیین می‌شوند، یک نقطه مشترک دارند. (نقطه میکوئل یا میکل Miquel)

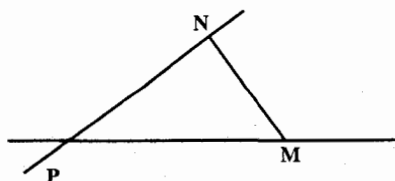
میکوئل

آگوست میکوئل Auguste Miquel، ریاضیدان فرانسوی، این قضیه را در سال ۱۸۳۸ در مجله Theorems de Geometrie منتشر کرد.

۴۰۵. هرگاه روی هریک از ضلعهای مثلث و در بیرون آن سه مثلث چنان بسازیم که مجموع زاویه‌های رأسهای غیرمجاور آنها با مثلث داده شده برابر ۱۸۰° درجه باشد، دایره‌های محیطی این مثلثها در یک نقطه مشترکند.



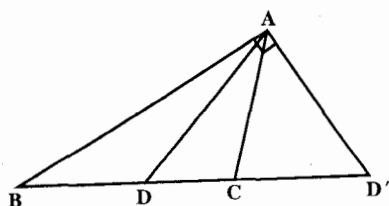
۴۰۶. ثابت کنید که اگر یکی از ضلعهای مثلثی بر خط ثابتی در صفحه قرار گیرد و محل برخورد ارتفاعهای آن بر نقطه‌ای ثابت منطبق باشد، آن وقت دایرة محیطی این مثلث هم، از نقطه‌ای ثابت می‌گذرد.



۴۰۷. روی دو خط راستی که در نقطه P به هم رسیده‌اند، دو متحرک به طور یکنواخت و با سرعتهای برابر حرکت می‌کنند. متحرکها را نقطه‌های M و N می‌نامیم. آنها در یک لحظه از نقطه P عبور نکرده‌اند. ثابت کنید، دایرة محیطی مثلث MNP همیشه از نقطه ثابت دیگری (به جز P) می‌گذرد.

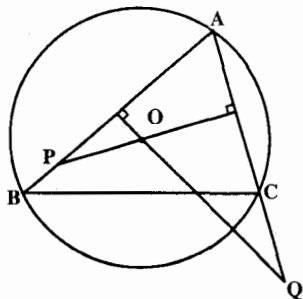
۴۰۸. ثابت کنید، نقطه میکل (میکوئل) مثلث، نقطه‌ای بر دایرة محیطی آن است، در صورتی که، سه نقطه واقع بر ضلعهای مثلث مربوطه، واقع بر یک استقامت باشند.

۳.۳.۱.۵. نقطه برون دایره



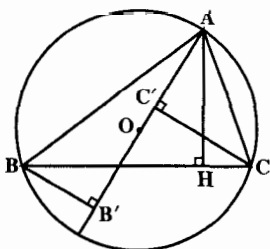
۴۰۹. نقطه‌های D و D' ، بترتیب، پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی رأس A از مثلث ABC می‌باشند. کدام یک از این دو نقطه برون دایرة محیطی مثلث واقع است؟

۴.۳.۱.۵. نقطه‌های هم‌دایره



۴۱۰. عمود منصفهای ضلعهای AB و AC از مثلث ABC ، ضلعهای AB و AC را در P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقطه‌های C ، P و Q روی دایره‌ای قرار دارند که از مرکز دایرة محیطی مثلث ABC می‌گذرد.

۴۱۱. مثلث ABC و دایرة محیطی آن را در نظر



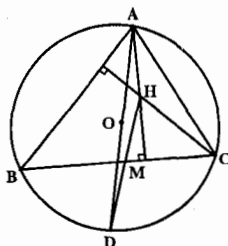
می‌گیریم. مرکز دایرة محیطی را O و پای ارتفاع وارد از A را H می‌نامیم و تصویرهای نقطه‌های B و C را روی خط AO بترتیب B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید، چهار نقطه A ، B ، B' و H روی یک دایره، و چهار نقطه A ، C ، C' و H نیز روی یک دایره واقعند.

۴۱۲. در مثلث ABC ، نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 بترتیب، روی ضلعهای BC ، CA و AB اختیار شده‌اند. فرض کنید M نقطه‌ای دلخواه در صفحه باشد. خط راست BM ، دایره‌ای را که از A_1 ، B و C_1 می‌گذرد، برای بار دوم، در نقطه B_2 قطع می‌کند. CM ، دایره‌ای را که از A_1 ، B_1 و C می‌گذرد، در نقطه C_2 و AM ، دایره‌ای را که از A ، B_1 و C_1 می‌گذرد، در نقطه A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید که نقطه‌های A_2 ، B_2 ، C_2 و M بر یک دایره‌اند.

۴۱۳. مرکزهای دایره‌های محیطی چهار مثلث حاصل از برخورد چهار خط که دوه‌دو یکدیگر را قطع کرده‌اند، روی یک دایره‌اند.

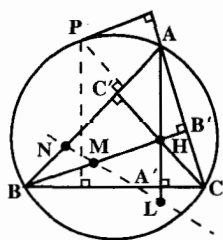
۵.۳.۱.۵. نقطه‌های همخط

۴۱۴. مثلث ABC در دایره O محاط است. نقطه برخورد ارتفاعهای آن را H می‌نامیم و A را به O وصل می‌کنیم تا امتداد آن، دایره را در D قطع کند. اگر M وسط BC باشد، ثابت کنید نقطه‌های D ، M و H بر یک استقامتند.



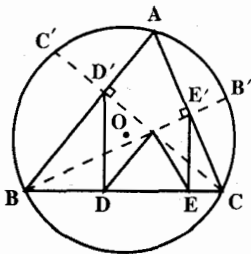
۴۱۵. نشان دهید که نقطه متقارن مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به یک رأس مثلث، و نقطه متقارن آن رأس نسبت به نقطه وسط ضلع مقابل، با مرکز دایره محیطی مثلث همخطند.

۴۱۶. ثابت کنید هرگاه نقطه میکل (میگوتل) بر دایره محیطی مثلث واقع باشد، در این صورت سه نقطه واقع بر ضلعهای مثلث مربوطه، واقع بر یک استقامتند.



۴۱۷. روی ارتفاعهای AA' ، BB' و CC' از مثلث ABC پاره‌خطهای AL ، BM و CN را بترتیب مساوی عمودهای رسم شده از نقطه P واقع بر دایره محیطی مثلث بر ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC ، اختیار می‌کنیم (با رعایت حالت پاره خط و عمود). نشان دهید که نقطه‌های M ، L و N همخطند.

۴۱۸. نشان دهید که نقطه‌های متقارن نقطه‌ای از دایره محیطی مثلث نسبت به ضلعهای مثلث، روی خطی قرار دارند که از مرکز ارتفاعی مثلث می‌گذرد.



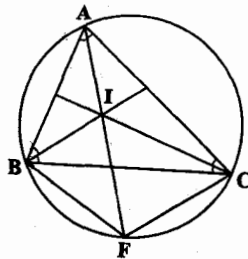
۴۱۹. از نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC خطهایی موازی AB و AC رسم می کنیم تا ضلع BC را در D و E قطع کنند. دو عمودی که از D و E بر BC اخراج می شوند، AB و AC را در D' و E' قطع می کنند که با دو انتهای دو قطری از دایره محیطی مثلث که از B و C می گذرند، واقع بر یک استقامتند (B و C مبدأ قطرها فرض می شوند).

۴.۱.۵. کمان

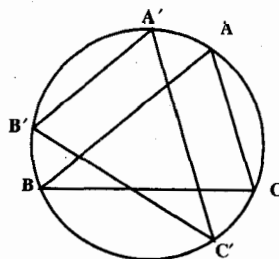
۴۲۰. ارتفاعهای مثلثی را امتداد می دهیم تا دایره محیطی آن را قطع کند. رأسهای این مثلث وسط کمانهایی هستند که به وسیله امتداد ارتفاعهای روی دایره محیطی به وجود می آید.

۵.۱.۵. وتر

۴۲۱. در مثلث ABC نیمسازهای زاویه های داخلی یکدیگر را در نقطه I قطع می کنند و نیمساز زاویه A دایره محیطی را در نقطه F تلاقی می نماید. ثابت کنید: $FB = FC = FI$.



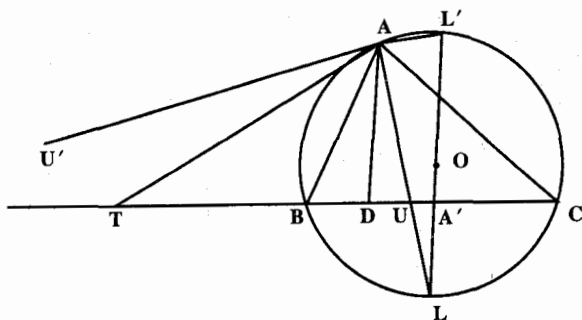
۴۲۲. دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در یک دایره محاطند. ثابت کنید، هرگاه ضلعهای زاویه های A و A' نظیر به نظیر متوازی باشند، ضلعهای BC و $B'C'$ متساوی اند.



۴۲۳. فرض کنید M و N معرف تصویرهای نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC روی نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی B باشند. با استفاده از دایره محیطی مثلث، ثابت کنید که خط MN ، ضلع AC را نصف می‌کند.

۶.۱.۵. قطر

۴۲۴. نیمساز زاویه داخلی و خارجی هر مثلث از دو انتهای قطری از دایره محیطی مثلث عبور می‌کنند که بر ضلع مقابل آن زاویه عمود باشد.



۴۲۵. اگر H محل تلاقی ارتفاعها و A' وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد، ثابت کنید $HA' \perp BC$. از انتهای قطر دایره محیطی گذرنده از رأس A می‌گذرد.

۴۲۶. دایره‌ای که از D ، پای ارتفاع AD و نقطه‌های I و I_a از مثلث ABC می‌گذرد، AD را در L هم قطع می‌کند. نشان دهید که AL با قطر دایره محیطی مثلث ABC برابر است. گزاره متناظری را در مورد دو مرکز دایره‌های محاطی خارجی بیان و آن را اثبات کنید.

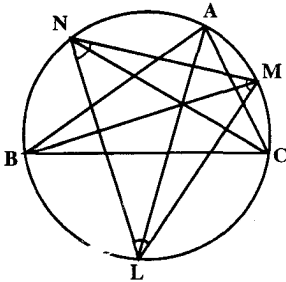
۷.۱.۵. زاویه

۱.۷.۱.۵. اندازه زاویه

۴۲۷. اندازه زاویه‌های مثلثی را پیدا کنید، در صورتی که فاصله بین مرکز دایره محیطی و محل برخورد ارتفاعهایش، نصف طول بزرگترین ضلع مثلث و برابر با کوچکترین ضلع آن باشد.

۴۲۸. زاویه بین قطری از دایره محیطی یک مثلث که از یکی از رأسهای آن مثلث می‌گذرد و ارتفاعی که از همان رأس مثلث رسم می‌شود:
(الف) با تفاضل دو زاویه دیگر مثلث برابر است.
(ب) توسط نیمساز زاویه آن رأس مثلث نصف می‌شود.

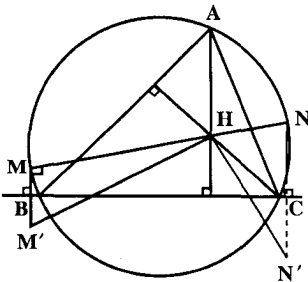
۴۲۹. تفاضل زاویه‌هایی که نیمساز داخلی یک زاویه مثلث با ضلع مقابل به آن زاویه می‌سازد،



با تفاضل زاویه‌های مجاور این ضلع برابر است.

۴۳۰. نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC را

امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی، مثلث را در L، M و N قطع کنند. اندازه‌های زاویه‌های مثلث LMN را برحسب اندازه‌های زاویه‌های مثلث ABC حساب کنید.



۴۳۱. مثلث ABC در دایره O محاط است. قطر MN از

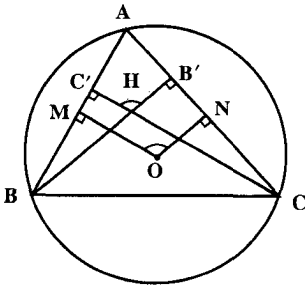
دایره O را که از نقطه H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث می‌گذرد، رسم می‌کنیم. اگر M' قرینه نقطه M و N' قرینه نقطه N نسبت به خط BC باشند، ثابت کنید زاویه $M'HN'$ قائمه است.

۲.۷.۱.۵. رابطه بین زاویه‌ها

۴۳۲. مثلث ABC و دایره محیطی آن را در نظر گرفته،

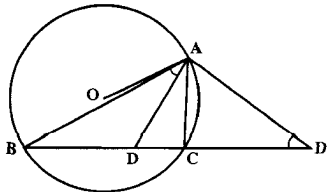
ارتفاعهای BB' و CC' را رسم می‌کنیم و محل برخورد آنها را H می‌نامیم و از نقطه O مرکز دایره محیطی عمودهای OM و ON را بترتیب بر AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

$$\widehat{B'HC'} = \widehat{MON}$$

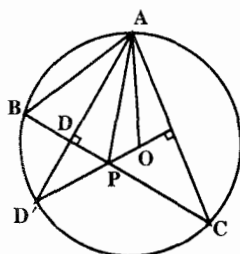


۴۳۳. مثلث ABC و دایره محیطی آن به مرکز O داده شده‌اند. نیمسازهای AD و

AD' زاویه‌های داخلی و خارجی A را رسم می‌کنیم. ثابت کنید، زاویه $AD'B$ با زاویه OAD مساوی است.

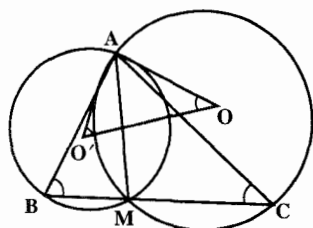


۴۳۴. زاویه‌ای که نیمساز خارجی هر زاویه مثلث با ضلع مقابل آن زاویه می‌سازد، برابر است با نصف تفاضل دو زاویه مجاور به آن ضلع.



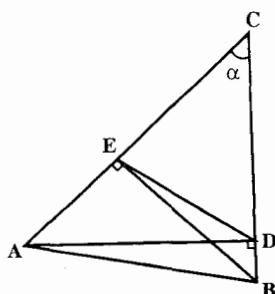
۴۳۵. اگر D' دومین نقطه برخورد ارتفاع ADD' از مثلث ABC با دایره محیطی، به مرکز O و P نقطه برخورد BC با خطی که از D' بر AC عمود می شود باشند، نشان دهید که خطهای AP و AO با نیمساز زاویه $\angle DAC$ زاویه های مساوی می سازند.

۴۳۶. نشان دهید که هر ضلع مثلث و میانه متقارن وارد بر آن، نسبت به دایره محیطی مثلث مزدوجند.



۴۳۷. مثلث ABC و نقطه غیر مشخص M واقع بر روی ضلع BC مفروضند. O و O' مرکزهای دایره های محیطی مثلثهای AMB و AMC می باشند. ثابت کنید که زاویه های مثلث ABC و AOO' برابرند.

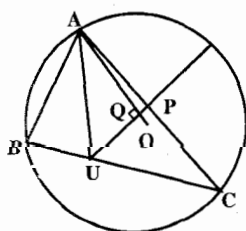
۵.۱.۸. پاره خط



۵.۱.۸.۱. اندازه پاره خط

۴۳۸. روی پاره خط AB مثلث متغیر ABC را چنان می سازیم که اندازه زاویه $\angle C$ ثابت باشد. ثابت کنید که پاره خط DE که پای دو ارتفاع نظیر رأسهای A و B را به هم وصل می کند، طول ثابتی دارد.

۴۳۹. از U ، پای نیمساز AU از مثلث ABC ، عمود UQ را بر شعاع AO از دایره محیطی

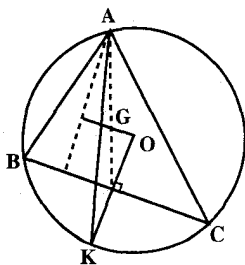


ABC رسم می کنیم تا AC را در P قطع کند. ثابت کنید که AP با AB برابر است.

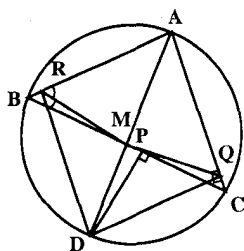
۵.۲.۸.۱. رابطه بین پاره خطها

۴۴۰. فاصله هر ضلع مثلث از مرکز دایره محیطی مثلث برابر است با نصف فاصله رأس مقابل آن ضلع از مرکز ارتفاعی مثلث.

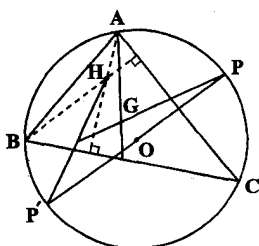
۴۴۱. فرض کنید K معرف نقطهٔ قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BC ی آن باشد. ثابت کنید که خط اوایلر مثلث ABC، پاره خط AK را نصف می کند.



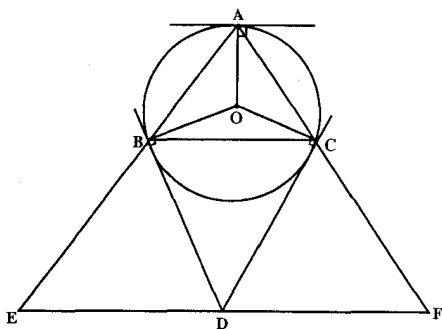
۴۴۲. میانه متقارنی که در مثلث ABC از رأس A می‌گذرد، دایره محیطی مثلث را در D قطع می‌کند، و P، Q و R تصویرهای نقطه D روی ضلعهای BC، CA و AB هستند، نشان دهید که $PQ = PR$.



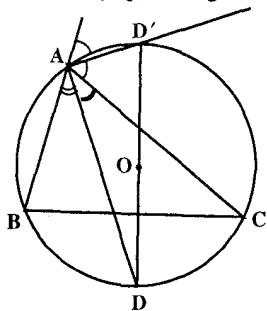
۴۴۳. ثابت کنید، خطی که مرکز ثقل یک مثلث را به نقطه P از دایره محیطی آن وصل می کند پاره خطی را که انتهای دیگر قطر گذرنده از P از دایره محیطی مثلث را به محل برخورد ارتفاعهای مثلث وصل می کند نصف می نماید.



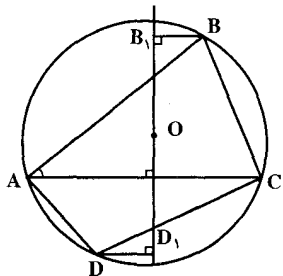
۴۴۴. DB و DC مماسهایی بر دایره محیطی (O) از مثلث ABC هستند. از نقطه برخورد این دو مماس خطی به موازات خطی که از A بر (O) مماس است رسم می کنیم. نشان دهید که اگر این خط AB و AC را در E و F قطع کند، D وسط EF است.



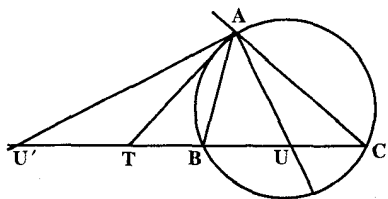
۴۴۵. نشان دهید که اگر خطی که رأس یک مثلث را به مرکز دایره محیطی آن وصل می‌کند، با ضلع مقابل موازی باشد، طول نیمساز داخلی زاویه متناظر با این رأس برابر است با طول نیمساز خارجی این زاویه و بعکس.



۴۴۶. دایره محیطی مثلث ABC و دو نیمساز زاویه های داخلی و خارجی A را رسم می کنیم تا دایره را در نقطه های D و D' قطع کنند. ثابت کنید که DD' عمود منصف ضلع BC است.



۴۴۷. در مثلث ABC از نقطه های A و C دو عمود بر ضلعهای AB و BC اخراج می کنیم تا یکدیگر را در نقطه D قطع کنند. ثابت کنید، نقطه های D و B از عمود منصف پاره خط AC به یک فاصله اند.

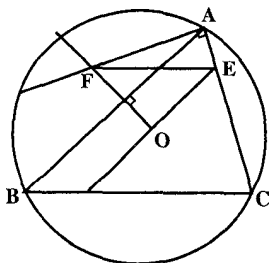


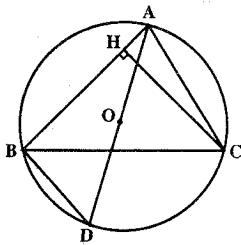
۴۴۸. اگر از A مماسی بر دایره محیطی مثلث ABC رسم کنیم تا BC را در T قطع کند و نقطه های U و U' ، بترتیب، پای نیمسازهای زاویه های درونی و بیرونی رأس A باشند، خواهیم داشت: $TA = TU = TU'$.

۵.۱.۹. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

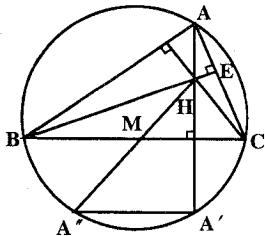
۵.۱.۹.۱. خطها موازی اند

۴۴۹. از نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، خطی به موازات ضلع AB رسم می کنیم تا ضلع AC را در نقطه E قطع کند و از O عمودی بر AB قیود می آوریم تا عمود رسم شده از رأس A بر ضلع AC را در نقطه F تلاقی نماید. ثابت کنید، EF با BC موازی است.





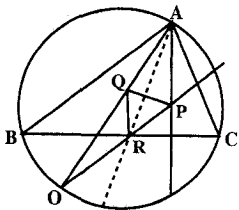
۴۵۰. مثلث ABC و دایره محیطی آن را در نظر می گیریم. ارتفاع CH و قطر AD از دایره محیطی آن را رسم می کنیم. ثابت کنید، DB با CH موازی است.



۴۵۱. در مثلث ABC نقطه H محل برخورد ارتفاعها است. ارتفاع AH دایره محیطی مثلث را در نقطه A' و خط MH که نقطه H را به نقطه M وسط ضلع BC وصل می کند، در نقطه A'' مجاور A' قطع می کند. ثابت کنید: $A'A'' \parallel BC$.

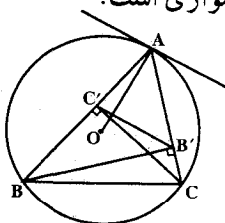
۴۵۲. نقطه های برخورد یک میانه و میانه متقارن متناظرش با دایره محیطی مثلث، خطی موازی با ضلع روبه روی رأس در نظر گرفته شده را تعیین می کنند.

۴۵۳. خطی که نقطه های برخورد دو خط همزاویه با دایره محیطی مثلث را به هم وصل می کند، با ضلع روبه رو به رأس در نظر گرفته شده، موازی است.

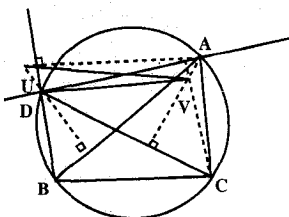


۴۵۴. P و Q دو نقطه مزدوج همزاویه دلخواه نسبت به مثلث ABC هستند. اگر AQ دایره محیطی را در O و OP ضلع BC را در R قطع کند، نشان دهید که QR با AP موازی است.

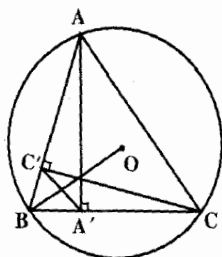
۴۵۵. نشان دهید که نیمساز هر زاویه برونی مثلث با خط واصل بین دو نقطه برخورد دایره محیطی با نیمسازهای دو زاویه برونی (درونی) دیگر مثلث، موازی است.



۴۵۶. مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید که مماس در نقطه A بر دایره محیطی این مثلث با خط $B'C'$ که B' و C' پای ارتفاعهای رأسهای B و C می باشند، موازی است.



۴۵۷. خط AD که از رأس A می گذرد، دایره محیطی مثلث ABC را در D قطع می کند. اگر U و V بترتیب مرکزهای ارتفاعی مثلثهای ABD و ACD باشند، ثابت کنید که UV با BC موازی است.



۲.۹.۱.۵ خطها بر هم عمودند

۴۵۸. ثابت کنید که در هر مثلث، خطی که پای ارتفاعهای وارد از دو رأس را به هم وصل می‌کند، بر شعاع دایره محیطی که از رأس سوم رسم شود، عمود است.

۴۵۹. مثلث ABC محاط در دایره O و خط مماس بر

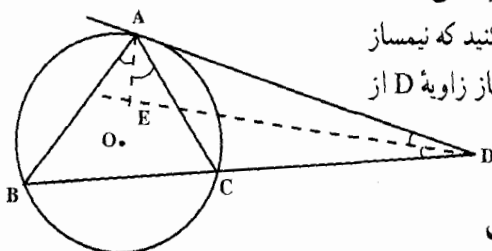
دایره در نقطه A که خط BC را در نقطه D

قطع می‌کند داده شده‌اند. زاویه‌های مثلث

ACD را محاسبه کنید و ثابت کنید که نیمساز

زاویه A از مثلث ABC بر نیمساز زاویه D از

مثلث ACD عمود است.



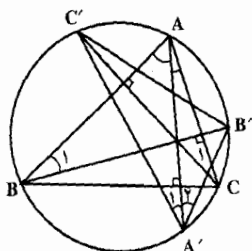
۳.۹.۱.۵ خط نیمساز است

۴۶۰. امتداد ارتفاعهای مثلث ABC، دایره محیطی

آن را در نقطه‌های A', B', و C' قطع می‌کنند.

ثابت کنید ارتفاعها، نیمسازهای زاویه‌های

مثلث A'B'C' می‌باشند.



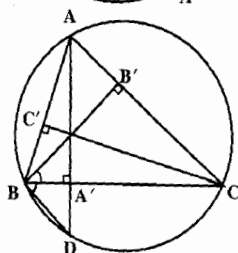
۴۶۱. مثلث ABC و دایره محیطی آن را در نظر

می‌گیریم. ارتفاعهای AA', BB', و CC'

مثلث ABC را رسم می‌کنیم و AA' را امتداد

می‌دهیم تا دایره را در نقطه D قطع کند. ثابت

کنید BC نیمساز زاویه DBB' است.



۴.۹.۱.۵ خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

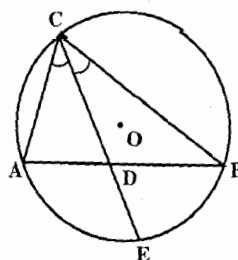
۴۶۲. در مثلث ABC که در دایره O محاط است،

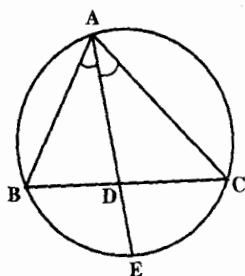
ضلع AB ثابت و رأس C در یکی از دو طرف

AB حرکت می‌کند. ثابت کنید که نیمساز زاویه

ACB همیشه از نقطه ثابتی واقع بر روی محیط

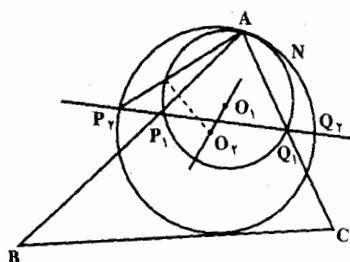
دایره می‌گذرد.





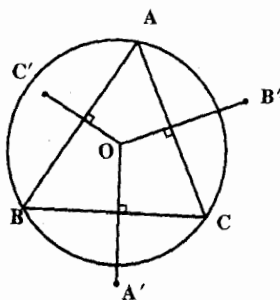
۴۶۳. در مثلث ABC دو رأس B و C ثابت می‌باشند و اندازه زاویه A نیز ثابت است. ثابت کنید که نیمساز زاویه A از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۴۶۴. قاطع متغیری ضلعهای AB و AC از مثلث ABC را در نقطه‌های P_1 و Q_1 قطع می‌کند.

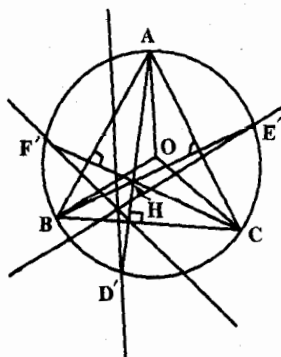


فرض کنید O_1 مرکز دایره محیطی AP_1Q_1 و O_2 مرکز دایره محیطی مثلی باشد که رأسهای آن A و نقطه‌های هم‌نوا P_1 و Q_1 هستند. نشان دهید که خط O_1O_2 از نقطه ثابتی می‌گذرد و دومین نقطه مشترک دو دایره‌ای که در نظر گرفته شد، روی دایره ثابتی قرار دارد.

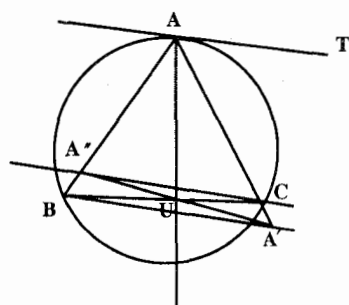
۵.۹.۱.۵. خط‌ها هم‌رسند



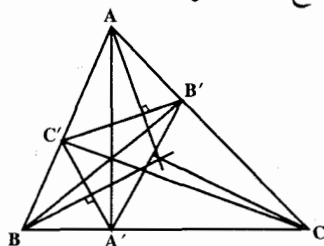
۴۶۵. مثلث ABC را در نظر گرفته، مرکز دایره محیطی آن را O و قرینه‌های نقطه O نسبت به ضلعهای AB و AC ، BC را به ترتیب A' ، B' و C' می‌نامیم. ثابت کنید پاره‌خطهای AA' ، BB' و CC' در نقطه‌ای که در وسط هریک از آنها واقع است، هم‌رسند.



۴۶۶. اگر O مرکز دایره محیطی و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد و AH ، BH و CH دایره محیطی را به ترتیب در نقطه‌های D' ، E' و F' قطع کنند، ثابت کنید خط‌هایی که از D' ، E' و F' به موازات OA ، OB و OC رسم می‌شوند، هم‌رسند.



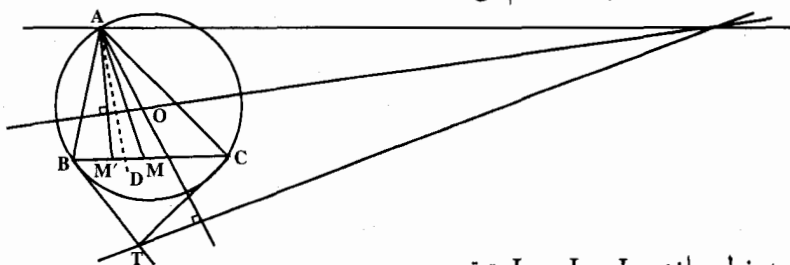
۴۶۷. از رأسهای B و C در مثلث ABC خطهایی به موازات مماسی که در A بر دایره محیطی (O) رسم شده است، رسم می‌کنیم، تا ضلعهای AC و AB را در A' و A'' قطع کند. خط A'A'' ضلع BC را در U قطع می‌کند. نشان دهید که AU و خطهای BV و CW، که متناظر AU هستند، هم‌رسمند.



۴۶۸. با استفاده از دایره محیطی مثلث، ثابت کنید، سه ارتفاع مثلث هم‌رسمند.

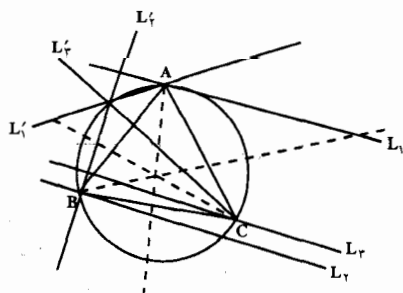
۴۶۹. مثلث ABC را در نظر گرفته، ارتفاعهای AA', BB' و CC' را رسم می‌کنیم. ثابت کنید عمودهایی که از A بر B'C' و از B بر A'C' و از C بر A'B' می‌آیند از یک نقطه می‌گذرند.

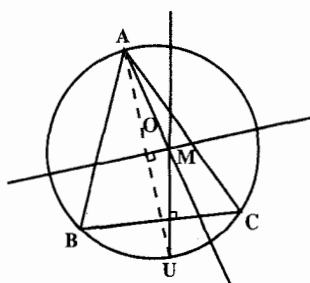
۴۷۰. نشان دهید که این خطها هم‌رسمند: خطی که از رأس A در مثلث ABC به موازات ضلع BC رسم می‌شود، خطی که از مرکز دایره محیطی (O) بر میانه متقارن گذرنده از رأس A عمود می‌شود، و خطی که از T، محل برخورد مماسهای رسم شده بر دایره محیطی مثلث در B و C، بر AO رسم می‌شود.



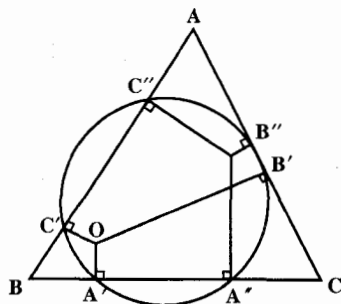
۴۷۱. سه خط موازی L_1 ، L_2 و L_3 بترتیب،

از رأسهای A و B و C ی مثلث ABC رسم شده‌اند. ثابت کنید که خطهای قرینه L_1 ، L_2 و L_3 ، بترتیب، نسبت به نیمساز زاویه‌های A، B و C، در یک نقطه واقع بر دایره محیطی مثلث ABC هم‌رسمند.



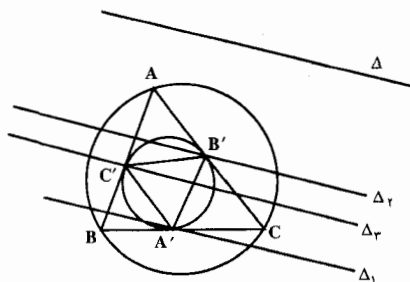


۴۷۲. نشان دهید که عمود منصف نیمساز AU از مثلث ABC، خطی که در نقطه U بر ضلع BC عمود است و قطری از دایرة محیطی که از رأس A می گذرد، همسرند.



۴۷۳. از نقطه O واقع در داخل مثلث ABC عمودهای OA', OB', و OC' را بترتیب بر ضلعهای BC، AC، و AB فرود می آوریم و دایرة محیطی مثلث A'B'C' را رسم می کنیم. اگر نقطه های دیگر برخورد این دایره با ضلعهای مثلث ABC را A'', B'', و C'' بنامیم، ثابت کنید عمودهایی که از نقطه های A'', B'', و C'' بر ضلعهای مثلث ABC اخراج می شوند از یک نقطه می گذرند.

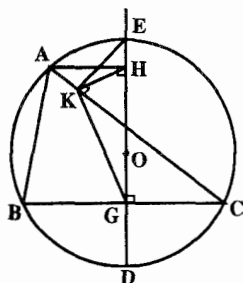
۴۷۴. وسطهای ضلعهای مثلث ABC را A', B', و C' می نامیم. از این نقطه ها، سه خط به موازات خط مفروض Δ رسم می کنیم و سپس قرینه های ضلعها را نسبت به این موازیها به دست می آوریم. ثابت کنید که آنها روی دایرة محیطی مثلث A'B'C' همرس خواهند بود.



۴۷۵. ثابت کنید خطهای اولر چهار مثلثی که از رأسها و نقطه تلاقی ارتفاعهای یک مثلث پدید می آیند، همسرند.

۵.۹.۶. خط مماس بر دایره است

۴۷۶. اگر مثلثی محاط در دایره ای مفروض، زاویه ای ثابت داشته باشد، ضلع روبه روی زاویه ثابت بر دایرة ثابتی هم مرکز با دایرة مفروض مماس خواهد بود.



۴۷۷. ABC مثلثی محاط شده در یک دایره است؛
 قطری DE از دایره است که BC را در G نصف
 می‌کند؛ از E عمود EK را بر یکی از ضلعهای
 مثلث رسم می‌کنیم و عمودی که از رأس A بر
 DE رسم می‌کنیم، DE را در H قطع می‌کند.
 نشان دهید که EK بر دایره GHK مماس است.

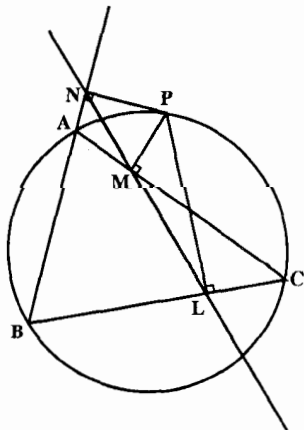
۱۰.۱.۵. خط سیمسون

۱.۱۰.۱.۵. تعریف و قضیه

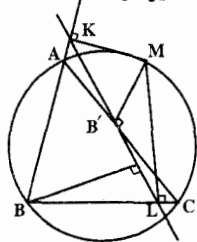
۴۷۸. **قضیه الف.** پاهای سه عمودی که از نقطه‌ای روی دایره محیطی یک مثلث بر سه ضلع
 مثلث رسم می‌شوند، همخطند.
ب. بر عکس، اگر پاهای سه عمودی که از یک نقطه بر سه ضلع یک مثلث رسم
 می‌شوند، همخط باشند، آن نقطه روی دایره محیطی مثلث قرار دارد.

رابرت سیمسون

رابرت سیمسون Robert Simson (۱۶۷۸ - ۱۷۶۸) در هندسه کارهای زیادی انجام
 داده است. خط سیمسون یا سمن از این جهت به او منسوب است که با ادراکات هندسی وی
 مطابقت دارد. اما به نظر مؤلفان کتاب بازآموزی و بازشناخت هندسه جستجوی این مسأله در
 آثار سیمسون کار بیهوده‌ای است. در حقیقت کشف این خاصیت در سال ۱۷۹۷ توسط ویلیام
 والاس William Wallace انجام گرفته است.



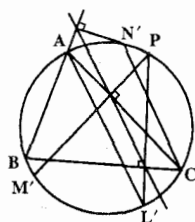
تعریف. اگر تصویر نقطه P از دایره محیطی مثلث
 ABC روی ضلعهای BC ، AC و AB را به ترتیب M ، L و
 N بنامیم، خط LMN را خط سیمسون، یا به اختصار
 سیمسون نقطه P نسبت به مثلث ABC یا برای مثلث
 ABC می‌نامند؛ گاهی LMN را خط پادک نقطه P
 می‌نامند. خط LMN را گاهی با نماد $P(ABC)$ نشان
 می‌دهند. نقطه P را قطب خط LMN برای مثلث ABC
 می‌نامند.



۴۸۶. ثابت کنید که طول تصویر ضلع AB از مثلث ABC بر خط سیمسون نظیر نقطه M ، برابر است با فاصله میان تصویرهای نقطه M روی ضلعهای AC و BC .

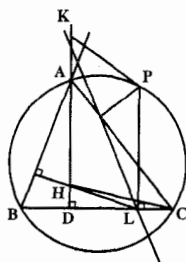
۴۸۷. دو خط سیمسون عمود بر هم، یکی از ضلعهای مثلث را در دو نقطه که نسبت به وسط آن ضلع قرینه اند (دو نقطه همنا) قطع می نمایند.

۱.۵.۱۰.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم و ...

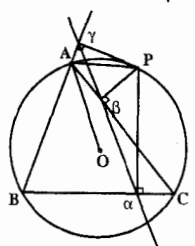


۱.۵.۱۰.۵. خطها موازی اند

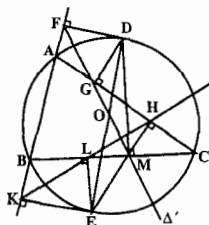
۴۸۸. اگر از نقطه P واقع بر دایره محیطی مثلث ABC سه عمود بر ضلعهای BC ، CA ، و AB رسم کنیم تا دوباره دایره محیطی را در نقطه های L' ، M' ، و N' قطع کنند، ثابت کنید که سه خط AL' ، BM' ، و CN' موازی خط سیمسون نظیر نقطه P می باشند.



۴۸۹. ۱. اگر خط سیمسون یک نقطه مثل P برای مثلث ABC ضلع BC را در L و ارتفاع AD را در K قطع کند، ثابت کنید که خط PK موازی LH است که در آن H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC است.

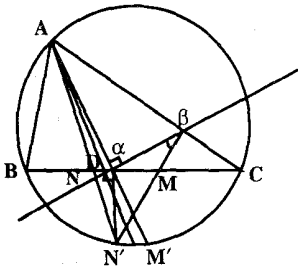


۲. اگر خط سیمسون نقطه P نسبت به مثلث ABC موازی شعاع AO از دایره محیطی آن باشد، ثابت کنید که PA موازی BC است.



۱.۵.۱۰.۲. خطها بر هم عمودند

۴۹۰. ثابت کنید که در هر مثلث خطهای سیمسون مربوط به دو سر یک قطر دایره محیطی، بر یکدیگر عمودند.



۴۹۱. میانه و میانه متقارن رسم شده از رأس A در مثلث ABC ، دایره محیطی مثلث را در M' و N' قطع می کنند. نشان دهید که خطهای سیمسون M' و N' به ترتیب بر AN' و AM' عمودند.

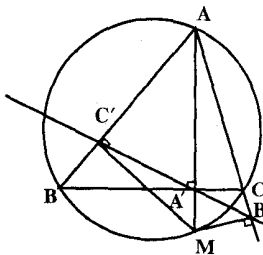
۴۹۲. هرگاه دو مثلث محاط در یک دایره و قرینه یکدیگر نسبت به مرکز آن دایره باشند، ثابت کنید که دو خط سیمسون هر نقطه واقع بر دایره برای این دو مثلث، بر هم عمودند.

۳.۵.۱۰.۱.۵ خط نیمساز است

۴۹۳. اگر Q, P, R محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث ABC با دایره محیطی آن باشد ثابت کنید که خطهای سیمسون نقطه های Q, P, R برای مثلث ABC نیمسازهای خارجی مثلث T' که رأسهای آن وسطهای ضلعهای مثلث ABC اند، می باشد. خطهای سیمسون نقطه های P', Q', R' محل تلاقی نیمسازهای خارجی مثلث را با دایره محیطی آن برای مثلث، مطالعه کنید. همچنین مسأله را برای سه نیمساز هم رس مثلث، یا سه نیمساز که یک مثلث می سازند، مطالعه کنید.

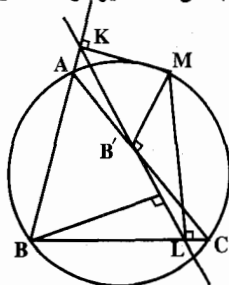
۴.۵.۱۰.۱.۵ خط از نقطه ثابتی می گذرد

۴۹۴. ثابت کنید که خط سیمسون نقطه ای که ادامه یک ارتفاع مثلث روی دایره محیطی آن به وجود می آورد برای این مثلث از پای ارتفاع می گذرد و آنتی پارالل ضلع نظیر آن ارتفاع نسبت به دو ضلع دیگر مثلث می باشد.



۴۹۵. یک مثلث متغیر، دایره محیطی و مرکز ثقل ثابت دارد. ثابت کنید خط سیمسون یک نقطه واقع بر این دایره برای مثلث، از نقطه ثابتی می گذرد.

۴۹۶. ثابت کنید اگر خط سیمسون یک نقطه برای یک مثلث، از انتهای دیگر قطری که از آن نقطه می گذرد، بگذرد، از مرکز ثقل مثلث نیز می گذرد و برعکس.

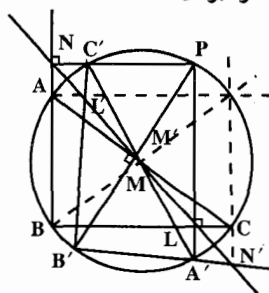


۴۹۷. مثلث متغیر ABC محاط در یک دایره ثابت است. رأس A و امتداد نیمساز داخلی زاویه A ثابتند. ثابت کنید که خط سیمسون نقطه P واقع بر دایره برای مثلث ABC امتدادی ثابت دارد.

۵.۵.۱۰.۱.۵. خطها هم‌رسانند

۴۹۸. فرض کنید A_1, B_1, C_1 نقطه‌هایی روی دایره محیطی مثلث ABC باشند، به طوری که $\widehat{AA_1} + \widehat{BB_1} + \widehat{CC_1} = 2k\pi$ (همه کمانها در یک جهت سنجیده می‌شوند و k عددی درست است)، ثابت کنید که خطهای سیمسون مثلث ABC، نظیر نقطه‌های A_1, B_1, C_1 ، در یک نقطه به هم می‌رسند.

۴۹۹. چهار خط سیمسون هر نقطه از چهار نقطه واقع بر یک دایره برای مثلث ساخته شده از سه نقطه دیگر، از یک نقطه می‌گذرند.



۵۰۰. عمودهایی که از یک نقطه واقع بر دایره محیطی مثلث ABC بر ضلعهای BC، CA و AB از آن فرود می‌آیند بترتیب آنها را در L، M و N و دایره محیطی را در A', B', C' قطع می‌کنند، خط سیمسون LMN خطهای $A'B', B'C', C'A'$ را بترتیب در L', M', N' قطع می‌کند. ثابت کنید که خطهای AL', BM', CN' هم‌رسانند.

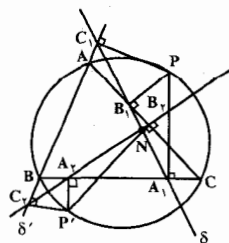
۵.۶.۱۰.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت (خط سیمسون)

۵۰۱. آیا ممکن است که نقطه‌ای بر خط سیمسون نظیر خود واقع باشد؟ در این صورت این خط کدام است؟

۵۰۲. ثابت کنید اگر سه مثلث در یک دایره محاط شده باشند، سه خط سیمسون هر نقطه‌ای از دایره نسبت به این مثلثها، مثلثی از نوع معین می‌سازند. چند حالت خاص را بررسی کنید.

۵۰۳. رأسهای B و C و دایره محیطی O از مثلث متغیر ABC ثابت است و P و P' در نقطه ثابت از دایره O می‌باشند.

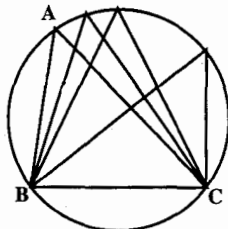
ثابت کنید محل تقاطع دو خط سیمسون دو نقطه P و P' نسبت به مثلث یک دایره رسم می‌نماید.



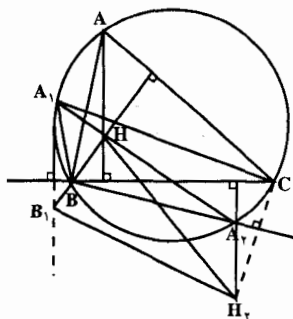
۱۱.۱.۵. شکلهای ایجاد شده

۵۰۴. در مثلث ABC ، دو نیمساز را رسم کرده ایم که از رأسهای A و B گذشته اند؛ سپس از رأس C ، خطهای راستی موازی با این دو نیمساز کشیده ایم. محل برخورد این خطهای راست با نیمسازها را، بترتیب، D و E می نامیم. معلوم شد دو خط راست DE و AB با هم موازی اند. ثابت کنید، مثلث ABC متساوی الساقین است.

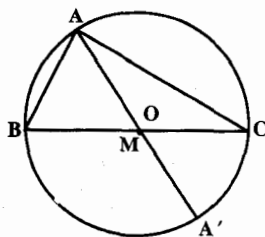
المیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۳



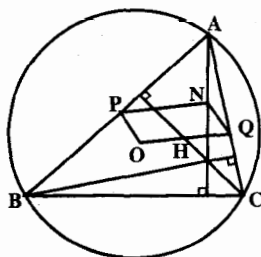
۵۰۵. بین همه مثلثهایی که قاعده و اندازه زاویه رأس آنها ثابت است، مطلوب است تعیین مثلثی که بیشترین مساحت را داراست.



۵۰۶. خط واصل بین مرکز ارتفاعی مثلث ABC و وسط ضلع BC ، دایره محیطی مثلث ABC را در نقطه های A_1 و A_2 قطع می کند. نشان دهید که مرکزهای ارتفاعی سه مثلث A_1BC ، A_2BC و A_2BC رأسهای یک مثلث قائم الزاویه هستند.

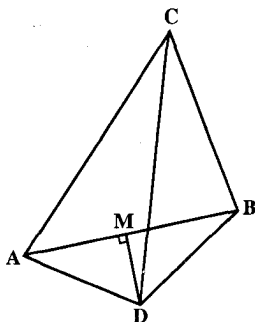


۵۰۷. هرگاه در مثلث مختلف الاضلاعی، میانه نظیر یک رأس از مرکز دایره محیطی آن مثلث بگذرد، آن مثلث قائم الزاویه است.



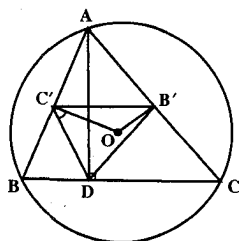
۵۰۸. مثلث ABC و دایره محیطی آن را در نظر می گیریم و محل برخورد ارتفاعهای آن را H می نامیم. ثابت کنید خطی که نقطه N وسط AH را به نقطه P وسط AB وصل می کند، با خطی که مرکز دایره محیطی را به نقطه Q وسط AC وصل می نماید، موازی است و چهار ضلعی $OPNQ$ متوازی الاضلاع است.

۵۰۹. خطی که در H ، مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، بر ارتفاع HC از مثلث عمود می‌شود، دایرهٔ محیطی HBC را در P قطع می‌کند. نشان دهید که $ABPH$ متوازی الاضلاع است.

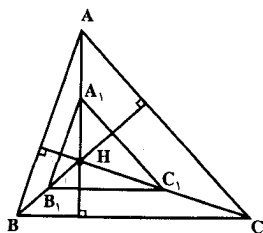


۵۱۰. نیمساز زاویهٔ درونی C از مثلث ABC عمود منصف AB را در نقطهٔ D قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی $ADBC$ محاطی است.

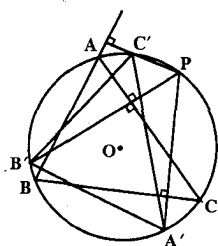
۵.۱۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



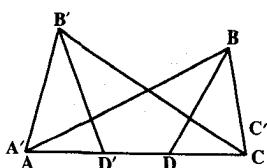
۵۱۱. اگر D پای ارتفاع نظیر ضلع BC و نقطه‌های C' و B' تصویرهای مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC روی ضلعهای AC و AB باشند، ثابت کنید مثلث $DB'C'$ با مثلث اولر برابر است.



نقطه‌های اولر و مثلث اولر. وسطهای پاره خطهایی که H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث را به A ، B و C رأسهای مثلث ABC وصل می‌کنند، نقطه‌های اولر (A_1, B_1, C_1) که بترتیب، وسطهای HA ، HB و HC می‌باشند) و مثلی را که این سه نقطه رأسهای آن می‌باشند، مثلث اولر (مثلث $A_1B_1C_1$) می‌نامند.



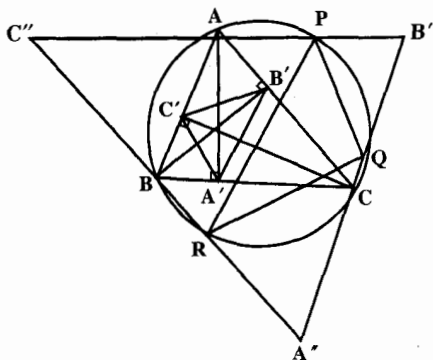
۵۱۲. از نقطهٔ P روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC عمودهایی بر ضلعهای مثلث رسم می‌کنیم تا (O) را مجدداً در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع کند. نشان دهید که دو مثلث ABC و $A'B'C'$ همنهشتند و نسبت به یک محور متقارند.



۵۱۳. ثابت کنید هرگاه در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ضلعهای AC و $A'C'$ و زاویه‌های B و B' و نیمسازهای BD و $B'D'$ برابر باشند، دو مثلث همنهشتند.

۵۱۴. ثابت کنید که نقطه های قرینه مرکز دایره محیطی مثلث نسبت به وسط میانه های آن، روی ارتفاعهای مثلث قرار دارند.

۵۱۵. بین مثلثهایی که قاعده و زاویه روبه روی آن قاعده ثابت است، کدام مثلث ماکزیم محیط را دارد؟



۵۱۶. ضلعهای مثلث پادمکمل مثلث ABC دایره محیطی مثلث ABC را در نقطه های P، Q و R قطع می کنند. نشان دهید که مساحت مثلث PQR چهار برابر مساحت مثلث پادک مثلث ABC است.

مثلث پادمکمل. مثلی است که از برخورد سه خط که از رأسهای مثلث

موازی ضلعهای روبه رویشان رسم می شوند، به وجود می آید.

مثلث پادک یا مثلث ارتفاعی. مثلی است که رأسهایش پای ارتفاعهای مثلثند.

۵۱۷. مثلث ABC را در نظر می گیریم و مرکز دایره محیطی آن را O و پای ارتفاع نظیر ضلع BC را H می نامیم. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه های BAC و HAO بر هم منطبق هستند.

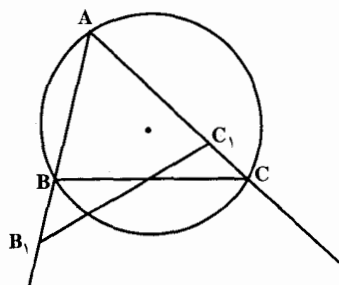
۵۱۸. نشان دهید که نقطه های برخورد سه میانه متقارن (شبه میانه) یک مثلث با دایره محیطی مثلث، رأسهای مثلی هستند که میانه های متقارنشان همان میانه های متقارن مثلث داده شده هستند.

۵۱۹. پاره خط BC با طول ثابت طوری حرکت می کند

که دو سرش روی دو خط ثابت AB و AC

می مانند. نشان دهید که دایره محیطی مثلث

ABC بر دایره ثابتی مماس است.

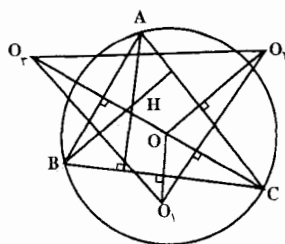


۱۳.۱.۵. مسأله های ترکیبی

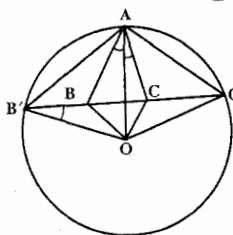
۵۲۰. اگر نقطه M (نقطه میکل) روی دایره محیطی مثلث قرار داشته باشد، آن گاه خطهای همزاویه AM، BM و CM موازی اند و بر عکس، اگر مزدوجهای همزاویه خطهای AM، BM و CM موازی باشند، آن گاه نقطه M روی دایره محیطی مثلث قرار دارد.

۵۲۱. فرض کنید نقطه های A_1 ، B_1 و C_1 ، قرینه نقطه P نسبت به ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC باشند. ثابت کنید که :

الف. دایره های محیطی مثلثهای A_1BC ، AB_1C و ABC_1 در یک نقطه مشترکند ؛
ب. دایره های محیطی مثلثهای A_1B_1C ، A_1BC_1 و AB_1C_1 در یک نقطه مشترکند.



۵۲۲. نشان دهید که مرکزهای دایره های محیطی مثلثهای HBC ، HAC و HAB از یک گروه مرکز ارتفاعی $HABC$ ، مثلثی همنهشت با مثلث ABC تشکیل می دهند ؛ ضلعهای دو مثلث موازی اند، و نقطه H مرکز دایره محیطی مثلث جدید است ؛ همچنین، مرکز دایره محیطی مثلث ABC مرکز ارتفاعی مثلث جدید است.



۵۲۳. در مثلث ABC ضلع BC را از طرف C به اندازه $CC' = AB$ و از طرف B به اندازه $BB' = AC$ امتداد می دهیم. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث $AB'C'$ باشد :
۱. ثابت کنید $\hat{OAB} = \hat{OB'B}$ است.

۲. ثابت کنید خط AO نیمساز زاویه BAC است.

۵۲۴. a. مثلثهای T_1 و T_2 در دایره ای محاطند. در ضمن، رأسهای مثلث T_1 در وسط کمانهایی از دایره قرار دارند که به وسیله رأسهای مثلث T_2 به وجود آمده اند. ثابت کنید، در شش ضلعی $T_1 \cap T_2$ ، قطرهایی که رأسهای روبه رو را به هم وصل می کنند، با ضلعهای مثلث T_1 موازی اند و در یک نقطه به هم می رسند.

b. پاره خط راستی که وسط کمانهای AB و AC از دایره محیطی مثلث ABC را به هم وصل می کند، ضلعهای AB و AC را در نقطه های D و K قطع می کند. ثابت کنید، نقطه های A ، D ، K و O (مرکز دایره محاطی مثلث ABC)، رأسهای یک لوزی اند.

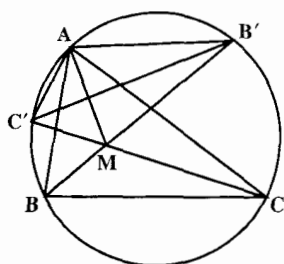
المیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۷

۵۲۵. همه مثلثهای محاط در دایره داده شده را در نظر بگیرید که یک ضلع آنها قطر دایره باشد. از ویژگیهای زیر که درباره این مثلثها بیان شده یکی و تنها یکی صحیح است. کدام یک؟
الف. هیچ یک از این مثلثها قائم الزاویه نیست.

ب. همه این مثلثها مساحتی برابر دارند.

ج. همه این مثلثها محیطی برابر دارند.

د. از این مثلثها آن که بیشترین مساحت را دارد، متساوی الساقین است.



۵۲۶. مثلث ABC محاط در دایره O مفروض است. نیمسازهای دو زاویه B و C یکدیگر را در نقطه M و دایره را در نقطه های B' و C' قطع می کنند. ثابت کنید:

۱. مثلث $AB'C'$ با مثلث $MB'C'$ همنهشت است.

۲. $B'C'$ عمود منصف پاره خط AM می باشد.

۵. ۲. دایره های محاطی مثلث

۵. ۲. ۱. تعریف و قضیه

می دانیم که هر مثلث چهار دایره محاطی دارد. یکی دایره محاطی درونی مثلث و سه دایره دیگر، دایره های محاطی برونی مثلث می باشند. مرکزهای این دایره ها، نقطه های برخورد نیمسازهای زاویه های درونی و برونی مثلث می باشند. عموماً I_a, I_b, I_c را به ترتیب مرکزهای دایره های محاطی درونی و مماس بر ضلعهای a, b, c می نامند.

قطعه های ضلعهای مثلث محصور بین رأسها و نقطه های تماس دایره های محاطی

۵۲۷. نمادگذاری. نقطه های تماس چهار دایره سه مماس $(I), (I_a), (I_b), (I_c)$ از مثلث ABC با ضلع BC را X_a, X_b, X_c می نامیم مگر این که خلاف آن را ذکر کنیم. برای ضلعهای CA و AB به ترتیب حرفهای Y و Z را به کار می بریم.

قضیه. فاصله هر رأس مثلث از نقطه تماس دایره محاطی داخلی با ضلعی که از آن رأس می گذرد برابر است با نصف محیط مثلث منهای طول ضلع مقابل آن رأس.

۵۲۸. قضیه. فاصله هر رأس مثلث از نقطه تماس دایره محاطی خارجی نسبت به آن رأس با ضلعی که از آن رأس می گذرد، برابر نصف محیط مثلث است.

۵۲۹. شعاعهای سه مماس

نمادگذاری. شعاع دایره محاطی داخلی یا به اختصار، شعاع داخلی مثلث را با r و شعاع دایره های محاطی خارجی، یا به اختصار، شعاعهای خارجی نسبت به رأسهای A, B و C از مثلث ABC را به ترتیب با r_a, r_b, r_c نشان می دهیم، مگر این که خلاف آن را ذکر کنیم. این چهار شعاع را شعاعهای سه مماس مثلث ABC می نامیم.

بخش ۵ / دایره و مثلث □ ۱۶۱

قضیه. شعاع دایره محاطی داخلی مثلث برابر است با مساحت مثلث، تقسیم بر نصف محیط مثلث.
 ۵۳۰. قضیه. شعاع دایره محاطی خارجی مثلث برابر است با مساحت مثلث، تقسیم بر تفاضل نصف محیط و ضلعی از مثلث که دایره محاطی خارجی بر آن مماس است.

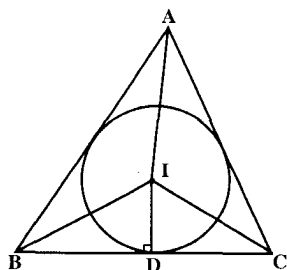
۵.۲.۲. شعاع

۵.۲.۲.۱. اندازه شعاع

۵۳۱. مساحت مثلث ABC برابر $2\sqrt{14}$ سانتیمتر مربع و محیط آن ۱۴ سانتیمتر است. اندازه شعاع دایره محاطی درونی این مثلث را تعیین کنید.

۵.۲.۲.۲. رابطه بین شعاعها

۵۳۲. معکوس شعاع دایره محاطی داخلی مثلث برابر است با مجموع معکوس ارتفاعهای مثلث.

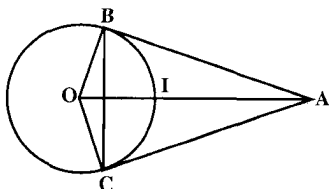


۵۳۳. نقطه I مرکز دایره محاطی مثلث ABC به فاصله ۶ سانتیمتر از رأس B واقع است. اگر $\hat{AIC} = 120^\circ$ باشد، اندازه شعاع دایره محاطی مثلث را تعیین کنید.

۵.۲.۳. نقطه و دایره

۵.۲.۳.۱. نقطه روی دایره

۵۳۴. یک دایره به مرکز O و نقطه A واقع در بیرون این دایره داده شده اند. خطهای راست AB و AC بر دایره مماسند (B و C نقطه های تماسند). ثابت کنید که مرکز دایره محاطی مثلث ABC، بر دایره داده شده، قرار دارد.



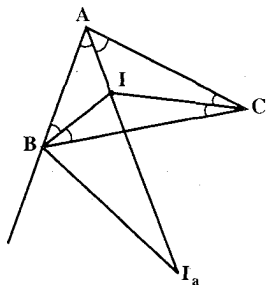
۵.۲.۳.۲. نقطه های همخط

۵۳۵. نشان دهید که نقطه وسط یک ارتفاع مثلث، نقطه تماس ضلع متناظر با آن ارتفاع و دایره

محاطی خارجی نسبت به آن ضلع، و مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث همخطند.

۵. ۲. ۳. ۳. نقطه های همدایره

۵۳۶. دو رأس B و C از مثلث ABC، مرکز دایرة محاطی درونی و مرکز دایرة محاطی برونی مماس بر ضلع a روی یک دایره قرار دارند.



۵. ۲. ۴. قطر

۵۳۷. مرکز دو دایرة محاطی یک مثلث، دو انتهای قطری از دایره ای هستند، که از دو رأسی که با مرکزها بر یک استقامت نیستند، می گذرد.

۵. ۲. ۵. زاویه

۵. ۲. ۵. ۱. اندازه زاویه

۵۳۸. اگر سه نقطه تماس ضلعهای مثلث با دایرة محاطی داخلی آن به هم وصل شوند، زاویه های مثلث حاصل همواره:

الف. مساوی 60° درجه اند.

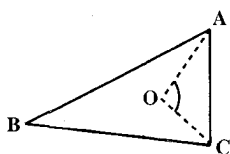
ب. عبارتند از یک زاویه منفرجه و دو زاویه حاده نابرابر.

ج. عبارتند از یک زاویه منفرجه و دو زاویه حاده برابر.

د. زاویه های حاده اند.

ه. زاویه های نابرابرند.

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴



۵۳۹. در مثلث ABC، زاویه ABC برابر با α است. اندازه زاویه AOC را، که در آن O مرکز دایرة محاطی است، پیدا کنید.

۵۴۰. از نقطه برخورد قاعده یک مثلث و نیمساز داخلی زاویه

مقابل آن مماسی بر دایرة محاطی داخلی رسم می کنیم. ثابت کنید زاویه ای که این مماس با قاعده می سازد با تفاضل دو زاویه مجاور به قاعده برابر است.

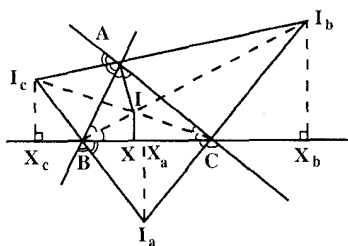
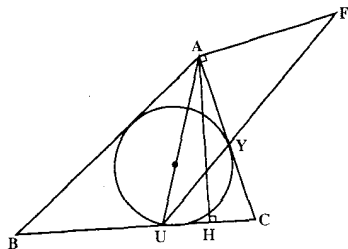
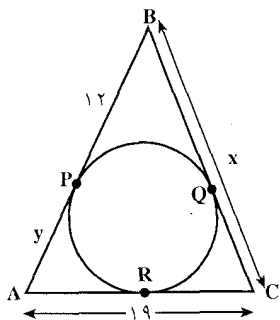
۵.۲.۶. پاره خط

۵.۲.۶.۱. اندازه پاره خط

۵۴۱. با توجه به شکل داده شده :

الف. اگر $x, y = 9$ را بیابید.

ب. اگر $x = 25, y$ را بیابید.

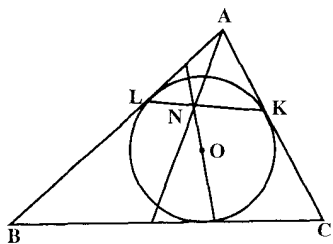


۵۴۲. خطی که نقطه U پای نیمساز AU متعلق به زاویه A از مثلث ABC را به نقطه تماس دایره محاطی داخلی مثلث با ضلع CA وصل می کند، عمودی را که از A بر AC اخراج می شود در نقطه F قطع می کند. ثابت کنید $AF = h_a$.

۵۴۳. شش نقطه X_c, X_b, X_a, X, C, B روی

ضلع BC، $6 \times \frac{5}{4} = 15$ پاره خط را تعیین می کنند. این ۱۵ پاره خط را همراه اندازه هر کدام، بر حسب ضلعهای مثلث بنویسید. برای پاره خطهای روی ضلعهای دیگر مثلث ABC

نیز می توان کار مشابهی را انجام داد. نقطه تماس دایره محاطی داخلی، X_b, X_a و نقطه های X_c, X ، نقطه های تماس دایره های محاطی به مرکزهای I_c و I_b, I_a با ضلع BC می باشند.



۵.۲.۶.۲. رابطه بین پاره خطها

۵۴۴. دایره ای در مثلث ABC محاط شده است. قطری

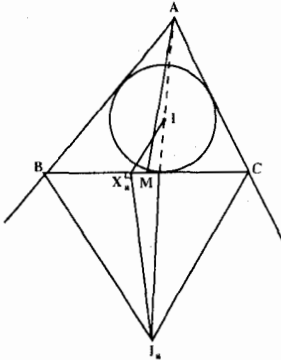
از این دایره، از نقطه تماس دایره با ضلع BC می گذرد و وتر را که دو نقطه دیگر تماس را به

هم وصل می کند، در نقطه N قطع می کند. ثابت کنید که AN، BC را نصف می کند.

۵۴۵. در هر مثلث پاره خطی که نقطه اولر یک ارتفاع را به نقطه وسط یکی از ضلعهای مجاور به آن ارتفاع وصل می کند، موازی و مساوی با عمودی است که از مرکز دایره محیطی

مثلث بر ضلع دیگر مجاور به آن ارتفاع فرود می آید.

۵۴۶. اگر در مثلث ABC نقطه های E و F ، پرتیب، محل تماس دایره محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC باشند، ثابت کنید، وسط پاره خط EF بر وسط ضلع BC منطبق است.



اولین المپیاد مقدماتی آزمایشی ایران، ۱۳۷۳

۵۴۷. ثابت کنید، پاره خطی که مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC را به وسط قطعه خطی که A را به نقطه تلاقی خطهایی که از هر رأس به نقطه تماس دایره محاطی خارجی نظیر آن رأس وصل می کند، وصل می نماید توسط میانه مرسوم از A نصف می شود.

۵۴۸. نقطه های تماس هر ضلع مثلث با دایره محاطی داخلی و دایره محاطی خارجی نسبت به آن ضلع دو نقطه همنا هستند.

۵۴۹. دو نقطه تماس هر ضلع مثلث با دو دایره محاطی خارجی نسبت به دو ضلع دیگر دو نقطه همنا هستند. فاصله بین این دو نقطه تماس با مجموع دو ضلع دیگر برابر است.

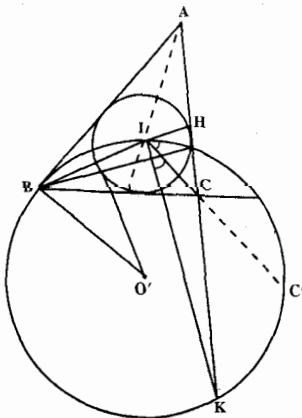
۵۵۰. نشان دهید، طول پاره خطی که از یک مرکز سه مماس به موازات یک ضلع مثلث رسم می شود، برابر است با مجموع (یا تفاضل) دو پاره خطی که بین این دو خط موازی روی دو ضلع دیگر مثلث ایجاد می شود.

۵. ۲. ۷. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۵. ۲. ۷. ۱. خط نیمساز است

۵۵۱. دایره ای در B بر ضلع AB از مثلث ABC

مماس است و از مرکز دایره محاطی داخلی مثلث می گذرد. این دایره AC را در H و K قطع می کند. ثابت کنید که IC نیمساز زاویه HIK است.

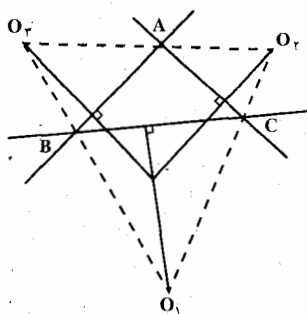


۵.۲.۷.۲. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۵۵۲. a. ثابت کنید، خط راستی که مثلث داده شده را به دو چند ضلعی با محیطها و مساحت‌های برابر تقسیم کند، از مرکز دایره محاطی مثلث می‌گذرد.
- b. همین حکم را در مورد چندضلعی دلخواهی ثابت کنید که بتوان یک دایره را در آن محاط کرد.
- c. ثابت کنید، همه خط‌های راستی که، هم مساحت و هم محیط مثلث را نصف می‌کنند، از یک نقطه می‌گذرند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

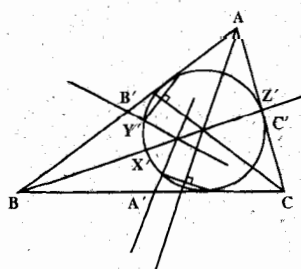
۵۵۳. خط متغیری که از رأس مثلث مفروضی می‌گذرد، آن مثلث را به دو مثلث تقسیم می‌کند. این خط یک مماس مشترک داخلی دو دایره محاطی داخلی آن دو مثلث است. نشان دهید که مماس مشترک داخلی دوم این دو دایره از نقطه تماس دایره محاطی داخلی مثلث مفروض با ضلع مقابل رأس مذکور می‌گذرد. خاصیت مشابهی را برای دایره محاطی خارجی نسبت به رأس مذکور بیان و آن را ثابت کنید.



۵.۳.۷.۲. خطها هم‌رسانند

۵۵۴. اگر از نقطه‌های O_1 ، O_2 و O_3 مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC، بترتیب، عمودهایی بر ضلعهای BC، AC و AB فرود آوریم، ثابت کنید که این سه عمود هم‌رسانند.

۵۵۵. خط‌هایی که از رأسهای یک مثلث به نقطه‌های تماس ضلع مقابل هر رأس با دایره محاطی خارجی نسبت به آن ضلع رسم می‌شوند، هم‌رسانند. تعریف. نقطه مشترک سه خط مذکور را غالباً نقطه ناگل مثلث می‌نامند.



۵۵۶. نقطه متقارن نقطه تماس ضلع BC از مثلث ABC با دایره محاطی داخلی، نسبت به نیمساز داخلی زاویه A و A' وسط ضلع BC است. نشان دهید که خط $A'X'$ و دو خط مشابه آن، $B'Y'$ و $C'Z'$ ، یک نقطه مشترک

دارند. آیا این مطلب برای یک دایره محاطی خارجی نیز صادق است.

۵۵۷. دایره به مرکز O ، در مثلث ABC محاط شده است و نقطه های تماس آن با ضلعهای BC ، AC و AB ، بترتیب، عبارتند از نقطه های A_1 ، B_1 و C_1 . پاره خطهای راست AO ، BO و CO ، بترتیب، محیط دایره را در نقطه های A_2 ، B_2 و C_2 قطع کرده اند. ثابت کنید، خطهای راست A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 از یک نقطه می گذرند.

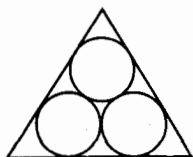
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۴

۵۵۸. ثابت کنید که در مثلث ABC ، نیمساز زاویه A ، میانخط موازی با AC و خط راست واصل نقطه های تماس دایره محاطی با ضلعهای CB و CA ، در یک نقطه هم رسند.

۵. ۲. ۴. خط مماس بر دایره است

۵۵۹. خطی که از یک رأس مثلث به نقطه تماس دایره محاطی داخلی (دایره محاطی خارجی نسبت به آن رأس) با ضلع مقابل آن رأس رسم می شود، مثلث را به دو مثلث تقسیم می کند. نشان دهید که دایره های محاطی داخلی (خارجی) این دو مثلث در همان نقطه بر این خط مماسند.

۵. ۲. ۸. سایر مسأله های مربوط به این قسمت



۵۶۰. در شکل زیر سه دایره دو به دو با هم مماس خارجند و هر ضلع مثلث بر دو دایره مماس است. اگر شعاع هریک از این دایره ها برابر سه باشد، محیط مثلث برابر است با:

(ج) $36 + 9\sqrt{3}$

(ب) $36 + 6\sqrt{3}$

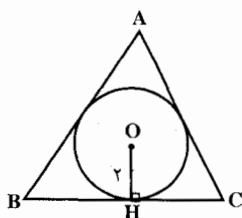
(الف) $36 + 9\sqrt{2}$

(هـ) ۴۵

(د) $18 + 18\sqrt{3}$

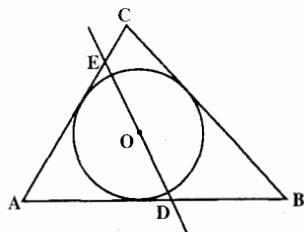
مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

۵۶۱. نشان دهید خطی که یک رأس مثلث را به نقطه تماس ضلع مقابل آن رأس با دایره محاطی خارجی نسبت به آن ضلع وصل می کند، محیط مثلث را نصف می کند.

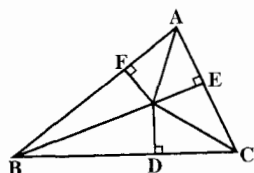


۵۶۲. اگر شعاع دایره محاطی مثلثی برابر ۲ باشد، اندازه های محیط و مساحت مثلث با یک عدد بیان می شوند.

۵۶۳. بین تمام مثلثهایی که یک قاعده ثابت دارند و بر دایره ثابتی

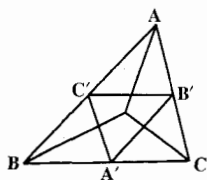


محیطند، کدام مثلث کمترین محیط را دارد؟
۵۶۴. ثابت کنید، هر قاطعی که از مرکز دایره محاطی داخلی مثلث بگذرد، مساحت و محیط مثلث را به دو قسمت متناسب باهم تقسیم می کند.



۵۶۵. دایره هایی که مرکزهایشان سه رأس مثلث باشند و بر نقطه های تماس ضلعهای مثلث با دایره محاطی داخلی بگذرند، بر یکدیگر مماس خواهند بود. همچنین دایره هایی که مرکزهایشان رأسهای مثلث باشند و بر نقطه های تماس ضلعها با یکی از دایره های محاطی خارجی بگذرند بر یکدیگر مماس خواهند بود. نوع تماس هر دو دایره را مشخص کنید.

۵۶۶. اگر در مثلثی محیط بر یک دایره، مجموع دو زاویه ثابت باشد، رأس سوم آن مثلث روی دایره ای هم مرکز با دایره اولی قرار دارد.



۵۶۷. ثابت کنید که مرکز دایره محاط در یک مثلث در درون مثلث تشکیل شده به وسیله خطهای اصل بین میانگانه های ضلعهای مثلث قرار دارد.

۵. ۲. ۹. مسأله های ترکیبی

۵۶۸. زاویه A محیط بر دایره (O) است. مماس بر دایره را رسم می کنیم که ضلعهای زاویه را در C و B قطع می کند.

۱. ثابت کنید، محیط مثلث ABC مقداری است ثابت.

۲. زاویه $\hat{BOC}$ مقداری است ثابت.

۵۶۹. دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقطه های D، E و F، بر ضلعهای BC، CA و AB مماس است؛ I مرکز این دایره است؛ L، M و N، بر ترتیب، مرکز ارتفاعی مثلثهای IBC، ICA و IAB هستند. ثابت کنید که:

الف. DL، EM و FN با شعاعهای دایره های محاطی خارجی مثلث ABC برابرند؛

ب. MN، NL و LM بر ترتیب از نقطه های D، E و F می گذرند؛

پ. مثلثهای LMN و ABC هم ارزند؛

ت. اگر دایره های محاطی خارجی نسبت به رأسهای A، B و C بر ترتیب در نقطه های

D_1 ، E_1 و F_1 بر BC، CA و AB مماس باشند، خطهای MN، NL و LM بر ترتیب

بر AD_1 ، BE_1 و CF_1 عمودند؛ و خطهای MN، NL و LM، بر ترتیب، خطهای

AD_1 ، BE_1 و CF_1 را روی دایرة محاطی داخلی قطع می کنند.

۵۷۰ الف. دایرة (P) در نقطه های E و F بر ضلعهای AB و AC از مثلث ABC مماس است.

نشان دهید خط EF عمودی که از P، مرکز دایرة (P)، بر BC رسم می شود، و میانه ای از مثلث ABC که از رأس A می گذرد، همسرند؛

ب. X ، Y ، Z و X_a ، Y_a ، Z_a نقطه های تماس ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC بترتیب با دایرة محاطی داخلی (I) و دایرة محاطی خارجی (I_a) هستند. نشان دهید که نقطه های برخورد YZ با دو شعاع IX و I_aX_a و رأس A و همچنین نقطه های برخورد Y_aZ_a با دو شعاع IX و I_aX_a و وسط ضلع BC، همخطند.

۳.۵. دایره های محیطی و محاطی مثلث

۱.۳.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره های محیطی و محاطی مثلث داده شده، یا مثلثهای دیگر ایجاد شده در مسأله، مورد بررسی قرار می گیرند.

۲.۳.۵. شعاع

۱.۲.۳.۵. اندازه شعاع

۵۷۱ در مثلث ABC، $\hat{A} = \alpha$ ، $\hat{B} = \beta$ و $BC = a$ است. شعاع دایرة محیطی و شعاع دایرة محاطی درونی این مثلث را مشخص کنید. آیا تنها با معلوم بودن $\hat{A} = \alpha$ و $BC = a$ ، شعاعهای این دو دایره مشخص می شود؟

۲.۲.۳.۵. رابطه بین شعاعها

۵۷۲ در هر مثلث فاصله هر رأس تا مرکز ارتفاعی به اضافه شعاع دایرة محاطی خارجی متناظر با آن رأس، مقداری ثابت است.

۳.۳.۵. نقطه و دایره

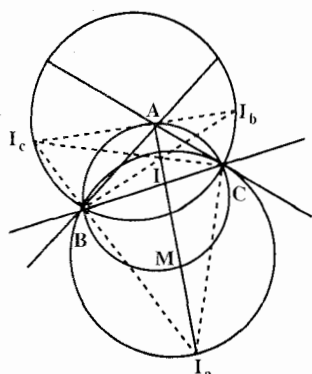
۱.۳.۳.۵. نقطه درون دایره

۵۷۳ ثابت کنید که اگر M نقطه ای در درون مثلث ABC باشد و خطهای AM، BM و CM، بترتیب، از مرکز دایره های محیطی مثلثهای BMC، CMA و AMB بگذرند، آن وقت

M مرکز دایره محاطی مثلث ABC است.

۵.۳.۳.۲. نقطه روی دایره

۵۷۴. چهار مرکز دایره‌های محاطی یک مثلث، روی شش دایره‌ای هستند که هریک از دو رأس مثلث عبور می‌کند، و مرکز آنها وسط کمائی از دایره محیطی مثلثی است که از آن دو رأس می‌گذرد.



۵.۳.۳.۳. نقطه برون دایره

۵۷۵. ثابت کنید که دایره محیطی مثلث نمی‌تواند از مرکز یک دایره محاطی خارجی آن بگذرد.

۵.۳.۳.۴. نقطه‌های هم‌دایره

۵۷۶. دایره مانسیون M.J. Mention

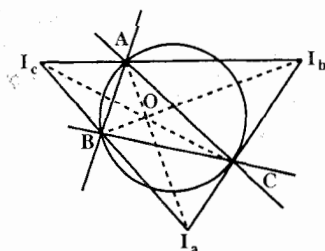
مرکزهای دایره‌های محاطی یک مثلث را دو به دو به هم وصل کرده‌ایم، شش پاره خط ایجاد شده است. ثابت کنید نقطه‌های وسط این شش پاره خط روی دایره محیطی مثلث قرار دارند.

۵.۳.۳.۵. نقطه‌های هم‌خط

۵۷۷. قضیه ناگل. مرکز دایره محاطی، مرکز دایره محیطی و نقطه هم‌رسی عمودهای رسم شده از مرکزهای دایره‌های محاطی برونی روی ضلعهای یک مثلث، سه نقطه واقع بر یک خط راستند. و مرکز دایره محیطی به یک فاصله از دو نقطه دیگر است.

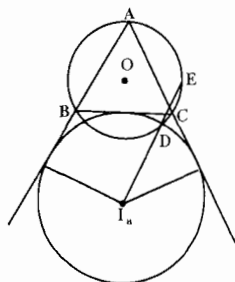
۵۷۸. نشان دهید، عمودهایی که در مرکز دایره محاطی داخلی مثلثی بر سه نیمساز داخلی این مثلث رسم می‌شوند، ضلعهای متناظر را در سه نقطه روی خطی که بر خط واصل بین مرکز دایره محیطی و مرکز دایره محاطی داخلی مثلث عمود است، قطع می‌کنند.

۵.۳.۴. قطر



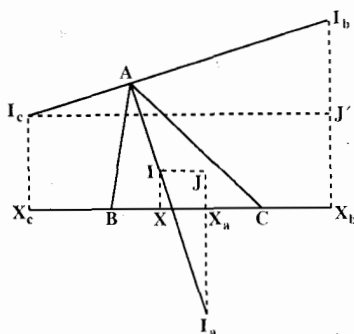
۵۷۹. اگر در یک مثلث متغیر، قاعده و دایره محیطی ثابت باشد، مرکزهای دایره‌های محاطی آن، دو دایره رسم می‌کنند که از دو رأس ثابت می‌گذرند و مرکزهایشان دو انتهای قطری از دایره محیطی است که بر ضلع

ثابت عمود باشد.



۵۸۰. دایرة محاطی خارجی (I_a) از مثلث ABC، دایرة محیطی مثلث ABC را که مرکز آن نقطه O است در D و $I_a D$ دایرة (O) را در E قطع می کند. نشان دهید که $I_a E$ با قطر دایرة محیطی مثلث ABC برابر است.

۵.۳.۵. زاویه

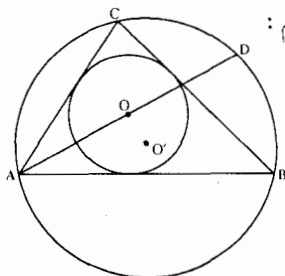


۵۸۱. ثابت کنید: $\angle I_a X_a = \frac{1}{4}(\hat{B} - \hat{C})$ مرکز دایرة محاطی برونی مماس ضلع a، X_a نقطه تماس دایرة محاطی برونی مماس بر ضلع a و I مرکز دایرة محاطی درونی مثلث است.

۵.۳.۶. پاره خط

۵.۳.۶.۱. رابطه بین پاره خطها

۵۸۲. مثلث ABC در دایرة به مرکز O' محاط و بر دایرة به مرکز O محیط است. امتداد AO دایرة بزرگتر را در نقطه D قطع می کند. باید داشته باشیم:



ب. $AO = CO = OD$

د. $CD = OD = BD$

الف. $CD = BD = O'D$

ج. $CD = CO = BD$

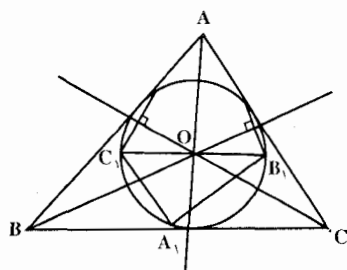
هـ. $O'B = O'C = OD$

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۶

۵۸۳. دایرة محیطی هر مثلث خط المרכזین هر دو دایره از دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث را نصف می کند.

۵.۳.۷. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، هم‌رس، ...

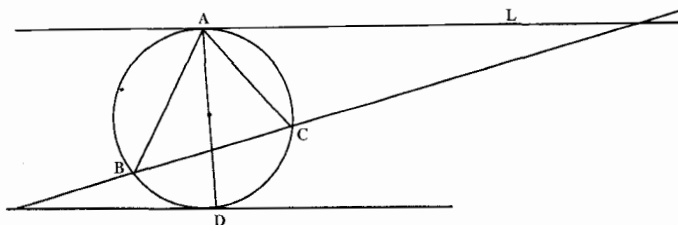
۵.۳.۷.۱. خطها هم‌رسند



۵۸۴. فرض کنید، A_1 نقطهٔ قرینهٔ محل تماس دایرهٔ محاطی مثلث ABC با ضلع BC نسبت به نیمساز زاویهٔ A باشد. نقطه‌های B_1 و C_1 به همین منوال تعیین می‌شوند. ثابت کنید که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 و خطی که از مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث ABC می‌گذرد، در یک نقطه به هم می‌رسند.

۵.۳.۷.۲. خط مماس بر دایره است

۵۸۵. نیمساز AD زاویهٔ داخلی A در مثلث ABC ، رسم شده است. در نقطهٔ A ، مماس L را بر دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌کنیم. ثابت کنید که خط راست رسم شده از D به موازات L ، بر دایرهٔ محاطی مثلث ABC مماس است.



۵.۳.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۶. مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث روی خط اولر مثلثی است که رأسهایش محل برخورد ضلعهای مثلث اصلی با دایرهٔ محاطی داخلی آن می‌باشد.

۵.۳.۹. مسأله‌های ترکیبی

۵۸۷. الف. O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC و D را نقطهٔ برخورد AO با دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم ($D \neq A$). ثابت کنید: $DB = DC = DO$.

ب. ثابت کنید، اگر $ABCD$ ، یک چهارضلعی محاطی باشد، آن وقت، نقطه‌های A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 ، بترتیب، مرکزهای دایره‌های محاطی مثلثهای BCD ، CDA ، DAB و ABC ، رأسهای یک مستطیل هستند. المیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۷۰

۵۸۸. طول ضلع BC از مثلث متغیر ABC و محل نقطه های I_b و I_c از آن مفروض است. نشان دهید که:

الف. رأس A روی یک خط راست حرکت می کند.

ب. راستاهای AB و AC ثابتند.

پ. شعاع دایره محیطی مثلث ABC ثابت است.

ت. مرکز دایره محیطی مثلث ABC روی یک دایره حرکت می کند.

۵۸۹. ثابت کنید:

۱. مرکز دایره ای که از مرکزهای دایره های محاطی خارجی مثلث می گذرد نقطه برخورد سه شعاع دایره های مزبور است که از نقطه های تماس ضلعهای نظیر می گذرند.

۲. مرکز این دایره، قرینه مرکز دایره محاطی مثلث است نسبت به مرکز دایره محیطی آن.

۳. شعاع این دایره، دو برابر شعاع دایره محیطی مثلث است.

۵. ۴. دایره های نه نقطه، بروکارد، لوموان، ...

۵. ۴. ۱. دایره نه نقطه

در این بخش دایره های مهم دیگر مربوط به مثلث را مورد بررسی قرار می دهیم و نخست به بررسی دایره نه نقطه مثلث می پردازیم.

۵. ۴. ۱. ۱. تعریف و قضیه

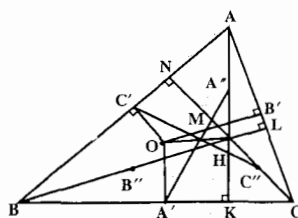
۵۹۰. قضیه. در مثلث ABC اگر O محل تلاقی سه عمود منصف ضلعها و H نقطه برخورد

ارتفاعها و A' ، B' ، C' ، بترتیب، وسطهای ضلعهای

BC، CA و AB، و A'' ، B'' ، C'' ، بترتیب،

وسطهای قطعه خطهای HA، HB و HC، و K، L و

N پای ارتفاعها باشند، ثابت کنید:



۱. طول قطعه خطهای OA' ، OB' و OC' ،

بترتیب، مساوی با نصف طولهای HA، HB و HC می باشند.

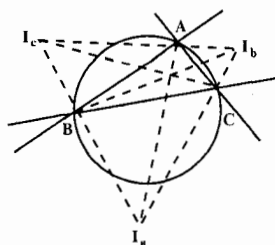
۲. چهار پاره خط $A'A''$ ، $B'B''$ ، $C'C''$ و OH از نقطه M که وسط هریک از

آنهاست می گذرند.

۳. نقطه M از نه نقطه A' ، B' ، C' ، A'' ، B'' ، C'' ، K، L و N به یک فاصله

است، یا به عبارت دیگر در هر مثلث، وسطهای ضلعها، پای ارتفاعها و وسطهای

پاره خطهایی که نقطه تلاقی ارتفاعهای مثلث را به رأسهای آن وصل می کنند، نه نقطه اند واقع بر یک دایره که ژان ویکتور پونسله آن را دایره نه نقطه نامیده است. این دایره را دایره اولر و برخی دایره فوئرباخ نیز می نامند.



۵. ۴. ۱. ۲. شعاع

۵۹۱. اگر I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره های محاطی خارجی مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دایره محیطی مثلث ABC همان دایره نه نقطه مثلث $I_a I_b I_c$ است.

۵۹۲. از وسط هر ضلع یک مثلث خطی موازی با نیمساز خارجی

زاویه رو به روی آن ضلع رسم می کنیم. نشان دهید که دایره نه نقطه مثلثی که از این سه خط تشکیل می شود، همان دایره نه نقطه مثلث مفروض است.

۵۹۳. چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی، دایره نه نقطه یکسانی دارند.

۵۹۴. شعاع دایره های محیطی چهار مثلث یک گروه مرکز ارتفاعی برابرند.

۵۹۵. مرکزهای دایره های محیطی یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی، یک گروه نقطه های مرکز ارتفاعی تشکیل می دهند.

۵۹۶. یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی و گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مرکزهای دایره های محیطی آنها، دایره نه نقطه مشترکی دارند.

۵۹۷. چهار رأس یک گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی مفروض را می توان مرکزهای دایره های محیطی یک گروه مثلث مرکز ارتفاعی دیگر دانست.

۵۹۸. ثابت کنید که دایره نه نقطه یک مثلث، بر دایره محاطی مثلث و کلیه دایره های محاطی خارجی آن مماس است. یعنی خط المרכזین دایره نه نقطه و هر یک از دایره های محاطی مثلث برابر است با تفاضل یا مجموع شعاعهای دایره نه نقطه و هر یک از دایره های محاطی. (قضیه فوئرباخ)

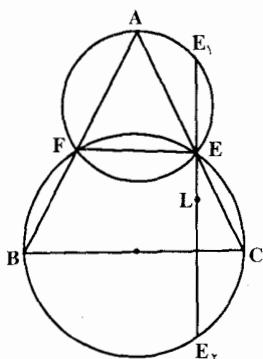
نکته. نقطه تماس دایره نه نقطه و دایره محاطی درونی مثلث را نقطه فوئرباخ می نامند.

۵. ۴. ۱. ۳. نقطه و دایره

۵. ۴. ۱. ۳. ۱. نقطه روی دایره

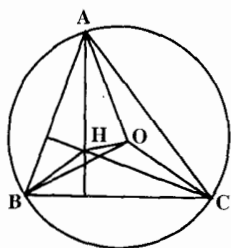
۵۹۹. در حالت کلی، هر مثلث و دایره نه نقطه اش چند نقطه مشترک دارند؟

۶۰۰. بیشترین و کمترین تعداد نقطه هایی را که مثلث و دایره نه نقطه مثلث ممکن است مشترک داشته باشند، به دست دهید.



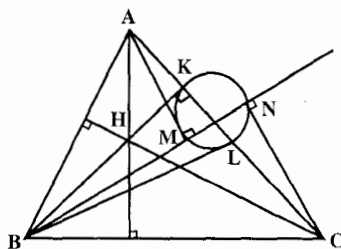
۶۰۱. ضلع BC از مثلث ABC قطر دایره (BC) است و این دایره ضلعهای CA و AB را بترتیب در E و F قطع می کند. دایره های (BC) و (AEF) روی هر خطی که از E (یا F) می گذرد یک وتر مضاعف جدا می کنند. نشان دهید که وسط این وتر روی دایره نه نقطه مثلث ABC قرار دارد.

۶۰۲. نشان دهید که خطهای اولر سه مثلی که از یک مثلث مفروض، توسط ضلعهای مثلث پادک آن، جدا می شوند، یک نقطه مشترک دارند و این نقطه روی دایره نه نقطه مثلث مفروض قرار دارد.



۶۰۳. اگر O و H، بترتیب، مرکز دایره محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشند، نشان دهید که دایره های نه نقطه سه مثلث OHA، OHB و OHC دو نقطه مشترک دارند.

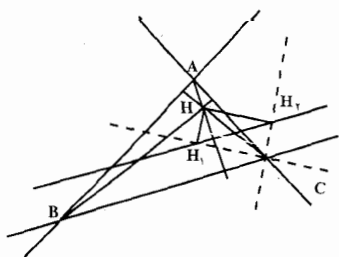
۲.۳.۱.۴.۵. نقطه های همدایره



۶۰۴. در مثلث ABC، ارتفاع رسم شده از رأس B بر ضلع AC، و BL میانه رسم شده از همان رأس است، و M و N تصویر نقطه های A و C روی نیمساز زاویه B هستند. ثابت کنید که نقطه های K، M، L، N همگی بر دایره ای که مرکزش بر دایره نه نقطه مثلث ABC قرار دارد، واقعند.

۶۰۵. دایره نه نقطه هر مثلث از مرکز ۲۴ دایره ای که مستقیماً در ارتباط با مثلث وجود دارند، می گذرد.

۳.۳.۱.۴.۵. نقطه های همخط



۶۰۶. تصویرهای محل برخورد ارتفاعهای مثلث روی نیمسازهای یک زاویه داخلی و خارجی نظیر آن، روی خطی که وسط ضلع مقابل به آن زاویه را به مرکز دایره نه نقطه وصل می کند، قرار دارد.

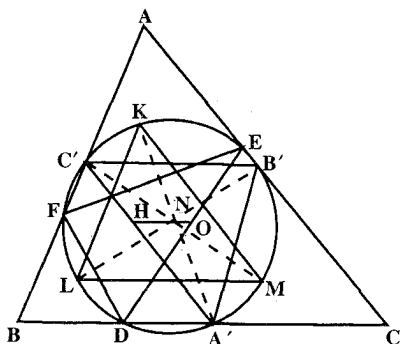
۶۰۷. نشان دهید که پای ارتفاع وارد بر یک ضلع مثلث، وسط پاره خطی روی قطر دایره محیطی که بین این ضلع و رأس مقابل آن است، و مرکز دایره نه نقطه، همخطند.

۴.۱.۴.۵. کمان

۶۰۸. ثابت کنید که روی دایره نه نقطه، سه نقطه

K ، L و M ، بترتیب، در وسطهای

کمانهای $\widehat{DE}$ ، $\widehat{EF}$ و $\widehat{FD}$ واقعند.



۵.۱.۴.۵. پاره خط

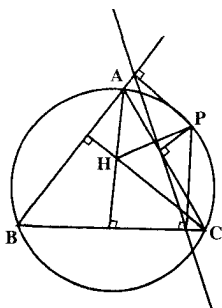
۶۰۹. نقطه P را روی دایره محیطی مثلثی در نظر می گیریم

و خط سیمسون آن را برای مثلث به دست می آوریم.

ثابت کنید که این خط پاره خطی را که نقطه P را به

محل برخورد ارتفاعهای مثلث وصل می کند،

نصف می نماید.

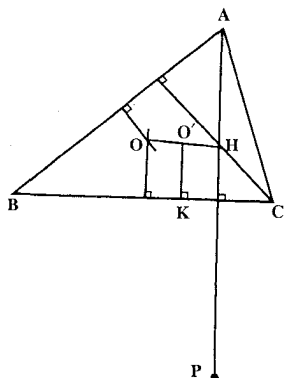


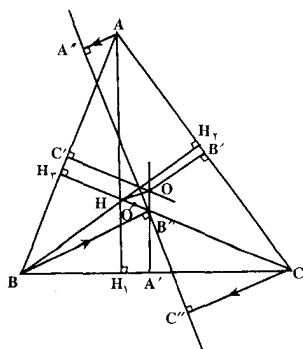
۶۱۰. اگر نقطه متقارن رأس A نسبت به ضلع مقابل

این رأس، یعنی BC باشد، نشان دهید که اندازه

HP چهار برابر فاصله مرکز دایره نه نقطه از ضلع

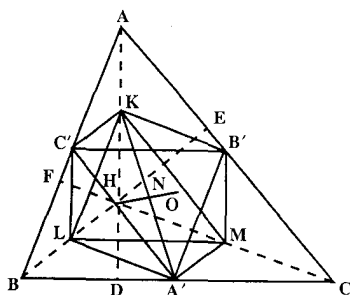
BC است.





۶۱۱. ثابت کنید، مجموع جبری فاصله‌های چهار نقطه A, B, C, H از هر خط که از مرکز دایره نه نقطه این گروه عبور کند، برابر صفر است.

۵. ۴. ۱. ۶. زاویه

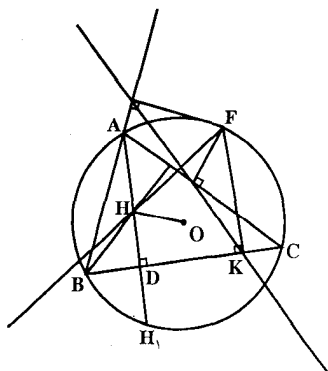


۶۱۲. ثابت کنید که دایره نه نقطه مثلث، ضلعهای آن را تحت زاویه‌های $|\hat{A}-\hat{B}|$ و $|\hat{C}-\hat{A}|$ ، $|\hat{B}-\hat{C}|$ قطع می‌کند.

۵. ۴. ۱. ۷. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۵. ۴. ۱. ۷. ۱. خطها بر هم عمودند

۶۱۳. روی دایره محیطی مثلث، دو نقطه واقع بر دو سرب یک قطر را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که خطهای سمسن نظیر این دو نقطه بر هم عمودند و یکدیگر را روی دایره نه نقطه مثلث تلاقی می‌کنند.



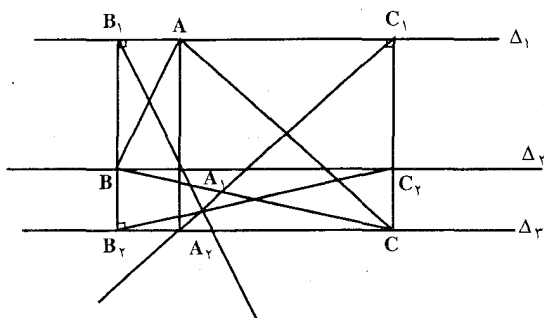
۵. ۴. ۱. ۷. ۲. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۶۱۴. فرض کنید، H نقطه برخورد ارتفاعهای یک مثلث و F نقطه‌ای دلخواه از دایره محیطی آن باشد. ثابت کنید که خط سیمسون نظیر نقطه F ، از یکی از نقطه‌های برخورد خط FH و دایره نه نقطه مثلث می‌گذرد.

۳.۷.۱.۴.۵. خطها هم رسند

۶۱۵. فرض کنید، l معرف خطی دلخواه باشد که از مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌گذرد، و فرض کنید A_1 ، B_1 و C_1 تصویر نقطه‌های A ، B و C روی l باشند. سه خط راست رسم شده‌اند: از A_1 یک خط عمود بر BC ، از B_1 یک خط عمود بر AC و از C_1 یک خط عمود بر AB ، ثابت کنید که این سه خط در یک نقطه، روی دایره نه نقطه مثلث ABC ، به هم می‌رسند.

۶۱۶. از رأسهای مثلث ABC سه خط موازی با امتداد دلخواه رسم می‌کنیم و از این رأسها بر این خطها عمودهایی فرود می‌آوریم. سه مستطیل به وجود می‌آید که ضلعهای BC ، AC و AB قطرهای آنها هستند. ثابت کنید، سه قطر دیگر این سه مستطیل یکدیگر را روی دایره نه نقطه مثلث قطع می‌کنند.



۶۱۷. از رأسهای یک مثلث مفروض متقارنهای ضلعهای متناظر مثلث پاد مکمل نسبت به یک راستای مفروض رسم شده‌اند. نشان دهید، سه خطی که به این ترتیب به دست می‌آیند، روی نقطه‌ای از دایره محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. این گزاره را نسبت به مثلث میانک و دایره نه نقطه بیان کنید.

۶۱۸. خطهای سیمسون نظیر دو سر قطر OI (O مرکز دایره محیطی مثلث و I مرکز دایره محاطی آن است) در نقطه فوئر باخ متقاطعند.

۴.۷.۱.۴.۵. خطها پاد موازی اند

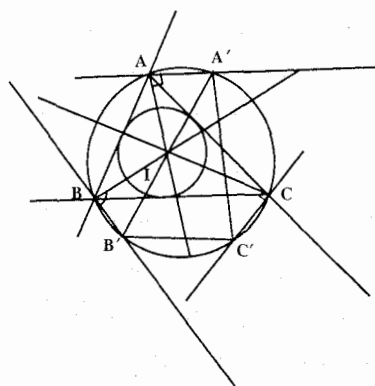
۶۱۹. ثابت کنید، خطی که در وسط یک ضلع مثلثی داده شده بر دایره نه نقطه آن مثلث مماس است و ضلع در نظر گرفته شده، نسبت به دو ضلع دیگر مثلث پاد موازی اند.

۵.۱.۴.۸. شکلهای ایجاد شده

۶۲۰. چهار مرکز سه مماس، یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می دهند.
۶۲۱. هر مثلث و دایرة محیطی آن، بترتیب، مثلث پادک و دایرة نه نقطه گروه مرکز ارتفاعی متشکل از مرکزهای سه مماس مثلث مفروض هستند.
- نکته ۱. می توان نتیجه گرفت که همه ویژگیهای یک گروه نقطه های مرکز ارتفاعی را می توان به مرکزهای دایره های محاطی یک مثلث نیز نسبت داد. به این ترتیب یک دسته گزاره به دست می آوریم که گزاره های زیر نمونه ای از آنها هستند.
- الف. شعاع دایرة محیطی مثلثی که رأسهای آن هر سه تایی از چهار مرکز سه مماس مثلث مفروضی باشند، با قطر دایرة محیطی آن مثلث مفروض برابر است.
- ب. نقطه متقارن هر مرکز سه مماس یک مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرة محیطی آن مثلث، مرکز دایرة محیطی مثلثی است که رأسهای آن سه مرکز سه مماس دیگر مثلث مفروض هستند.
- ج. مرکزهای دایره های محیطی چهار مثلثی که توسط چهار مرکز سه مماس یک مثلث مفروض تعیین می شوند، مرکزهای سه مماس مثلث متقارن با مثلث مفروض، نسبت به مرکز دایرة محیطی این مثلث، هستند.

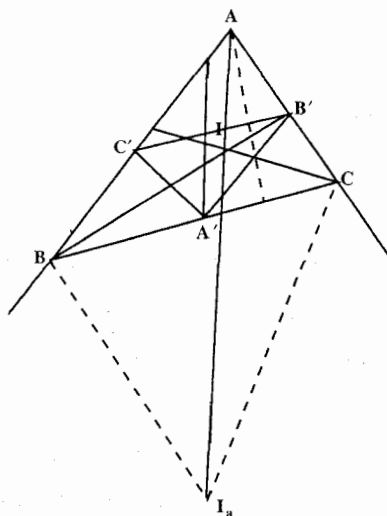
۵.۱.۴.۹. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۶۲۲. هر مثلث چند:
- دایرة نه نقطه
 - خط اولر
 - نقطه میگوئل دارد؟
۶۲۳. اگر نقطه دلخواه P واقع بر OI (O مرکز دایرة محیطی و I مرکز دایرة محاطی درونی مثلث ABC می باشند) را روی ضلعهای مثلث ABC در نقطه های S، R و Q تصویر کنیم. ثابت کنید، دایرة گذرنده بر سه نقطه Q، R و S از نقطه فوترباخ می گذرد.
۶۲۴. اگر مثلث متغیری قاعده ثابت داشته باشد و اندازه شعاع دایرة محیطی آن نیز ثابت باشد، نشان دهید که دایرة نه نقطه آن بر دایرة ثابتی مماس است.
۶۲۵. مثلث متغیری یک رأس ثابت و دایرة نه نقطه ثابت دارد. ثابت کنید که مکان هندسی مرکز ارتفاعی این مثلث یک دایره است.
۶۲۶. مرکز ارتفاعی، نقطه وسط قاعده و راستای قاعده مثلث متغیری ثابت است. مکان هندسی مرکز دایرة نه نقطه این مثلث را بیابید.



۶۲۷. مثلث متغیر ABC دارای دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محیطی ثابتی است. نشان دهید که مثلث $A'B'C'$ که رأسهای آن نقطه‌های برخورد نیمسازهای خارجی مثلث ABC و دایرهٔ محیطی ABC هستند، دارای مرکز ارتفاعی، مرکز ثقل و مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ ثابتی است.

۶۲۸. نشان دهید که مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث IBC روی نیمساز داخلی زاویهٔ A' از مثلث $A'B'C'$ ، یعنی مثلث مکمل مثلث مفروض ABC قرار دارد. گزاره‌های مشابهی را در مورد مثلثهای I_aBC ، I_bBC و I_cBC بیان و آنها را ثابت کنید. (I ، I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی درونی و برونی مثلث ABC می‌باشند.)



۶۲۹. ثابت کنید، قرینهٔ مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث نسبت به یک ضلع بر قرینهٔ رأس مقابل به این ضلع نسبت به مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ منطبق است.

۱۰.۱.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۶۳۰. در مثلث متغیر ABC قاعدهٔ BC و A ، زاویهٔ روبه‌روی قاعده ثابتند. نشان دهید که:

الف. خط $B'Q$ راستای ثابتی دارد؛

ب. دایره نه نقطه بر دایره ثابتی مماس است.

۶۳۱. یک رأس مثلثی متغیری که در دایره ثابتی محاط است، ثابت است و ضلع مقابل آن رأس از نقطه ثابتی می‌گذرد.

الف. نشان دهید که مرکز ارتفاعی یک دایره را می‌پیماید.

ب. نشان دهید که دایره نه نقطه بر دو دایره ثابت هم مرکز مماس است.

۶۳۲. ثابت کنید خطهایی که از نقطه‌های اولر، بتریب، موازی نیمسازهای داخلی یک مثلث رسم می‌شوند، در یک نقطه هم‌رسند و خطی که نقطه مشترک آنها را به مرکز دایره نه نقطه مثلث وصل می‌کند، موازی خطی است که مرکز دایره محیطی مثلث را به مرکز دایره محاطی داخلی آن وصل می‌کند. نظیر این قضیه‌ها را برای نیمساز زاویه‌های داخلی و نیمساز زاویه‌های خارجی شرح داده، اثبات کنید (نقطه اولر وسط پاره خط محدود به محل تلاقی ارتفاعها و رأس است).

۲.۴.۵. دایره بروکارد

۱.۲.۴.۵. تعریف و قضیه

نقطه‌های بروکارد

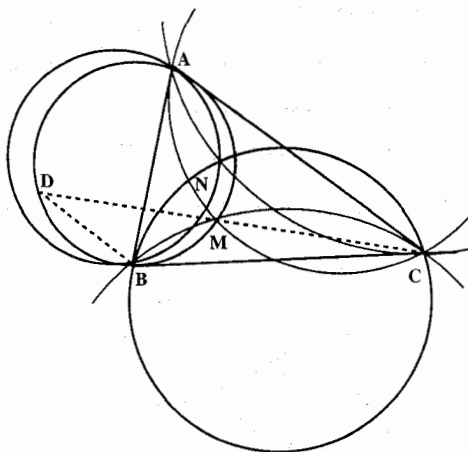
تعریف. دایره (AB) را که از رأسهای A و B از مثلث ABC می‌گذرد و در B بر ضلع BC مماس است، در نظر بگیرید. همچنین می‌توان دایره (BC) را که از B و C می‌گذرد و در C بر AC مماس است، و دایره (CA) را که از C و A می‌گذرد و در A بر AB مماس است، در نظر گرفت. این دایره‌ها را گروه مستقیم دایره‌های الحاقی می‌نامیم.

اگر رأسهای A ، B و C را دو تا دو تا در جایگشت دایره‌ای BAC در نظر بگیریم، گروه غیرمستقیم دایره‌های الحاقی (BA) ، (AC) و (CB) را به دست می‌آوریم. دایره (BA) دایره‌ای است که از A و B می‌گذرد و در A بر ضلع AC مماس است؛ برای دو دایره دیگر نیز تعریف مشابهی وجود دارد. (هنری بروکارد Henri Brocard ۱۸۴۵-۱۹۲۲) ریاضیدان فرانسوی این قضیه را در حدود سال ۱۸۷۵ اثبات کرده است.)

۶۳۳. قضیه. سه دایره الحاقی گروه مستقیم، یک نقطه مشترک دارند.

۶۳۴. قضیه. سه دایره الحاقی گروه غیرمستقیم، یک نقطه مشترک، مانند N دارند.

۶۳۵. تعریف. دو نقطه M و N در قضیه های قبلی را نقطه های بروکار مثلث می نامند. این نقطه ها را معمولاً با Ω و Ω' نشان می دهند.

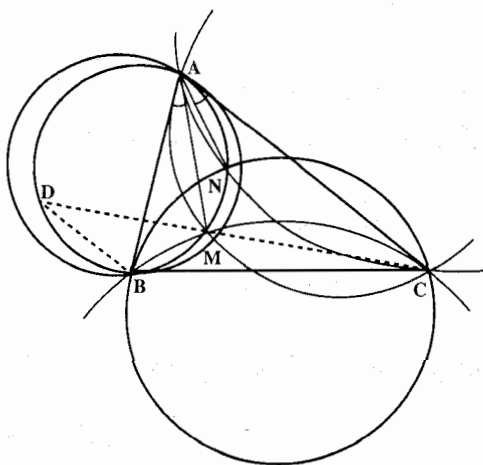


قضیه. ثابت کنید :

الف. $\hat{MAB} = \hat{MBC} = \hat{MCA}$ ، و نقطه M تنها نقطه ای است که این ویژگی را دارد.

ب. $\hat{NAC} = \hat{NCB} = \hat{NBA}$ ، و نقطه N تنها نقطه ای است که این ویژگی را دارد.

۶۳۶. قضیه. نقطه های بروکار، دو نقطه همزاویه مثلث هستند.

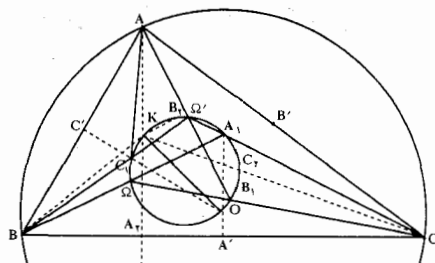


۶۳۷. قضیه. نقطه های برخورد دایره محیطی یک مثلث با خطهایی که از رأسهای مثلث به

یک نقطه بروکار رسم می شوند، رأسهای مثلثی همنهشت با مثلث مفروض هستند.

دایرة بروکار

۶۳۸. تعریف. دایرة (OK) که پاره خط واصل بین مرکز دایرة محیطی O و نقطه لوموان K از مثلث ABC قطر آن است، دایرة بروکار ABC نامیده می شود (شکل).
عمود منصفهای اضلاع BC، CA و AB دایرة بروکار (OK) را در رأسهای A_1 ، B_1 و C_1 از مثلث اول بروکار برای مثلث ABC قطع می کنند.
میانهای AK، BK و CK از مثلث ABC دایرة (OK) را در A_2 ، B_2 و C_2 قطع می کنند، که مثلث $A_2B_2C_2$ مثلث دوم بروکار برای مثلث ABC است.



قضیه. نقطه های بروکار یک مثلث روی دایرة بروکار آن مثلث قرار دارد.
۶۳۹. قضیه. خطهایی که از رأسهای یک مثلث به موازات ضلعهای متناظر مثلث اول بروکار رسم می شوند، یکدیگر را روی دایرة محیطی مثلث مفروض قطع می کنند.
۶۴۰. قضیه. خطهایی که از رأسهای یک مثلث بر ضلعهای متناظر مثلث اول بروکار عمود می شوند، از یک نقطه می گذرند.
۶۴۱. قضیه. دایرة محیطی مثلث روی میانه های متقارن (امتداد داده شده) مثلث پاره خطهایی جدا می کند، که نقطه های وسط آنها رأسهای مثلث دوم بروکار هستند.

۲.۲.۴.۵. نقطه و دایره

۶۴۲. چهار نقطه مهم واقع بر دایرة بروکار را نام ببرید.

۳.۲.۴.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۳.۲.۴.۵. خطها موازی اند

۶۴۳. نشان دهید که خط سیمسون یک نقطه برخورد قطر بروکار و دایرة محیطی مثلث، با نیمساز زاویه متشکل از یک ضلع مثلث و ضلع متناظر مثلث اول بروکار، یا موازی است یا بر آن عمود است.

۲.۳.۲.۴.۵. خط‌ها همرسند

۶۴۴. نشان دهید، خط‌هایی که رأس‌های متناظر دو مثلث بروکار مثلث مفروض را به هم وصل می‌کنند، یکدیگر را در مرکز ثقل مثلث مفروض قطع می‌کنند.

۴.۲.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۴۵. آیا نقطه بروکارد، همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد؟

۳.۴.۵. دایره لوموان

۱.۳.۴.۵. تعریف و قضیه

تعریف. نقطه همرسی میانه‌های متقارن هر مثلث (شبه میانه‌های مثلث) را نقطه لوموان Lemoine آن مثلث می‌نامند.

نکته. در هر مثلث مرکز ثقل و نقطه لوموان دو نقطه مزدوج هم‌زاویه نسبت به مثلث هستند.

دایره لوموان

۶۴۶. قضیه. خط‌هایی که از نقطه لوموان یک مثلث موازی با ضلع‌های مثلث رسم می‌شوند، ضلع‌های مثلث را در شش نقطه همدایره قطع می‌کنند.

۶۴۷. قضیه. مرکز دایره اول لوموان مثلث نقطه وسط پاره خطی است که مرکز دایره محیطی و نقطه لوموان مثلث را به هم وصل می‌کند.

۶۴۸. قضیه. سه خط پاد موازی با ضلع‌های یک مثلث که از نقطه لوموان می‌گذرند، روی جفت ضلع‌های غیرمتناظرشان شش نقطه تعیین می‌کنند؛ این شش نقطه روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش نقطه لوموان است.

۶۴۹. قضیه. پاره خط‌هایی که دایره دوم لوموان روی ضلع‌های یک مثلث جدا می‌کنند با کسینوس‌های زاویه‌های مقابل ضلع‌ها متناسبند.

۶۵۰. دایره اول لوموان، دایره دوم لوموان را نصف می‌کند.

نکته. دو دایره‌ای که اکنون به نام دایره‌های لوموان نامیده می‌شوند، حالت‌های خاص گروه دایره‌های توکر Tucker می‌باشند که در سال ۱۸۷۳ توسط لوموان در کنگره لیون معرفی گردیدند.

۶۵۱. دایره بروکارد با دایره اول لوموان مثلث، هم مرکز است.

۲.۳.۴.۵. نقطه و دایره

۱.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همدایره

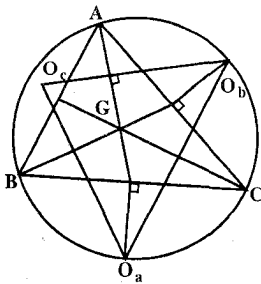
۶۵۲. خطی که از نقطه لوموان K در مثلث ABC می‌گذرد، ضلعهای BC و BA را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند، به طوری که $DK=KE$ ، و نقطه دوم برخورد دایره محیطی مثلث DBE با دایره‌ای است که AB قطر آن است. ثابت کنید که نقطه‌های B، C، Q و یکی از نقطه‌های بروکار مثلث ABC همدایره‌اند.

۲.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همخط

۶۵۳. نشان دهید که مزدوج همزاویه نقطه ناگل با مرکز دایره محیطی و مرکز دایره محاطی داخلی همخط است.

۳.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های دیگر

۶۵۴. نقطه همناوی مرکز ارتفاعی مثلث، نقطه لوموان مثلث پادمکمل است.



۶۵۵. اگر O و G مرکز دایره محیطی و مرکز ثقل مثلث ABC، و O_a ، O_b ، O_c مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای GAB و GCA، GBC باشند، نشان دهید که نقطه‌های O و G، بترتیب، مرکز ثقل و نقطه لوموان مثلث $O_a O_b O_c$ هستند.

۶۵۶. DEF مثلث ارتفاعی مثلث ABC، و X، Y و Z تصویرهای نقطه لوموان K روی ضلعهای BC، CA، و AB، و X' ، Y' و Z' متقارنهای X، Y و Z نسبت به K هستند،

نشان دهید که X' ، Y' و Z' نقطه‌های لوموان مثلثهای AEF، BFD و CDE هستند.

۶۵۷. از رأسهای یک مثلث عمودهایی بر میانه‌ها رسم می‌کنیم، نشان دهید نقطه لوموان مثلث تشکیل شده بر مرکز ثقل مثلث مفروض منطبق است.

۶۵۸. نشان دهید که مرکز دایره محیطی یک مثلث، مرکز ثقل مثلث پادپادک نقطه لوموان مثلث مفروض است.

۶۵۹. نشان دهید که نقطه لوموان و مرکز دایره محیطی یک مثلث، نقطه اشتاینر و نقطه تاری مثلث اول بروکار هستند.

۳.۳.۴.۵. پاره خط

۶۶۰. نشان دهید، پاره خطهای واصل بین نقطه لوموان و رأسهای مثلث اول بروکار توسط میانه های متناظر مثلث مفروض نصف می شوند.

۴.۳.۴.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۴.۳.۴.۵. خطها همسرند

۶۶۱. مثلث ABC مفروض است، نشان دهید که سه مثلث $A'BC$ ، $B'CA$ و $C'BA$ وجود دارند، به طوری که هر کدام یک ضلع مشترک با مثلث ABC دارند و نقطه لوموان آنها همان نقطه لوموان K از مثلث ABC است. ثابت کنید که خطهای AA' ، BB' و CC' همسرند.

۲.۴.۳.۴.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد

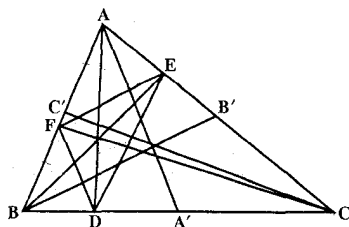
۶۶۲. خطهایی که از نقطه های بروکار مثلث ABC به رأسهای آن وصل می شوند، دایره محیطی را در A' ، A'' ، B' ، B'' ، C' و C'' قطع می کنند، و K' ، K'' و KK' هر کدام از یک نقطه بروکار مثلث ABC می گذرند.

۵.۳.۴.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۶۶۳. دایره محیطی و نقطه لوموان یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز ثقل مثلث یک دایره است.

۶۶۴. دایره محیطی و مرکز ثقل یک مثلث متغیر ثابت هستند. نشان دهید که مکان هندسی نقطه لوموان مثلث یک دایره است.

۶۶۵. اگر DEF مثلث ارتفاعی مثلث ABC باشد، نشان دهید که نقطه های لوموان مثلثهای AEF ، BFD و CDE روی میانه های ABC قرار دارند.



۵.۴.۳.۶. مسأله های ترکیبی

۶۶۶. نشان دهید که :

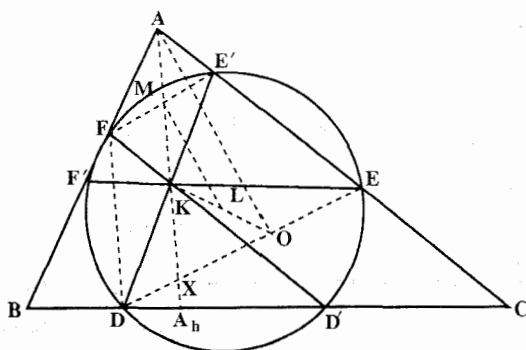
الف. خط واصل بین نقطه لوموان و مرکز ارتفاعی مثلث از نقطه لوموان مثلث ارتفاعی آن مثلث نیز می گذرد ؛

ب. در یک گروه مرکز ارتفاعی، چهار خطی که هر کدام از نقطه لوموان و مرکز ارتفاعی یک مثلث می گذرد، همرسند.

۶۶۷. نشان دهید، در هر مثلث خطی که از نقطه لوموان K به مرکز دایره نه نقطه O' ، وصل می شود از مرکز دایره بروکار مثلث پاد مکمل، Z' ، می گذرد و $KO' = O'Z'$.

۶۶۸. نشان دهید که مرکز دایره محیطی O در مثلث ABC ، نقطه لوموان K_1 مثلث میانک $A_1B_1C_1$ و مرکز دایره محیطی مثلث پاد مکمل $A'B'C'$ ، نقطه Z' ، همخطند، و $OK_1 = K_1Z'$.

۶۶۹. نقطه لوموان مثلث ABC ، O مرکز دایره محیطی این مثلث است. خطهای DE' ، FD' و EF' از نقطه K موازی ضلعهای مثلث رسم شده اند و انتهای این شش پاره خط روی دایره اول لوموان قرار دارند :



۱. نشان دهید که پاره خطهای $E'F$ ، $F'D$ و $D'E$ برابرند.

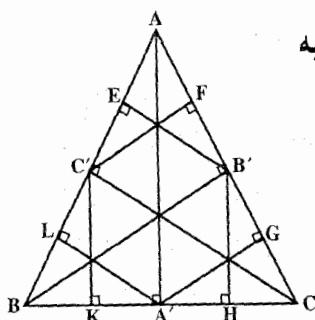
۲. نشان دهید که اگر خطهای $E'F$ ، $F'D$ و $D'E$ را امتداد دهیم، مثلثی تشکیل می شود، که دایره محاطی داخلی اش بر دایره اول لوموان مثلث ABC منطبق و با دایره نه نقطه آن برابر است.

۳. نشان دهید که مجموع مساحتهای $AE'F$ ، $BF'D$ و $CD'E$ با مساحت DEF برابر است.

۴.۴.۵. دایره تیلور

۱.۴.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۰. قضیه. ثابت کنید که تصویرهای پای ارتفاعهای مثلث روی ضلعهای مثلث، شش نقطه اند واقع بر محیط یک دایره. (دایره تیلور)



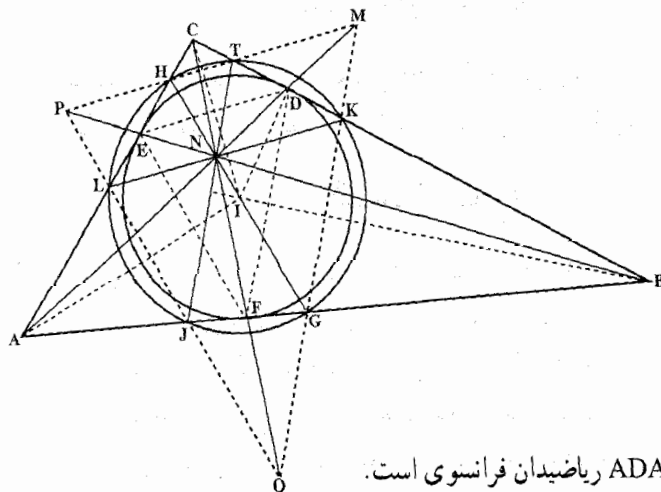
تیلور

بروک تیلور Brook Taylor (۱۶۸۵-۱۷۳۱) ریاضیدان انگلیسی بیشتر شهرتش به خاطر روش او در بسط توابع به صورت رشته های نامتناهی است. او کتابی در مورد مناظر و مرایای خطی نیز دارد.

۵.۴.۵. دایره آدامس

۱.۵.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۱. دایره آدامس. (Cercle d' Adams) اگر از نقطه ژرگون N در مثلث ABC، عمودهایی بر نیمسازهای زاویه های درونی مثلث رسم کنید، شش نقطه حاصل روی محیط مثلث ABC، روی یک دایره اند که مرکز این دایره نقطه I مرکز دایره محاطی درونی مثلث ABC است.

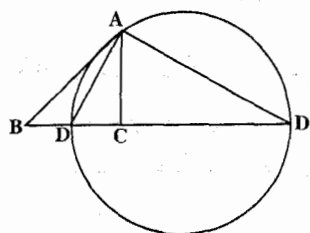


آدامس

آدامس ADAMS ریاضیدان فرانسوی است.

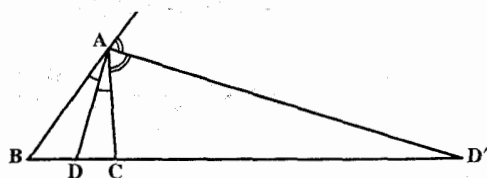
۶.۴.۵. دایره آپولونیوس

۱.۶.۴.۵. تعریف و قضیه



تعریف. نیمسازهای درونی و برونی زاویه A از مثلث ABC ضلع BC را در دو نقطه D و D' قطع می کنند. دایره به قطر DD' ، یک دایره آپولونیوسی مثلث ABC نامیده می شود. هر مثلث مختلف الاضلاع سه دایره آپولونیوسی دارد. مثلث متساوی الساقین دو دایره آپولونیوسی دارد و مثلث متساوی الاضلاع دایره آپولونیوسی ندارد، مگر آن که خط را به عنوان دایره به شعاع بی نهایت بزرگ بپذیریم.

۶۷۲. قضیه. دایره بروکار یک مثلث بر دایره های آپولونیوسی آن عمود است.



۶۷۳. در مثلث ABC ، رأسهای B و

C ثابت و نقطه D پای نیمساز

داخلی زاویه A است. ثابت

کنید، نقطه D' پای نیمساز

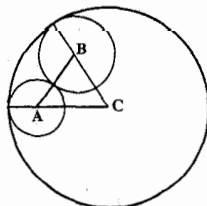
خارجی زاویه A وقتی رأس A حرکت کند، ثابت می ماند.

۵.۵. دایره های دیگر و مثلث

۱.۵.۵. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره های دیگری غیر از دایره های محیطی و محاطی مثلث و دایره های ویژه مانند دایره نه نقطه، دایره لوموان و... را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲.۵.۵. شعاع



۶۷۴. ضلعهای مثلثی برابر ۶ سانتیمتر و ۷ سانتیمتر و ۹ سانتیمتر

است. دایره هایی به مرکزهای هر یک از رأسهای مثلث رسم

کرده ایم، به طوری که دایره هایی که به مرکزهای دو انتهای ضلع

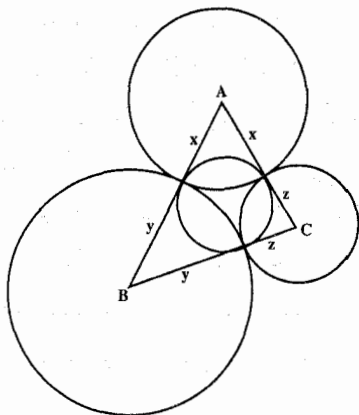
کوچکتر رسم کرده ایم، با یکدیگر مماس خارج بوده و نسبت به

دایره سوم مماس داخل باشند. مطلوب است، محاسبه شعاع هر یک از سه دایره.

۶۷۵. در مثلث ABC ، به مرکزهای A ، B و C سه دایره چنان رسم شده‌اند که دو به دو بر یکدیگر مماس خارج‌جند. ثابت کنید، شعاعهای این دایره‌ها برابرند با:

$$P-a \text{ و } P-b \text{ و } P-c$$

که در آن P نصف محیط مثلث است.

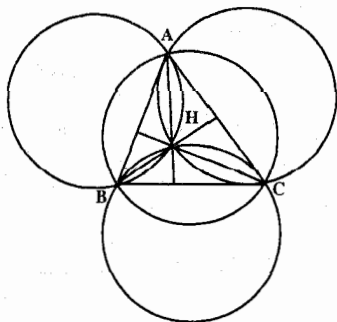


۶۷۶. مثلث ABC و نقطه دلخواه D در صفحه داده شده

است. مثلث تشکیل شده با پای عمودهای وارد از نقطه D بر ضلعهای مثلث ABC ، مثلث پای نقطه D نسبت به مثلث ABC ، و دایره محیطی مثلث پای، دایره پای نامیده می‌شوند. فرض کنید، D_1

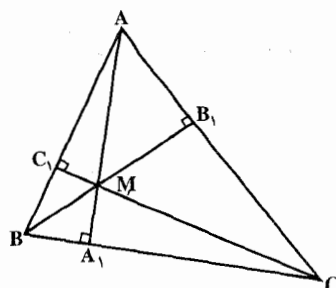
معرف نقطه برخورد خطهای قرینه خطهای AD ، BD و CD ، به ترتیب، نسبت به نیمساز زاویه‌های A ، B و C ی مثلث ABC ، باشد. ثابت کنید که دایره‌های پای نقطه‌های D و D_1 بر هم منطبقند.

۶۷۷. شعاع دایره محیطی هر چهار مثلی که از چهار نقطه A ، B ، C و H (نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث) می‌گذرند، با هم برابر است.



۳.۵.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۵.۵. نقطه درون دایره



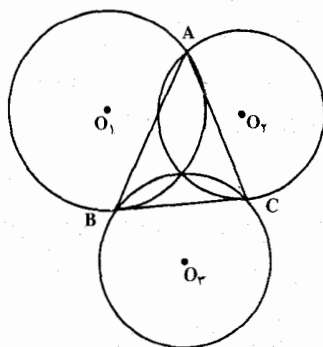
۶۷۸. A_1, B_1, C_1 و C_1 را بترتیب پای ارتفاعهای وارد از رأسهای A, B, C در مثل ABC ، و M را مرکز ارتفاعی مثلث می گیریم. فرض کنید مثلث ارتفاعی (پادک) $A_1B_1C_1$ وجود دارد. ثابت کنید: هر یک از نقطه های A, B, C, M مرکز دایره ای است که بر سه ضلع مثلث $A_1B_1C_1$ (یا

در صورت لزوم، بر امتداد آنها) مماس است. اگر یکی از زاویه های مثلث ABC منفرجه باشد، چه تفاوتی با حالتی دارد که هر سه زاویه مثلث حاده اند.

المیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۹

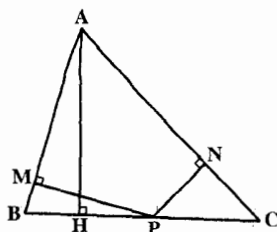
۲.۳.۵.۵. نقطه روی دایره

۶۷۹. از رأسهای (A, B) و (A, C) و (B, C) از مثلث ABC دایره هایی می گذرد که کمانهای واقع در داخل مثلث مجموعاً 180° درجه است. ثابت کنید، این سه دایره از یک نقطه می گذرند.



۳.۳.۵.۵. نقطه های هم دایره

۶۸۰. مثلث ABC و نقطه دلخواه P را روی ضلع BC از آن در نظر گرفته، تصویرهای P روی AB و AC را بترتیب M و N و پای ارتفاع نظیر رأس A را H می نامیم. ثابت کنید، نقطه های A, M, P, H, N روی یک دایره هستند.



۶۸۱. سه خط راست، موازی ضلعهای مثلث رسم کرده‌ایم. هر یک از این خطهای راست، از ضلعی که با آن موازی است، به فاصله‌ای برابر طول همان ضلع قرار دارد. در ضمن، برای هر ضلع مثلث، خط راست موازی با آن و رأس مقابل به این ضلع، در دو طرف مختلف ضلع قرار گرفته‌اند. ضلعهای مثلث را امتداد داده‌ایم تا سه خط راستی را که رسم کرده‌ایم، قطع کنند. ثابت کنید، این نقطه‌های برخورد، روی محیط یک دایره واقعند.

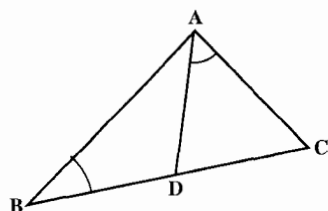
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۷

۴.۳.۵.۵. نقطه‌های همخط

۶۸۲. اگر سه دایره، از یک نقطه واقع بر دایره محیطی مثلث حاصل از مرکزهای آن سه دایره مرور کند، این دایره‌ها دو به دو یکدیگر را در سه نقطه واقع بر یک خط راست قطع می‌کنند.

۴.۵.۵. زاویه

۱.۴.۵.۵. اندازه زاویه



۶۸۳. در مثلث ABC ، میانه AD رسم شده و $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$. اگر $|AB| \neq |AC|$ ، $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۶۸۴. در مثلث ABC ، $\hat{C} = \theta$ ، $\hat{B} = 2\theta$ و $0^\circ < \theta < 60^\circ$. دایره به مرکز A و به شعاع AB با AC در D و با BC ، یا با امتداد آن، در B و E برخورد می‌کند (E ممکن است بر B منطبق باشد). در این صورت چه موقع $EC = AD$ ؟

الف. به ازای هیچ مقدار θ

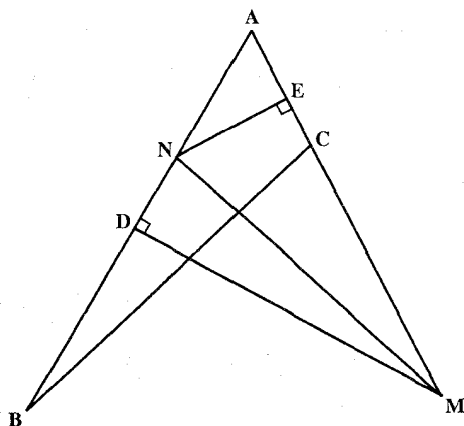
ب. فقط وقتی که $\theta = 45^\circ$

ج. فقط وقتی که $0^\circ < \theta \leq 45^\circ$

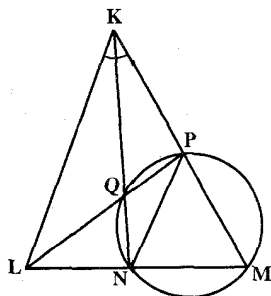
د. فقط وقتی که $45^\circ \leq \theta < 60^\circ$

هـ. به ازای هر مقدار θ با شرط $0^\circ < \theta < 60^\circ$

۶۸۵. در مثلث ABC ، عمود منصف ضلع AB ، خط AC را در M ، و عمود منصف ضلع AC ، خط AB را در N قطع می کند. می دانیم که $MN=BC$ و خط MN بر خط BC عمود است. اندازه زاویه های مثلث ABC را تعیین کنید.

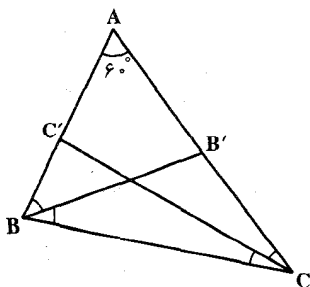


۶۸۶. در مثلث KLM ، دو نیمساز KN و LP که یکدیگر را در نقطه Q قطع می کند، رسم شده اند. پاره خط PN طولی برابر ۱ دارد و رأس M ، بر دایره ای قرار دارد که از نقطه های N ، P و Q می گذرد. طول ضلعها و اندازه زاویه های مثلث PNQ را پیدا کنید.



۲.۴.۵.۵. رابطه بین زاویه ها

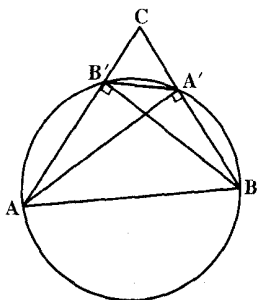
۶۸۷. در مثلث ABC زاویه $\hat{A} = 60^\circ$ است. خطهای BB' و CC' نیمسازهای دو زاویه B و C را رسم می کنیم. ثابت کنید، این نیمسازها با ضلعهای AB و AC زاویه های مساوی می سازند.



۵.۵.۵. پاره خط

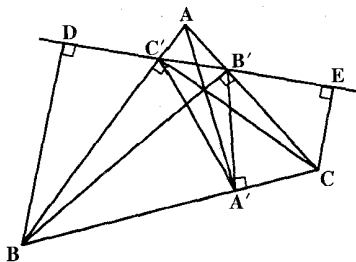
۱.۵.۵.۵. اندازه پاره خط

۶۸۸. اگر AA' و BB' دو ارتفاع از یک مثلث باشند، در صورتی که نقطه‌های A و B ثابت باشند ولی رأس C طوری تغییر کند که زاویه ACB ثابت باشد، ثابت کنید که طول پاره خط $A'B'$ ثابت می‌ماند.



۲.۵.۵.۵. رابطه بین پاره خطها

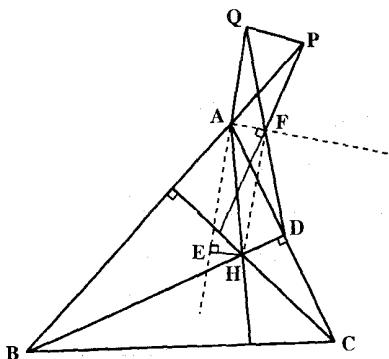
۶۸۹. در مثلث ABC اگر A' ، B' و C' پای ارتفاعها باشند و از رأسهای B و C عمودهای BD و CE را بر خط $B'C'$ فرود آوریم، ثابت کنید: $DE = A'B' + A'C'$ و $DC' = B'E$.



۶.۵.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

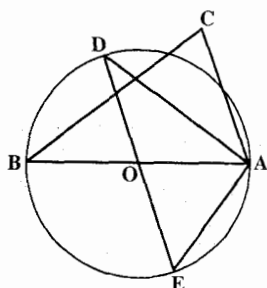
۱.۶.۵.۵. خطها بر هم عمودند

۶۹۰. در مثلث ABC از نقطه H محل برخورد ارتفاعهای HD ، HE و HF را برترتیب بر ضلع AC و نیمسازهای زاویه A رسم می‌کنیم. FE ضلع AB را در نقطه P و خط FD نیمساز AE را در نقطه Q قطع می‌کند. ثابت کنید، PQ بر EF عمود است.

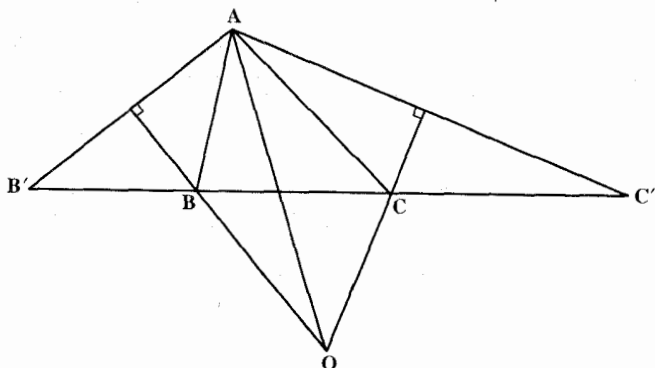


۲.۶.۵.۵. خط نیمساز است

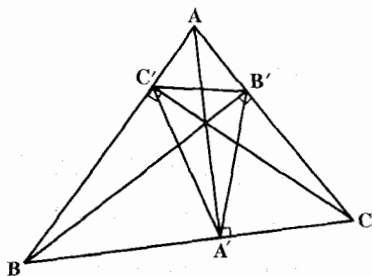
۶۹۱. مثلث ABC را در نظر می گیریم و دایره ای به قطر ضلع AB و قطری از این دایره را که با AC موازی است رسم می کنیم و دو سر آن را D و E می نامیم. ثابت کنید که AD و AE نیمسازهای زاویه های داخلی و خارجی BAC هستند.



۶۹۲. مثلث ABC را در نظر می گیریم و روی امتدادهای ضلع BC دو قطعه خط $BB' = BA$ و $CC' = CA$ را جدا می کنیم و از سه نقطه A, B', C' دایره ای می گذرانیم و مرکز این دایره را O می نامیم. ثابت کنید که AO نیمساز زاویه BAC است.

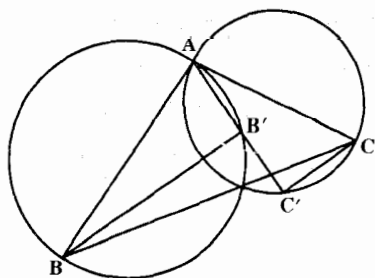


۶۹۳. با استفاده از ویژگی های ضلعهای محاطی ثابت کنید که ارتفاعهای هر مثلث نیمسازهای زاویه های مثلث ارتفاعیه می باشند.



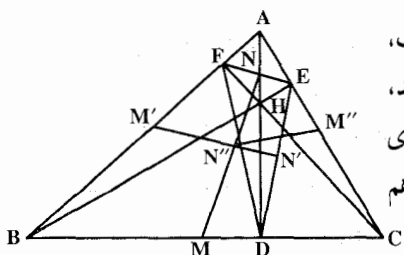
۳.۶.۵.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۶۹۴. مثلث ABC را در نظر گرفته، دو دایره یکی به قطر AB و دیگری به قطر AC رسم می کنیم و از نقطه های B و C دو وتر متوازی BB' و CC' را بترتیب در دو دایره می کشیم. ثابت کنید که $B'C'$ از رأس A می گذرد.



۴.۶.۵.۵ خطها هم‌رسمند

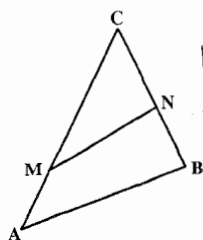
۶۹۵. اگر در مثلث ABC نقطه‌های D ، E و F ، بترتیب، پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A ، B و C باشند، خطهای MN ، $M'N'$ و $M''N''$ که وسطهای ضلعهای مقابل دو مثلث ABC و DEF را به هم متصل می‌سازند، از یک نقطه می‌گذرند.



۶۹۶. A' وسط ضلع BC از مثلث ABC ، نقطه وسط پاره خط MN ، که دو خط هم‌زاویه AN و AM روی خطی که از A' می‌گذرد جدا می‌کنند، نیز هست. اگر خطهای BN و CN ، خط AM را در E و F قطع کنند، نشان دهید مماسهایی که در C و B بر دایره‌های ABE و ACF رسم می‌شوند، یکدیگر را روی خط AN قطع می‌کنند.

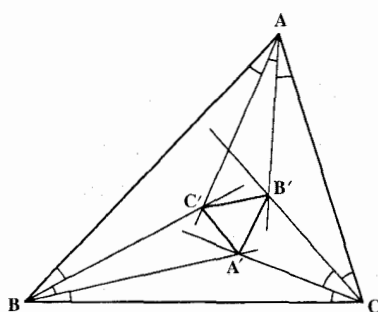
۵.۶.۵.۵ خط مماس بر دایره است

۶۹۷. خط راستی در مثلث ABC رسم می‌شود تا ضلعهای AC و BC را در نقطه‌های M و N طوری قطع کند که $MN = AM + BN$. ثابت کنید که تمام چنین خطهایی بر یک دایره مماسند.

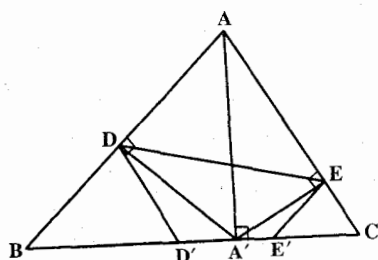


۷.۵.۵ شکلهای ایجاد شده

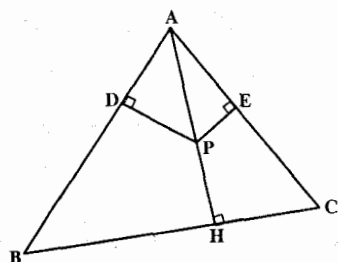
۶۹۸. قضیه مورلی. هرگاه در داخل مثلث از هر رأس دو نیمخط چنان رسم کنیم که زاویه آن رأس را به سه قسمت برابر تقسیم کنند، نقطه‌هایی که از برخورد هر دو نیمخط مجاور به هر ضلع پدید می‌آید، مثلی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند. این قضیه بسیار زیبای هندسه مقدماتی توسط فرانک مورلی Frank Morley (۱۸۶۰-۱۹۳۷)



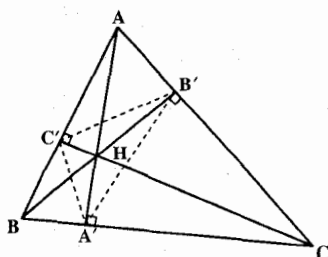
ریاضی‌دان انگلیسی در حدود سال ۱۹۰۴ ثابت شد. وی ابتدا این قضیه را برای دوستان انگلیسی خود در کامبریج شرح داد ولی بیست سال پس از آن در سال ۱۹۲۴ حل آن را در یک مجله ریاضی ژاپنی به چاپ رسانید. در این مدت این قضیه مجدداً کشف شده و در مجله تربیتی تایمز تحت عنوان مسأله، درج شده بود، که دو راه حل برای آن فرستاده شده بود. یکی از این راه‌ها از طرف م. ت. نارانیگار M.T.Naraniengar ارائه شده بود که از بسیاری از راه‌های که بعداً این مسأله ارائه شد زیباتر است.



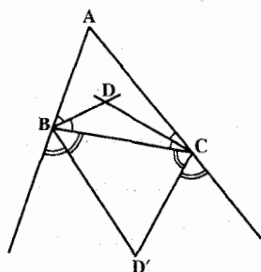
۶۹۹. مثلث ABC مفروض است. ارتفاع AA' را رسم کرده، تصویر A' روی ضلعهای AB و AC را بترتیب D و E می‌نامیم. از D خطی به موازات AC و از E خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا بترتیب ضلع BC را در D' و E' قطع کنند. ثابت کنید، چهارضلعیهای $BDEC$ و $DEE'D'$ محاطی هستند.



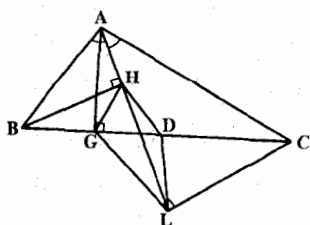
۷۰۰. در مثلث ABC از نقطه P واقع بر ارتفاع AH دو عمود PD و PE را بترتیب بر ضلعهای AB و AC فرود می‌آوریم. ثابت کنید، چهارضلعیهای $BDEC$ و $PDAE$ محاطی است.



۷۰۱. ثابت کنید که هفت نقطه حاصل از رأسها و پای ارتفاعها و محل برخورد سه ارتفاع هر مثلث را اگر چهار به چهار به هم وصل کنیم، شش چهارضلعی محاطی ایجاد می‌شود.



۷۰۲. در مثلث ABC ، نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C را D و نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی B و C را D' می‌نامیم. ثابت کنید، چهارضلعی $DBD'C$ محاطی است.



۷۰۳. اگر نیمساز AL از مثلث ABC را رسم کنیم و عمودهای BH و CL را بر این نیمساز رسم نماییم، ثابت کنید، چهارضلعی $DHGL$ محاطی است. D وسط ضلع BC و G پای ارتفاع رأس A است.

۸.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

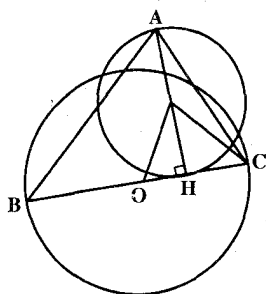
۷۰۴. ثابت کنید که تصویرهای پای یک ارتفاع مثلث روی ضلعهایی که این ارتفاع را دربردارند و روی دو ارتفاع دیگر بر یک خط راست واقعند.

۷۰۵. قضیه. اگر دو پاد موازی دو ضلع یک مثلث طولهایی برابر داشته باشند، یکدیگر را روی میانه متقارن وارد بر ضلع سوم قطع می‌کنند.

۷۰۶. نشان دهید که در مثلث ABC :

الف. دایره‌هایی که به قطر AH و BC رسم می‌شوند، متعامدند.

ب. دایره IBC با دایره‌ای که به قطر $I_b I_c$ رسم می‌شوند، متعامد است.



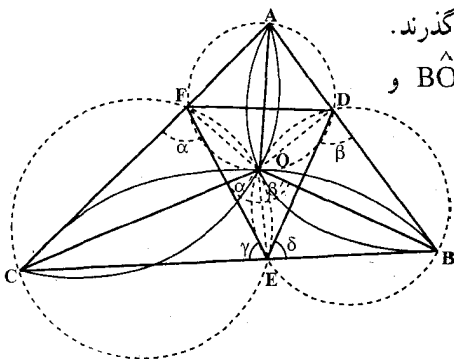
۹.۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

۷۰۷. از سه رأس مثلث ABC سه دایره می‌گذرند که دوه‌دو یکدیگر را روی ضلعهای مثلث در نقطه‌های D, E, F قطع می‌کنند. ثابت کنید:

۱. این سه دایره از یک نقطه مانند O می‌گذرند.

۲. $\hat{AOB} = \hat{C} + \hat{D}$ و $\hat{BOC} = \hat{A} + \hat{E}$ و

$\hat{COA} = \hat{B} + \hat{F}$.



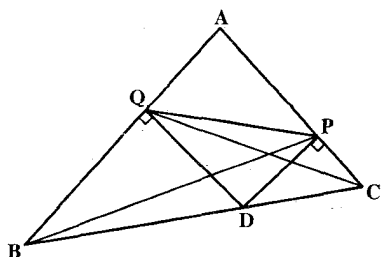
۷۰۸. DQ و DP عمودهایی هستند که از پای

ارتفاع AD از مثلث ABC بر ضلعهای AC

و AB رسم شده‌اند. ثابت کنید که نقطه‌های

P, C, B و Q هم‌دایره‌اند (روی یک دایره

هستند) و $\hat{DPB} = \hat{CQD}$.



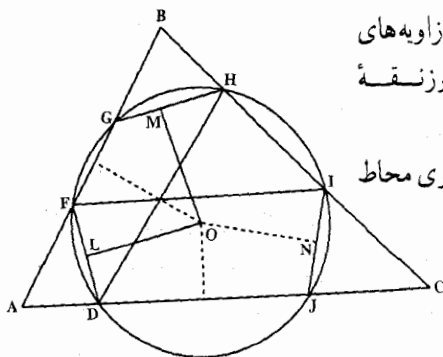
۷۰۹. روی هر یک از ضلعهای مثلث غیر مشخص ABC مثلثهای متساوی الاضلاعی می سازیم و رأس سوم مثلثهای جدید را A' ، B' و C' می نامیم (A' رأس سوم مثلثی است که روی BC ساخته شده است). ثابت کنید:

۱. $AA' = BB' = CC'$.

۲. AA' ، BB' و CC' از یک نقطه مانند M می گذرند.

۳. هر یک از چهار ضلعیهای $AMCB'$ و $AMBC'$ و $BMCA'$ محاطی اند.

۴. هر یک از زاویه هایی که حول نقطه M تشکیل شده است برابر است با 60° درجه.



۷۱۰. ۱. آنتی پارالل های مساوی نظیر دو ضلع های

A و C از مثلث ABC یک دوزنقه متساوی الساقین می سازند.

۲. نقطه های انتهایی سه آنتی پارالل مساوی محاط شده در یک مثلث، روی یک دایره اند.

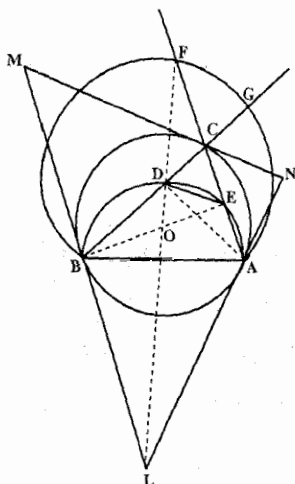
۷۱۱. ثابت کنید:

۱. تمام دایره هایی که بر دو انتهای یک ضلع مثلث می گذرند، دو ضلع دیگر مثلث را در خطی قطع می کنند که آنتی پارالل (پاد موازی) آن ضلع نسبت به دو ضلع دیگر است.

۲. خطهایی که پای دو ارتفاع یک مثلث را به هم وصل می کنند، آنتی پارالل ضلع سوم مثلث نسبت به دو ضلع دیگر می باشند.

۳. مماسهای رسم شده بر دایره محیطی مثلث در رأسهای مثلث، آنتی پارالل ضلعهای روبه رویشان از مثلث داده شده می باشند.

۴. آنتی پارالل هر یک از ضلعهای مثلث عمود بر شعاع دایره محیطی نظیر رأس مقابل به ضلع آن است.



بخش ۶

● دایره و مثلثهای ویژه (متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، ...)

۱.۶. دایره و مثلث متساوی الاضلاع

۱.۱.۶. تعریف و قضیه

۲.۱.۶. شعاع

۳.۱.۶. نقطه و دایره

۴.۱.۶. زاویه

۵.۱.۶. پاره خط

۶.۱.۶. شکل‌های ایجاد شده

۷.۱.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸.۱.۶. مسأله‌های ترکیبی

۲.۶. دایره و مثلث متساوی الساقین

۱.۲.۶. تعریف و قضیه

۲.۲.۶. شعاع

۳.۲.۶. نقطه و دایره

۴.۲.۶. زاویه

۱.۴.۲.۶. اندازه زاویه

۲.۴.۲.۶. رابطه بین زاویه‌ها

۵.۲.۶. خط‌های: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۵.۲.۶. خط‌ها بر هم عمودند

۲.۵.۲.۶. خط مماس بر دایره است

۶.۲.۶. شکل‌های ایجاد شده

۳.۶. دایره و مثلث قائم الزاویه

۱.۳.۶. تعریف و قضیه

۲.۳.۶. شعاع

۱.۲.۳.۶. اندازه شعاع

۲.۲.۳.۶. رابطه بین شعاعها

۳.۳.۶. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۶. نقطه درون دایره

۲.۳.۳.۶. نقطه روی دایره

۴.۳.۶. قطر

۵.۳.۶. زاویه

۶.۳.۶. پاره خط

۷.۳.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم ، ...

۱.۷.۳.۶. خطها بر هم عمودند

۲.۷.۳.۶. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۳.۷.۳.۶. خط مماس بر دایره است

۸.۳.۶. شکلهای ایجاد شده

۹.۳.۶. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۱۰.۳.۶. مسأله های ترکیبی

۴.۶. دایره و مثلثهای حاده الزاویه و منفرجه الزاویه

۱.۴.۶. تعریف و قضیه

۲.۴.۶. شعاع

۳.۴.۶. نقطه و دایره

۱.۳.۴.۶. نقطه درون دایره

۲.۳.۴.۶. نقطه برون دایره

۴.۴.۶. زاویه

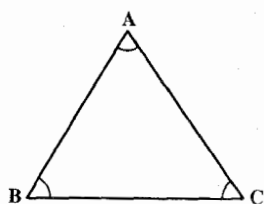
۵.۴.۶. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

بخش ۶. دایره و مثلثهای ویژه (متساوی الاضلاع و متساوی الساقین، ...)

۱.۶. دایره و مثلث متساوی الاضلاع

۱.۱.۶. تعریف و قضیه

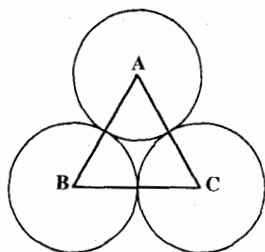
در این بخش مطالب مربوط به دایره و مثلثهای ویژه را مورد بررسی قرار می دهیم. در قسمت نخست این بخش دایره و مثلث متساوی الاضلاع مورد بررسی قرار می گیرد. می دانیم مثلث متساوی الاضلاع مثلثی است که سه ضلع آن با هم برابرند مانند مثلث متساوی الاضلاع ABC که در آن:



$$AB = AC = BC \quad ۱.$$

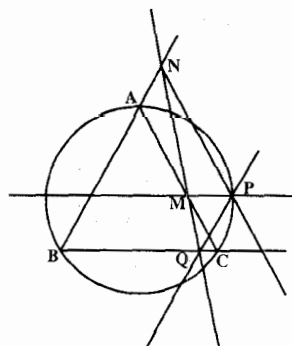
۲. در هر مثلث متساوی الاضلاع سه زاویه با هم برابر و هر کدام 60° درجه می باشد.

۲.۱.۶. شعاع



۷۱۲. مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع a داده شده است. به مرکزهای A، B و C و به شعاع $\frac{a}{2}$ سه دایره رسم می کنیم. مطلوب است، محاسبه شعاعهای دو دایره ای که بر این سه دایره مماس باشند.

۳.۱.۶. نقطه و دایره



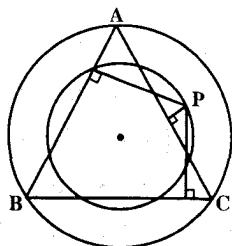
۷۱۳. از نقطه ای روی دایره محیطی مثلث متساوی الاضلاع ABC، خطهایی راست موازی با BC، CA و AB رسم شده اند که AB، CA و BC را به ترتیب در نقطه های M، N و Q قطع می کنند. ثابت کنید که M، N و Q بر یک خط راست واقعند.

۴.۱.۶. زاویه

۷۱۴. مرکز دایره به شعاع ۱۰ سانتیمتر رأس C از مثلث متساوی الاضلاع ABC است، و دایره از دو رأس دیگر مثلث می‌گذرد. امتداد ضلع AC ، دایره را در نقطه D قطع می‌کند. اندازه زاویه ADB برحسب درجه برابر است با:

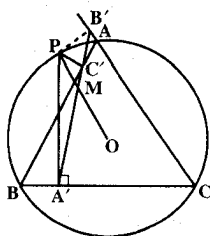
الف) ۱۵ ب) ۳۰ ج) ۶۰ د) ۹۰ ه) ۱۲۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا، ۱۹۵۶

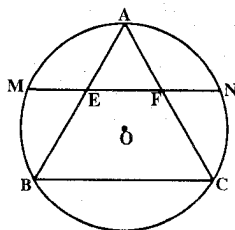


۷۱۵. نقطه متغیر P روی دایره‌ای هم مرکز با مثلث متساوی الاضلاع ABC قرار دارد. نشان دهید که زاویه بروکار مثلث پادک P نسبت به ABC ثابت است.

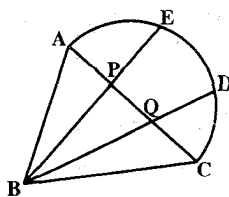
۵.۱.۶. پاره خط



۷۱۶. مثلث متساوی الاضلاع ABC در دایره به مرکز O محاط است و P نقطه‌ای از این دایره است. ثابت کنید که خط سمسن نظیر نقطه P از وسط شعاع OP می‌گذرد.

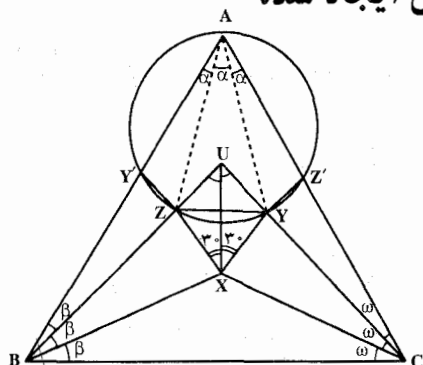


۷۱۷. مثلث متساوی الاضلاع ABC محاط در دایره O داده شده است. اگر M و N وسطهای کمانهای AB و BC باشند، ثابت کنید وتر MN به وسیله ضلعهای مثلث به سه قسمت متساوی تقسیم می‌شود.



۷۱۸. مثلث متساوی الاضلاع ABC مفروض است. به قطر AC در بیرون مثلث نمیدایره‌ای رسم می‌کنیم. از رأس B دو خط چنان می‌کشیم که این نمیدایره را به سه کمان برابر با هم بخش کنند. ثابت کنید که این دو خط، پاره خط AC را نیز به سه پاره خط برابر با هم بخش می‌کنند.

۶.۱.۶. شکلهای ایجاد شده



۷۱۹. هرگاه مثلث ABC متساوی الاضلاع

باشد، ثابت کنید که نقطه های Y, Z, Y'

و Z' چهار رأس از یک چند ضلعی منتظم

می باشند و نقطه A رأس دیگری از این

چند ضلعی و روبه روی ضلع AY است.

۷۲۰. نشان دهید اگر شعاع دایره محاطی داخلی

مثلثی برابر نصف شعاع دایره محیطی آن

مثلث باشد، مثلث متساوی الاضلاع است.

۷۲۱. نشان دهید که اگر مرکز ارتفاعی یک مثلث روی دایره پروکار باشد، مثلث متساوی الاضلاع است.

۷۲۲. نیمسازهای AA_1, BB_1, CC_1 از مثلث ABC ، در نقطه M به هم رسیده اند. ثابت

کنید، اگر شعاعهای دایره های محاط در مثلثهای $MA_1B, MC_1B, MC_1A, MB_1A$

MA_1C و MB_1C با هم برابر باشند، مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

المیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران بلژیک، ۱۹۷۶

۷.۱.۶. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۷۲۳. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی الاضلاع دایره محاطی داخلی بر سه دایره محاطی

برونی مماس می باشد.

۸.۱.۶. مسأله های ترکیبی

۷۲۴. مثلث متساوی الاضلاع ABC و دایره محیطی آن را در نظر می گیریم. نقطه M را روی

کمان BC اختیار کرده و روی پاره خط AM پاره خط

$MD = MC$ را جدا می کنیم.

۱. ثابت کنید مثلث MDC متساوی الاضلاع است

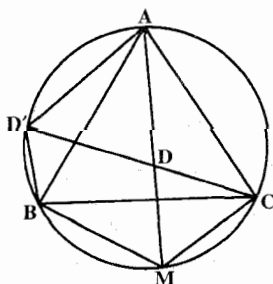
و CD موازی MB می باشد.

۲. دایره CD را در نقطه D' قطع می کند. نوع

چهارضلعی $MBD'D$ را تعیین کنید.

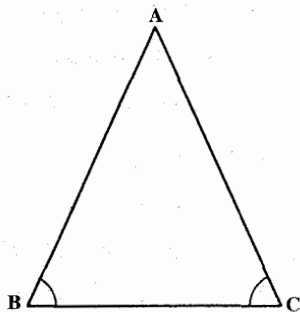
۳. ثابت کنید مثلث ADD' متساوی الاضلاع است و نتیجه بگیرید که

$MA = MB + MC$ می باشد.



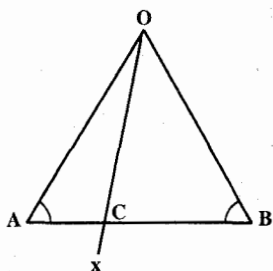
۲.۶. دایره و مثلث متساوی الساقین

۱.۲.۶. تعریف و قضیه



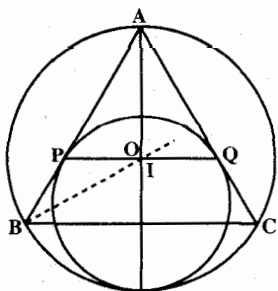
در این قسمت قضیه ها و مسأله های مربوط به دایره و مثلث متساوی الساقین را بررسی می کنیم. می دانیم مثلث متساوی الساقین مثلثی است که دو ضلع آن با هم برابرند. این دو ضلع برابر را ساقها و ضلع سوم را قاعده مثلث متساوی الساقین می نامند. مانند مثلث متساوی الساقین ABC که در آن $AB = AC$ است. زاویه های مجاور به قاعده در هر مثلث متساوی الساقین با هم برابر هستند.

۲.۲.۶. شعاع



۷۲۵. مثلث متساوی الساقین OAB ($OA = OB$) را در نظر می گیریم و نیمخط دلخواه Ox را از نقطه O رسم می کنیم تا خط راست AB را در نقطه C قطع کند. ثابت کنید که دو دایره OAC و OBC متساوی اند.

۳.۲.۶. نقطه و دایره

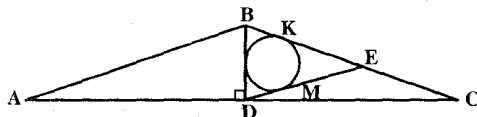


۷۲۶. در مثلث ABC ، $AB = AC$ است. دایره ای به دایره محیطی مثلث ABC مماس داخلی، همچنین به ضلعهای AB و AC بترتیب در نقطه های P و Q مماس است. ثابت کنید که وسط پاره خط PQ مرکز دایره محاطی داخلی مثلث ABC است.

۴.۲.۶. زاویه

۱.۴.۲.۶. اندازه زاویه

۷۲۷. پاره خط BD ارتفاعی از مثلث ABC و DE میانه مثلث BCD است. دایره محاط در مثلث BDE بر ضلع BE در نقطه K و بر ضلع DE در نقطه M مماس است. اگر $AB = BC = 8\text{cm}$ و $KM = 2\text{cm}$ باشد، زاویه های مثلث داده شده را به دست آورید.



۲.۴.۲.۶. رابطه بین زاویه ها

۷۲۸. مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) را

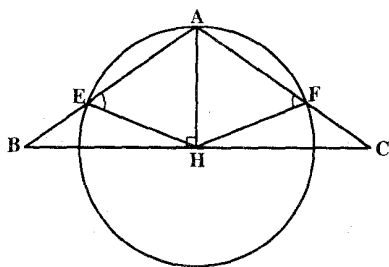
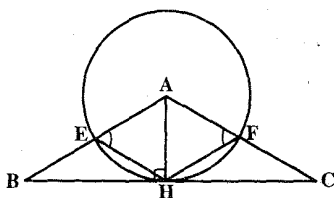
در نظر گرفته، ارتفاع AH را رسم می کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع AH دایره ای رسم می کنیم تا AB و AC را به ترتیب در نقطه های E و F قطع

کند. ثابت کنید: $\angle AEH = \angle AFH$.

۷۲۹. مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) را

در نظر گرفته ارتفاع AH آن را رسم می کنیم. به مرکز H و به شعاع AH دایره ای رسم می کنیم تا ضلع های AB و AC را به ترتیب در نقطه های E و

F قطع کند. ثابت کنید: $\angle AEH = \angle AFH$.

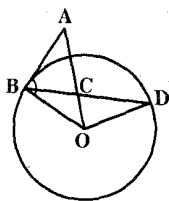


۵.۲.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۵.۲.۶. خطها بر هم عمودند

۷۳۰. مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) را در نظر گرفته، از

رأس B عمودی بر AB اخراج می کنیم تا امتداد AC را در نقطه O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OB دایره ای رسم می کنیم تا امتداد BC را در نقطه D قطع کند. ثابت کنید OD عمود بر OA است.



۲.۵.۲.۶. خط مماس بر دایره است

۷۳۱. مثلث متساوی الساقین ABC داده شده است.

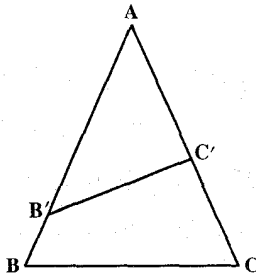
روی ضلع AB نقطه B' و روی ضلع AC نقطه

C' را چنان اختیار می‌کنیم که:

$B'C' = BB' + CC'$ باشد. ثابت کنید که دایره

مماس به ضلعهای AB و AC در نقطه‌های B و

C، بر خط $B'C'$ مماس است.

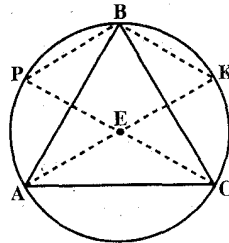


۶.۲.۶. شکلهای ایجاد شده

۷۳۲. دایره‌ای را بر مثلث ABC ($AB = BC$) محیط کرده‌ایم. امتداد نیمسازهای زاویه‌های

A و C دایره را در نقطه‌های K و P و همدیگر را در E قطع می‌کنند. ثابت کنید که

چهارضلعی BKEP یک لوزی است.



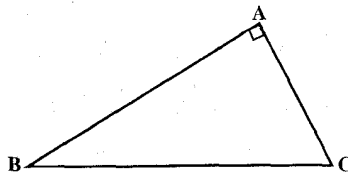
۳.۶. دایره و مثلث قائم الزاویه

۱.۳.۶. تعریف و قضیه

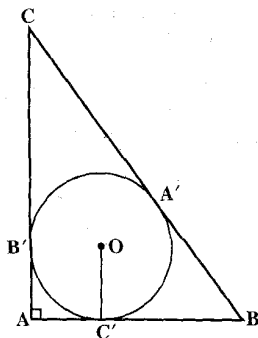
در این قسمت مطالب مربوط به دایره و مثلث قائم الزاویه را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم

مثلث قائم الزاویه مثلثی است که یک زاویه قائمه دارد. مانند مثلث قائم الزاویه ABC که در آن

$\hat{A} = 90^\circ$ می‌باشد.



۲.۳.۶ شعاع



۱.۲.۳.۶ اندازه شعاع

۷۳۳. طول ضلعهای a, b و c در یک مثلث قائم الزاویه را می دانیم. شعاع دایره محاطی آن را بر حسب ضلعها به دست آورید.

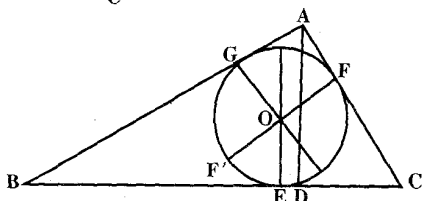
۷۳۴. r را شعاع دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه ABC

می گیریم. ثابت کنید: r از نصف هر

یک از ضلعهای مجاور به زاویه قائمه

و همچنین از $\frac{1}{4}$ طول وتر مثلث ABC

کوچکتر است.



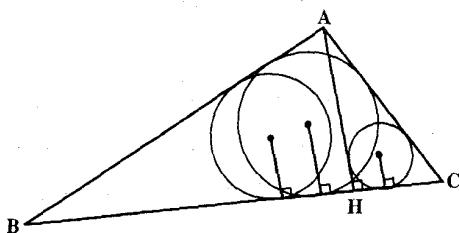
المیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۵

۲.۲.۳.۶ رابطه بین شعاعها

۷۳۵. در مثلث قائم الزاویه ABC ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می کنیم. ثابت کنید که

مجموع شعاعهای دایره های محاطی سه مثلث ABC و ABH و ACH ، مساوی است با

ارتفاع AH .

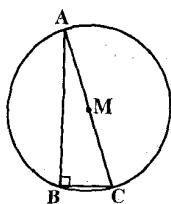


۳.۳.۶ نقطه و دایره

۱.۳.۳.۶ نقطه درون دایره

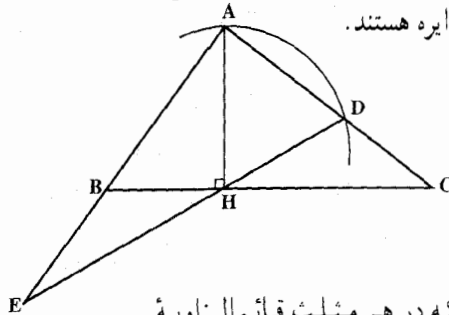
۷۳۶. ثابت کنید مرکز دایره محیطی مثلث قائم الزاویه، وسط وتر آن

است.

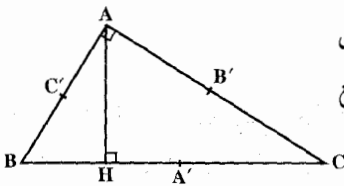


۲.۳.۳.۶. نقطه روی دایره

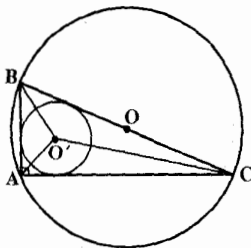
۷۳۷. مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را در نظر گرفته، ارتفاع AH آن را رسم می کنیم و به مرکز H و به شعاع HA دایره ای رسم می کنیم تا ضلع AC را در نقطه دیگری مانند D قطع کند. خط DH خط AB را در نقطه E قطع می کند. ثابت کنید نقطه های B, C, D, E روی یک دایره هستند.



۷۳۸. ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) رأس زاویه قائمه و نقطه پای ارتفاع AH و وسطهای سه ضلع، پنج نقطه واقع بر یک دایره هستند.

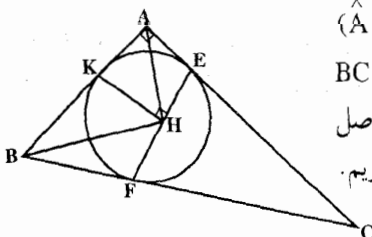


۴.۳.۶. قطر



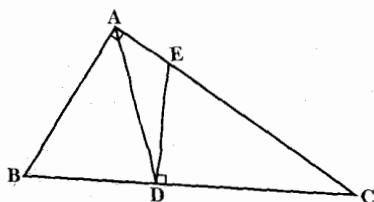
۷۳۹. ثابت کنید که در هر مثلث قائم الزاویه مجموع ضلعهای زاویه قائمه مساوی است با مجموع قطرهای دایره های محیطی و محاطی مثلث.

۵.۳.۶. زاویه



۷۴۰. دایره محاطی مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) در نقطه های E, F, K به ترتیب بر ضلعهای AC, BC, AB و مثلث مماس است. نقطه های E و F را وصل کرده از نقطه K عمود KH را بر آن فرود می آوریم. ثابت کنید، $\hat{AHB} = 90^\circ$ است.

۶.۳.۶. پاره خط

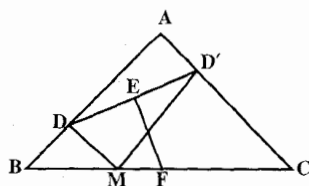


۷۴۱. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم تا وتر BC را در نقطه D قطع کند و از D عمودی بر وتر اخراج می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطه E تلاقی نماید. ثابت کنید: $BD = DE$.

۷۴۲. ثابت کنید خط مرکزین دو دایره محاطی دو مثلث قائم الزاویه که به وسیله ارتفاع وارد بر وتر یک مثلث قائم الزاویه معلوم به وجود می‌آیند، مساوی فاصله مرکز دایره محاطی این مثلث از رأس زاویه قائمه‌اش می‌باشد.

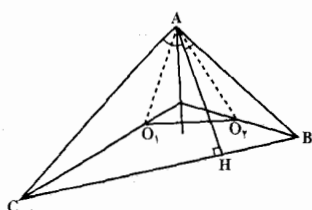
۷.۳.۶. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۷.۳.۶. خطها بر هم عمودند



۷۴۳. مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین ABC ($\hat{A} = 90^\circ$ $AB = AC$) داده شده است. از نقطه M واقع بر وتر BC عمودهای MD و MD' را به ترتیب بر AB و AC فرود آورده،

وسط DD' را E و وسط BC را F می‌نامیم. ثابت کنید EF بر DD' عمود است.



۷۴۴. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH رسم شده است. ثابت کنید خط مرکزین دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث حاصل، بر نیمساز زاویه A عمود است.

۲.۷.۳.۶. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۷۴۵. روی قطعه خط ثابت AB مثلث متغیر و قائم الزاویه ABC را می‌سازیم. اگر B' و C' نقطه‌های تماس دایره محاطی مثلث با ضلعهای AB و AC باشند، ثابت کنید که $B'C'$ از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۷۴۶. ثابت کنید خط اولر هر مثلث از یک رأس آن می‌گذرد، در صورتی که مثلث، متساوی الساقین یا قائم الزاویه باشد.

۳.۷.۳.۶. خط مماس بر دایره است

۷۴۷. در مثلث ODE ضلع OD کوچکتر از OE

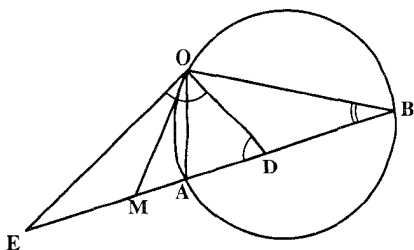
می باشد و زاویه O ، 90° درجه است. A و

B هر دو، دو نقطه از وتر DE می باشند.

به طوری که زاویه های AOD و BOD هر

یک ۴۵ درجه هستند. نشان دهید خط

MO که نقطه O را به وسط DE یعنی M وصل می کند به دایره OAB مماس است.



۸.۳.۶. شکلهای ایجاد شده

۷۴۸. قضیہ پُلَاک POLLOCK. رأسہای مثلث

قائم الزاوية ABC دائرة محيطي آن را به سه

کمان تقسیم می کند، یکی BC ، برابر نصف

محیط دایره و دو کمان $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ که مکمل

یکدیگرند. نقطه‌های O و D و G روی

قوسهای $\widehat{BC}$ ، $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ را چنان اختیار

می‌کنیم که مماسهای رسم شده بر دایره در این

نقطه‌ها امتداد ضلعهای زاویه قائم را حنان قطع

کنند که $OM = ON$ و $DE = DF$ و $GH = GL$ باشد. ثابت کنید که مثلث ODG

متساوی الاضلاع است.

۷۴۹. زاویه C از مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)

برابر 30° است. ارتفاع AH و میانه AM را رسم

می‌کنیم و از C عمود CD را بر میانه AM فرود

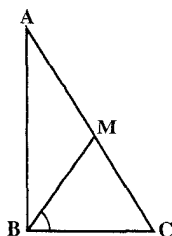
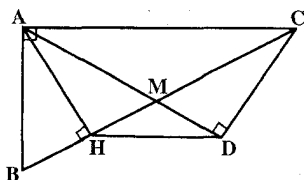
می آوریم. ثابت کنید AHDC دوزنقہ

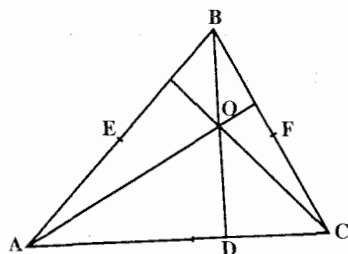
متساوی الساقینی است که قاعدهٔ کوچکتر آن با ساق

آن برابر است.

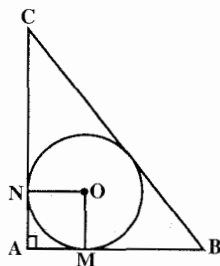
۷۵۰. ثابت کنید اگر در مثلث ABC میانه AM نصف

BC باشد، این مثلث در رأس A قائم الزاویه است.



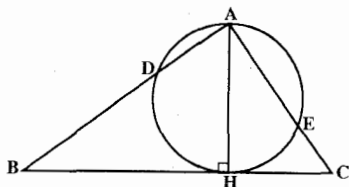


۷۵۱. ثابت کنید اگر نقطه تلاقی ارتفاعهای مثلث و وسطهای ضلعهای آن روی یک دایره واقع باشند، مثلث قائم الزاویه است.



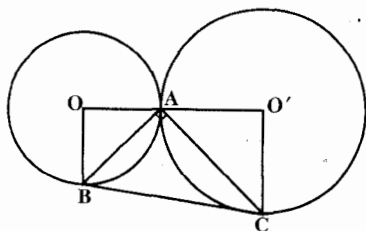
۷۵۲. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نقاط تماس دایره محاطی داخلی با ضلعهای زاویه قائمه را M و N و مرکز دایره محاطی داخلی را O می‌نامیم، ثابت کنید چهارضلعی $AMON$ مربع است.

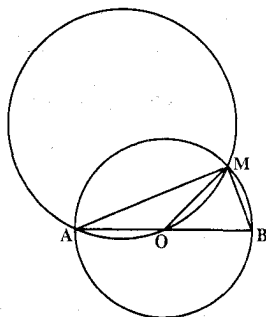
۷۵۳. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و دایره‌ای به قطر AH رسم می‌نماییم. این دایره ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند. ثابت کنید، چهارضلعی $BCED$ محاطی است.



۹.۳.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۵۴. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) دایره‌ای بر A و B می‌گذرانیم به قسمی که در B بر وتر مماس باشد و دایره‌ای هم بر C و A مرور می‌دهیم که در C بر وتر مماس شود. ثابت کنید که این دو دایره بر یکدیگر مماسند.





۷۵۵. مثلث قائم الزاویه AMB را در نظر می گیریم. مرکز دایره محیطی این مثلث را O می نامیم و سپس دایره های محیطی مثلثهای AMO و BMO را رسم می کنیم. ثابت کنید این دو دایره بر هم عمودند.

۷۵۶. کدام ترکیب از اجزایی که در زیر داده شده اند، مثلث مورد نظر را مشخص نمی کند؟
 (الف) زاویه مجاور به قاعده و زاویه رأس؛ مثلث متساوی الساقین
 (ب) قاعده و زاویه رأس؛ مثلث متساوی الساقین
 (ج) شعاع دایره محیطی؛ مثلث متساوی الاضلاع
 (د) یک ضلع و شعاع دایره محاطی؛ مثلث قائم الزاویه
 (ه) دو زاویه و ضلع روبه رو به یکی از آن دو؛ مثلث مختلف الاضلاع

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۶

۱۰.۳.۶. مسأله های ترکیبی

۷۵۷. دو دایره به قطر ضلعهای قائم مثلث قائم الزاویه ABC را در نظر می گیریم:
 (الف) نشان دهید خطهایی که از یک سر یک قطر دایره ای به سر قطر دایره ای دیگر رسم شود از نقطه مشترک دو دایره می گذرند؛
 (ب) نشان دهید که چهار نقطه انتهایی دو قطر عمود بر هم از این دو دایره یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل می دهند و برعکس.

۷۵۸. مثلث ABC زاویه ای قائمه در رأس A دارد و AD ارتفاع آن است. نیمساز زاویه های BAD و CAD ضلع BC را در S و S' قطع می کنند و نیمساز زاویه های ABD و ACD ارتفاع AD را در T و T' ، اگر U, V و W مرکزهای دایره های محاطی مثلثهای ABC, ABD و ACD باشند، ثابت کنید:

(الف) نقطه های B, C, V و W چهار نقطه ای هستند که هر یک محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که از سه نقطه دیگر تشکیل شده است.

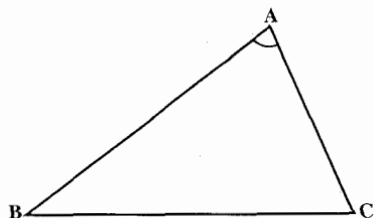
(ب) مرکز دایره محیطی مثلث AVW روی خط AD است.

(ج) نقطه های B, C, V و W روی یک دایره اند.

(د) نقطه های S, S', T و T' خاصیت نقطه های مذکور در الف را دارند. خاصیتهای دیگر شکل را بیان کنید.

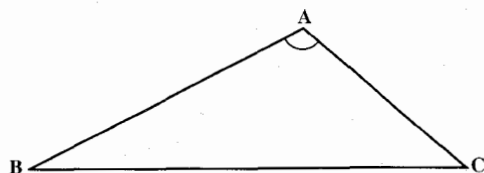
۴.۶. دایره و مثلثهای حاده الزاویه و منفرجه الزاویه

۴.۶.۱. تعریف و قضیه



در این قسمت به بررسی مطالب مربوط به دایره و مثلثهایی که هر سه زاویه‌شان حاده است و مثلثی که زاویه منفرجه دارد، می‌پردازیم.

مثلثی را که هر سه زاویه‌اش حاده است، مثلث با زاویه‌های حاده، یا مثلث حاده‌الزاویه و یا بطور خلاصه مثلث حاده می‌نامند، مانند مثلث ABC.



مثلثی را که زاویه‌ای منفرجه دارد، مثلث منفرجه‌الزاویه و یا بطور خلاصه مثلث منفرجه می‌نامند. مانند مثلث ABC.

۴.۶.۲. شعاع

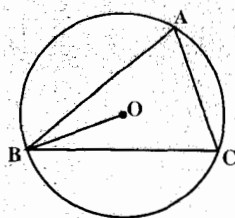
۷۵۹. مثلث ABC زاویه‌هایی حاده دارد و در ضمن، متساوی الساقین نیست. AD، BE و CF، ارتفاعهای این مثلثند. نقطه‌های X، Y و Z چنانند که نقطه‌های D، E و F بترتیب وسط پاره‌خطهای راست BX، CY و AZ هستند. ثابت کنید، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای ACX، ABY و BCZ رأسهای مثلثی‌اند که با مثلث ABC برابر است.

المیادای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۴.۶.۳. نقطه و دایره

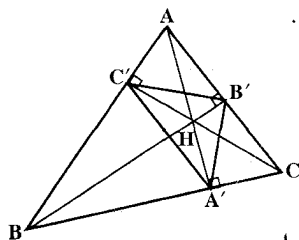
۴.۶.۳.۱. نقطه درون دایره

۷۶۰. بنابر آن که یک مثلث دارای سه زاویه حاده باشد، ثابت کنید که مرکز دایره محیطی آن داخل مثلث واقع است.



۷۶۱. قضیه. در هر مثلث حاده خطهای متقارن ضلعهای مثلث پادک نسبت به ضلعهای متناظر مثلث داده شده، مثلثی تشکیل می دهند که مرکز دایرة محاطی داخلی آن بر مرکز دایرة محیطی مثلث داده شده منطبق است.

۷۶۲. ثابت کنید در هر مثلث با زاویه های حاده، مرکز ارتفاعی بر مرکز دایرة محاطی داخلی مثلث ارتفاعی منطبق است.



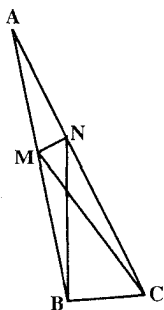
۲. ۳. ۴. ۶. نقطه برون دایره

۷۶۳. ثابت کنید که اگر یک زاویه از مثلثی منفرجه باشد، مرکز دایرة محیطی و همچنین مرکز ارتفاعی این مثلث در خارج آن واقع است.

مرکز ارتفاعی. نقطه برخورد ارتفاعهای هر مثلث را مرکز ارتفاعی آن مثلث می نامند. مثلث ارتفاعی یا مثلث ارتفاعیه. مثلثی را که رأسهای آن پای ارتفاعهای یک مثلث باشند، مثلث ارتفاعی یا مثلث ارتفاعیه آن مثلث می نامند.

۷۶۴. ثابت کنید که اگر یک زاویه از مثلثی منفرجه باشد، مرکز ارتفاعی آن بر مرکز یکی از دایره های محاطی خارجی مثلث ارتفاعی منطبق است.

۴. ۴. ۶. زاویه



۷۶۵. در مثلث ABC ، $\hat{B} = 10^\circ$ و $\hat{C} = 65^\circ$ ؛ نقطه

M روی AB طوری اختیار می شود که

$\hat{MCB} = 55^\circ$ و نقطه N بر AC طوری اختیار

می شود که $\hat{NBC} = 8^\circ$ باشد. اندازه $\hat{NMC}$ را پیدا کنید.

۷۶۶. در مثلث حاده الزاویه ABC داریم $\hat{BAC} = 6^\circ$.

اگر O و I ، H ، محل تلاقی ارتفاعها، مرکز دایرة محیطی و مرکز دایرة محاطی مثلث ABC باشند و $BH = OI$ ، زاویه های مثلث ABC را پیدا کنید.

۶. ۴. ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۶۷. در مثلثی که زاویه‌هایی حاده دارد، از وسط هر ضلع، عمودهایی بر دو ضلع دیگر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، مساحت شش ضلعی محدود به این عمودها، برابر است با نصف مساحت مثلث.

المیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۵

۷۶۸. قضیه. مساحت مثلثی که رأسهای آن مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلث حاده مفروضی هستند، با حاصلضرب محیط و شعاع دایره محیطی آن مثلث برابر است.

۷۶۹. محیط مثلث پادک مثلثی که زاویه‌های حاده دارد برابر است با دو برابر مساحت مثلث داده شده تقسیم بر شعاع دایره محیطی آن مثلث.

• دایره و چهارضلعی

۱. ۷. چهارضلعی محاطی
 ۱. ۱. ۷. تعریف و قضیه
 ۲. ۱. ۷. شعاع
 ۳. ۱. ۷. نقطه و دایره
 ۱. ۳. ۱. ۷. نقطه روی دایره
 ۲. ۳. ۱. ۷. نقطه های همخط
 ۳. ۳. ۱. ۷. نقطه های همدایره
 ۴. ۱. ۷. کمان
 ۵. ۱. ۷. زاویه
 ۱. ۵. ۱. ۷. اندازه زاویه
 ۲. ۵. ۱. ۷. رابطه بین زاویه ها
 ۶. ۱. ۷. پاره خط
 ۷. ۱. ۷. خطهای: موازی، عمود برهم، ...
 ۱. ۷. ۱. ۷. خطها موازی اند
 ۲. ۷. ۱. ۷. خطها برهم عمودند
 ۳. ۷. ۱. ۷. خط از نقطه ثابتی می گذرد
 ۴. ۷. ۱. ۷. خطها همرسند
 ۸. ۱. ۷. شکلهای ایجاد شده
 ۹. ۱. ۷. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
 ۱۰. ۱. ۷. مسأله های ترکیبی

۲.۷. چهار ضلعی محاطی عمود قطر

۱.۲.۷. تعریف و قضیه

۲.۲.۷. نقطه و دایره

۱.۲.۲.۷. نقطه درون دایره

۲.۲.۲.۷. نقطه‌های هم‌دایره

۳.۲.۷. پاره خط

۴.۲.۷. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۳.۷. چهار ضلعی محیطی

۱.۳.۷. تعریف و قضیه

۲.۳.۷. شعاع

۱.۲.۳.۷. اندازه شعاع

۳.۳.۷. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۷. نقطه‌های هم‌خط

۴.۳.۷. ضلع

۵.۳.۷. قطر

۶.۳.۷. محیط

۷.۳.۷. زاویه

۸.۳.۷. پاره خط

۹.۳.۷. شکل‌های ایجاد شده

۱۰.۳.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۱.۳.۷. مسأله‌های ترکیبی

۴.۷. دایره و چهار ضلعی کوژ (محدب) یا کاو (مقعر)

۱.۴.۷. تعریف و قضیه

۲.۴.۷. نقطه و دایره

۳.۴.۷. پاره خط

- ۱.۳.۴.۷. اندازه پاره خط
- ۲.۳.۴.۷. رابطه بین پاره خطها
- ۴.۴.۷. ثابت کنید چهار ضلعی محیطی است
- ۵.۴.۷. شکل‌های ایجاد شده
- ۶.۴.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
- ۷.۴.۷. مسأله‌های ترکیبی

۵.۷. دایره و چهار ضلعیهای ویژه

- ۱.۵.۷. دایره و متوازی الاضلاع
 - ۱.۱.۵.۷. تعریف و قضیه
 - ۲.۱.۵.۷. شعاع
 - ۳.۱.۵.۷. قطر
 - ۴.۱.۵.۷. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
 - ۵.۱.۵.۷. شکل‌های ایجاد شده
 - ۶.۱.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
- ۲.۵.۷. دایره و مستطیل
 - ۱.۲.۵.۷. تعریف و قضیه
 - ۲.۲.۵.۷. نقطه و دایره
 - ۳.۲.۵.۷. پاره خط
 - ۴.۲.۵.۷. خط‌های موازی، عمود بر هم، ...
 - ۱.۴.۲.۵.۷. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
 - ۵.۲.۵.۷. شکل‌های ایجاد شده
- ۳.۵.۷. دایره و مربع
 - ۱.۳.۵.۷. تعریف و قضیه
 - ۲.۳.۵.۷. نقطه و دایره
 - ۳.۳.۵.۷. زاویه
 - ۴.۳.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۳.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی

۴.۵.۷. دایره و لوزی

۱.۴.۵.۷. تعریف و قضیه

۲.۴.۵.۷. زاویه

۵.۵.۷. دایره و ذوزنقه

۱.۵.۵.۷. تعریف و قضیه

۲.۵.۵.۷. شعاع

۳.۵.۵.۷. زاویه

۴.۵.۵.۷. پاره خط

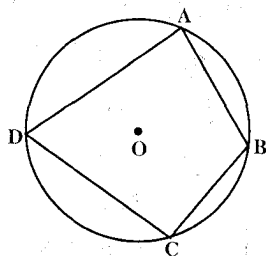
۵.۵.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶.۵.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی

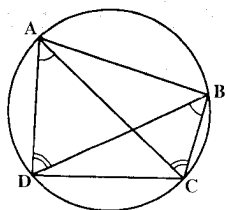
بخش ۷. دایره و چهار ضلعی

۱.۷. چهار ضلعی محاطی

۱.۱.۷. تعریف و قضیه



همان طوری که می دانیم هر چهارضلعی که رأسهای آن روی یک دایره قرار داشته باشد، چهارضلعی محاطی یا محاط شدنی نامیده می شود. مانند چهارضلعی محاطی ABCD در شکل.



۷۷۰. ثابت کنید که در هر چهارضلعی محاطی هر دو زاویه روبه روبه یک ضلع برابرند و بعکس.

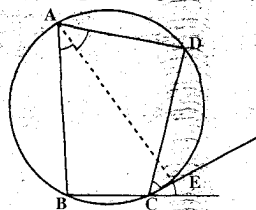
۲.۱.۷. شعاع

۷۷۱. قضیه ژاپنی. ثابت کنید که اگر ABCD چهارضلعی محاطی باشد، آن وقت مجموع شعاعهای دایره های محاطی مثلثهای ABC و ACD، برابر است با مجموع شعاعهای دایره های محاطی مثلثهای BCD و BDA.

۳.۱.۷. نقطه و دایره

۱.۳.۱.۷. نقطه روی دایره

۷۷۲. دایره های نه نقطه چهارمثلثی که رأسهایشان رأسهای یک چهارضلعی محاطی هستند، از پاد مرکز چهارضلعی می گذرند.



۷۷۳. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، نیمساز هر زاویه با نیمساز زاویه برونی نظیر رأس مقابل آن، در نقطه ای واقع بر دایره محیطی تلاقی می کنند.

۷.۱.۳.۲. نقطه‌های همخط

۷۷۴. فرض کنید $ABCD$ معرف چهارضلعی محاطی و M نقطه‌ای دلخواه روی دایره محیطی آن باشد. ثابت کنید که تصویرهای نقطه M روی خطهای سیمسون نظیر نقطه M نسبت به مثلثهای ABC ، BCD ، CDA و DAB ، بر یک خط راست (خط سیمسون چهارضلعی) قرار دارند.

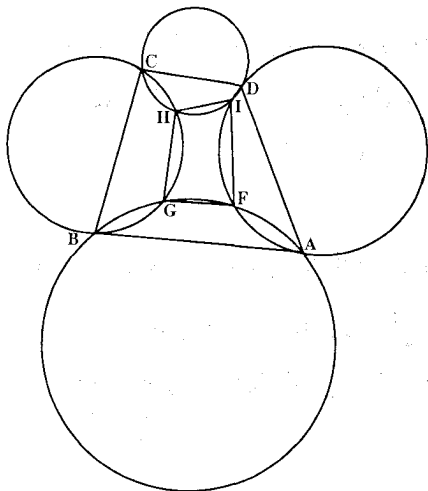
به علاوه با داشتن خط سیمسون n ضلعی، خط سیمسون $n+1$ ضلعی را به استقرا پیدا می‌کنیم. برای مثال برای $n+1$ ضلعی دلخواه محاطی و نقطه M روی دایره محیطی آن، تصویرهای این نقطه روی کلیه خطهای سیمسون ممکن این نقطه نسبت به تمام n ضلعیهای ممکن تشکیل شده با n رأس از این $n+1$ ضلعی، روی یک خط راست، که خط سیمسون $n+1$ ضلعی است، قرار دارند.

۷۷۵. قضیه. مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی که توسط چهار خط تعیین می‌شوند هم‌خطند.

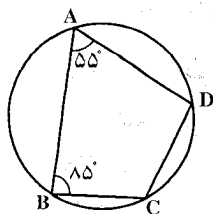
۷.۱.۳.۳. نقطه‌های همدایره

۷۷۶. چهارضلعی $ABCD$ محاط در یک

دایره داده شده است. چهار دایره رسم می‌کنیم که هر ضلع از این چهارضلعی یک وتر برای آن دایره باشد. ثابت کنید این دایره‌ها دایره دو یکدیگر را در ۴ نقطه همدایره قطع می‌کنند.



۷.۱.۴. کمان



۷۷۷. دو زاویه مجاور از یک چهارضلعی محاطی 55° و 85° آيا باشند. دو زاویه دیگر چهارضلعی را تعیین کنید. آیا می‌توان چهار کمان دایره محیطی آن را تعیین کرد؟ چرا؟

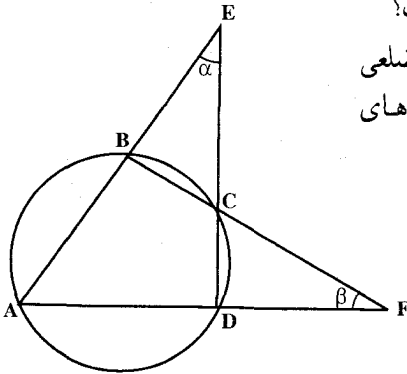
۷.۱.۵. زاویه

۷.۱.۵.۱. اندازه زاویه

۷۷۸. یک چهارضلعی در یک دایره محاط شده است. اگر اندازه دو زاویه آن 68° و 143° باشد، اندازه دو زاویه دیگر آن چه قدر است؟

۷۷۹. از برخورد ضلعهای دو زاویه α و β چهارضلعی

محاطی ABCD ایجاد می شود. زاویه های چهارضلعی را حساب کنید.



۷۸۰. چهارضلعی محاطی ABCD مفروض است. ضلع AB از طرف B تا نقطه E امتداد

دارد. اگر $\hat{BAD} = 90^\circ$ و $\hat{ADC} = 68^\circ$ ، آنگاه $\hat{EBC}$ برابر است با:

(ج) 70°

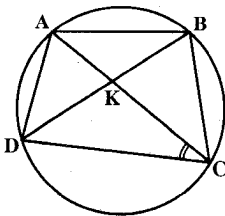
(ب) 68°

(الف) 66°

(هـ) 92°

(د) 88°

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۴

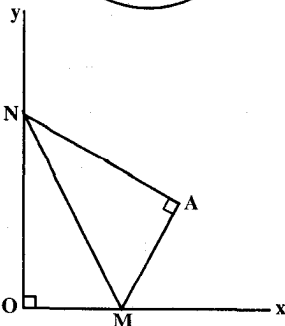


۷۸۱. در چهارضلعی محاطی ABCD : $\hat{DAB} = \alpha$ ،

$\hat{ABC} = \beta$ و $\hat{BKC} = \gamma$ که در آن K نقطه

برخورد قطرهای چهارضلعی است. اندازه زاویه

ACD را پیدا کنید.



۷۸۲. زاویه قائمه xOy و نقطه A در داخل آن داده شده

است. نقطه های M و N بترتیب روی Ox و Oy

قرار دارند به طوری که $\hat{MAN} = 90^\circ$ می باشند.

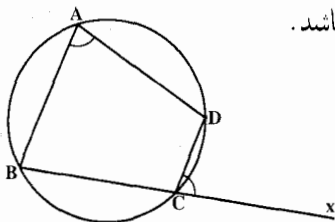
ثابت کنید وقتی که نقطه های M و N بترتیب روی

Ox و Oy تغییر مکان دهند، اندازه زاویه های مثلث

AMN ثابت می ماند.

۷. ۱. ۵. ۲. رابطه بین زاویه ها

۷۸۳. ثابت کنید که در هر چهارضلعی محاطی هر زاویه داخلی چهارضلعی مساوی زاویه خارجی غیر مجاورش می باشد.



۷۸۴. یک چهارضلعی محاط در یک دایره آن را به چهار کمان دوهده دو مجزا تقسیم می‌کند. در هر یک از این کمانها زاویه‌ای محاط می‌شود که رأس آن روی کمان و دو ضلعش بر دو سر آن کمان متکی است. مجموع این چهار زاویه برابر است با :

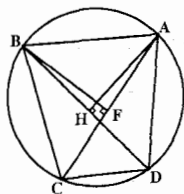
(الف) 180° (ب) 54° (ج) 36°
(د) 45° (هـ) 108°

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

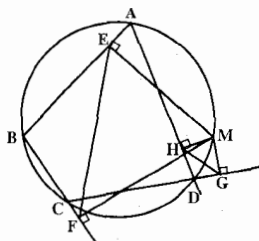
۷۸۵. در دایره‌ای، یک چهارضلعی محاط می‌شود. اگر مقابل هر یک از ضلعهای چهارضلعی و در خارج چهارضلعی زاویه‌ای محاطی رسم شود، مجموع این چهار زاویه بر حسب درجه برابر است با:

الف) ۱۰۸۰	ب) ۹۰۰	ج) ۷۲۰
د) ۵۴۰	هـ) ۳۶۰	

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۸

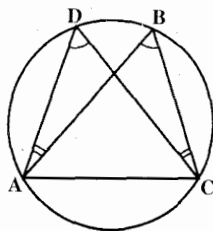


۷۸۶. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای محاط است. از نقطه‌های A و B عمودهای AH و BF را بر دو قطر آن فرود می‌آوریم. ثابت کنید:

$$\widehat{D\hat{A}H} = \widehat{C\hat{B}F}.$$


۷۸۷. چهارضلعی ABCD محاط در دایره‌ای مفروض است. از نقطه M واقع بر این دایره عمودهای ME، MF، MG و MH را بترتیب بر ضلعهای AB، BC، CD و DA فرود می‌آوریم. ثابت کنید که زاویه‌های مثلث MGH با زاویه‌های مثلث MFE نظیر به نظیر برابرند.

۷۸۸. زاویه های روبه رو در یک چهارضلعی غیرمحدب محاطی برابرند و بعکس.



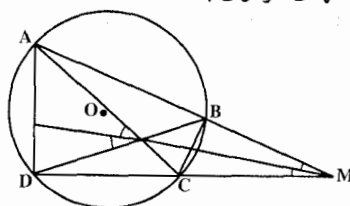
۷. ۱. ۶. پاره خط

۷۸۹. ثابت کنید تصویرهای ضلعهای روبه روی یک چهارضلعی محاطی که یک قطرش قطر دایره محیطی آن است، روی قطر دیگر چهارضلعی، دو پاره خط مساوی اند.

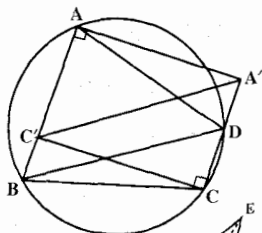
۷. ۱. ۷. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۷. ۱. ۷. ۱. خطها موازی اند

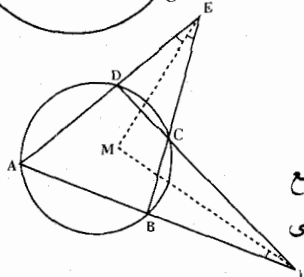
۷۹۰. شرط این که یک چهارضلعی قابل محاط شدن در یک دایره باشد، لازم و کافی است که نیمسازهای زاویه های بین ضلعهای غیرمتوالی، خطهای موازی باشند.



۷۹۱. چهارضلعی ABCD در دایره O محاط است و امتداد ضلعهای متقابل AB و CD یکدیگر را در نقطه M قطع می کنند. ثابت کنید، نیمساز زاویه M با نیمساز یکی از زاویه های دو قطر چهارضلعی موازی است.

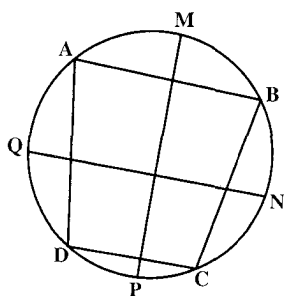


۷۹۲. در چهارضلعی محاطی ABCD عمودی که در A بر BA رسم می شود، CD را در A' قطع می کند، و عمودی که در C بر CD رسم می شود، AB را در C' قطع می کند، نشان دهید که خط A'C' با قطر BD موازی است.

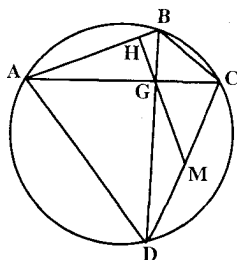


۷. ۱. ۷. ۲. خطها بر هم عمودند

۷۹۳. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه هایی که از تقاطع امتداد ضلعهای متقابل یک چهارضلعی محاطی تشکیل می شوند، بر هم عمودند.



۷۹۴. ثابت کنید در هر چهارضلعی محاطی، خطهایی که وسطهای کمانهای مقابل را به هم وصل می‌کنند، برهم عمودند.



۷۹۵. چهارضلعی ABCD که قطرهاش در نقطه G بر هم عمودند، در دایره O محاط است. اگر M وسط ضلع CD باشد، ثابت کنید خط MG در نقطه ای مانند H بر AB عمود است.

۷. ۱. ۷. ۳. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۷۹۶. چهارضلعی محاطی ABCD را در نظر گرفته، محل تلاقی قطرهای آن را O می‌نامیم. اگر نقطه‌های L و K بترتیب پای عمودهای وارد از نقطه O بر ضلعهای AD و BC بوده و نقطه‌های M و N بترتیب وسطهای ضلعهای AB و CD باشند، ثابت کنید عمود منصف KL از نقطه‌های M و N می‌گذرد.

سومین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، پاییز ۱۳۷۲

۷۹۷. نشان دهید که اگر از نقطه برخورد امتداد دو ضلع روبه‌روی هم در یک چهارضلعی محاطی عمودی بر خطی که وسط آن دو ضلع را به هم وصل می‌کند، رسم کنیم این خط از یاد مرکز چهارضلعی می‌گذرد.

۷. ۱. ۷. ۴. خطها هم‌رسند

۷۹۸. قضیه. عمودهایی که از وسط هر ضلع چهارضلعی محاطی بر ضلع مقابل رسم می‌شوند، هم‌رسند.

۷۹۹. چهارخطی که از هر رأس چهارضلعی محاطی به مرکز ارتفاعی مثلثی که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند رسم می‌شوند، از وسط هم می‌گذرند.

۸۰۰. نشان دهید چهار خطی که هر کدام از یک رأس چهارضلعی محاطی به مرکز نه نقطه مثلثی رسم می‌شوند که سه رأس دیگر چهارضلعی رأسهای آن هستند، هم‌رسند.

۸۰۱. قضیه. چهار خط سیمسون چهار نقطه یک دایره، که هر کدام نسبت به مثلثی که سه نقطه دیگر رأسهای آن هستند، در نظر گرفته می‌شوند، هم‌رسند.

۸۰۳. اگر از چهار مثلثی که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، سه مثلث را که رأس مشترکی دارند در نظر بگیریم، سه مرکز دایره‌های محاطی خارجی نسبت به این رأس در این سه مثلث، سه رأس مستطیلی هستند که رأس چهارم مثلث مرکز دایره محاطی داخلی مثلث چهارم است.

[illegible]

۸۰۶. نشان دهید اگر نقطه‌های برخورد و مرکزهای دو دایره، رأسهای یک چهارضلعی محاطی باشند، آن گاه دو دایره برهم عمودند.

۷. ۱. ۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۰۸. اگر H_a, H_b, H_c, H_d مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی باشند که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاطی ABCD تعیین می‌شوند، نشان دهید که رأسهای ABCD مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی هستند که توسط نقطه‌های H_a, H_b, H_c, H_d تعیین می‌شوند.

۸۰۹. قضیه. چهار خط سیمسون نقطه‌ای از یک دایره را نسبت به چهار مثلثی که توسط رأسهای یک چهارضلعی محاط شده در این دایره تعیین می‌شود در نظر گرفته شده، نقطه میکل این چهار خط است.

۸۱۰. سه رأس از چهارضلعی محاطی متغیری ثابتند. مکان هندسی

الف. مرکز ثقل چهارضلعی؛

ب. پاد مرکز چهارضلعی را به دست آورید.

۸۱۱. می دانیم در هر مثلث، شبه میانه (Symmedian) خطی است که قرینه میانه یک رأس

نسبت به نیمساز زاویه همان رأس است. زاویه XOY و دو خط متباین (پاد موازی) AB

و A'B' نسبت به OX و OY را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید میانه رأس O از هر یک از

دو مثلث OAB و OA'B' شبه میانه مثلث دیگر است.

۷. ۱. ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۸۱۲. چهارضلعی ABCP محاطی است. PD مماس

بر دایره و AF قاطع دایره است. حساب کنید:

الف. اندازه زاویه ۱، اگر $a = 94^\circ$ و $c = 54^\circ$.

ب. اندازه زاویه ۲، اگر AP قطر دایره باشد.

پ. اندازه زاویه ۳، اگر $\widehat{CPA} = 25^\circ$.

ت. اندازه زاویه ۳، اگر $\widehat{ABC} = 12^\circ$.

ث. اندازه زاویه ۴، اگر $\widehat{BCP} = 13^\circ$ و $b = 50^\circ$.

ج. اندازه زاویه ۴، اگر $BC \parallel AP$ و $a = 74^\circ$.

چ. اندازه $\widehat{a}$ ، اگر $BC \parallel AP$ و $\widehat{6} = 42^\circ$.

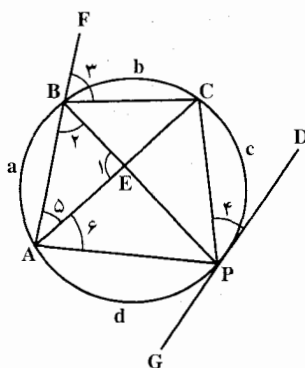
ح. اندازه $\widehat{a}$ ، اگر AC قطر و $\widehat{5} = 35^\circ$.

خ. اندازه $\widehat{b}$ ، اگر $AC \perp BP$ و $\widehat{2} = 57^\circ$.

د. اندازه $\widehat{c}$ ، اگر AC و BP قطر باشند و $\widehat{5} = 41^\circ$.

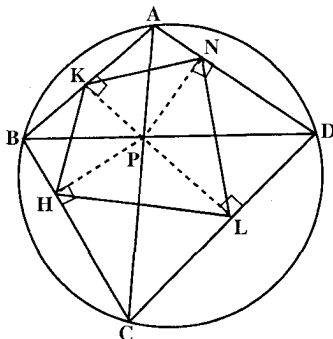
ذ. اندازه $\widehat{d}$ ، اگر $\widehat{1} = 95^\circ$ و $\widehat{b} = 95^\circ$.

ر. اندازه زاویه CPA، اگر $\widehat{3} = 79^\circ$.



۸۱۳. چهارضلعی محاطی ABCD که قطرهايش بر هم عمودند داده شده است. نقطه P محل تلاقی قطرها را در نقطه H روی BC و در نقطه N روی AD و در نقطه K روی AB و در نقطه L روی CD تصویر می کنیم. ثابت کنید :

۱. چهارضلعی NKHL محیطی و محاطی است.
۲. ثابت کنید که دایره محیطی چهارضلعی NKHL از وسطهای ضلعهای چهارضلعی ABCD می گذرد.



۸۱۴. ثابت کنید که اگر دایره ای قابل محاط در یک چهارضلعی باشد، آن وقت :
الف. دایره های محاطی دو مثلث که یک قطر چهارضلعی داده شده، آن را به آنها تقسیم می کند، برهم مماسند ؛
ب. نقطه های تماس این دایره ها با ضلعهای چهارضلعی، رأسهای چهارضلعی محاطی هستند.

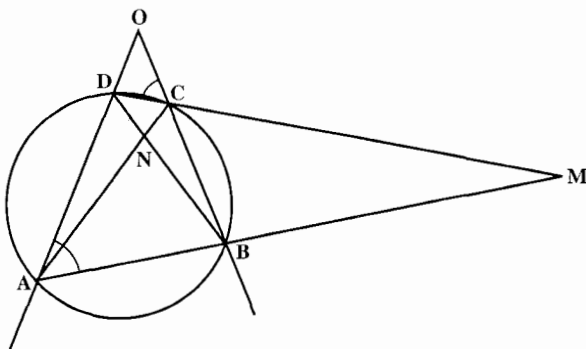
۸۱۵. الف. نقطه M روی دایره (O) قرار دارد و چهارضلعی (q) در (O) محاط شده است. ترکیبهای سه به سه از رأسهای چهارضلعی (q)، چهار مثلث را تعیین می کنند. چهار خط سیمسون (M) نسبت به این چهار مثلث را به دست می آوریم و (M) را روی آنها تصویر می کنیم. نشان دهید که این تصویرها روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می توان خط سیمسون (M) نسبت به چهارضلعی (q) نامید.

ب. اگر یک پنج ضلعی داده شده در دایره (O) محاط شده باشد، ترکیبهای چهار به چهار از پنج رأس آن پنج چهارضلعی را تعیین می کنند. پنج خط سیمسون (M) نسبت به این پنج چهارضلعی را به دست می آوریم، و (M) را روی آنها تصویر می کنیم، نشان دهید که این تصویرها روی یک خط راست قرار دارند. این خط را می توان خط سیمسون (M) نسبت به این پنج ضلعی نامید.

ج. اگر یک شش ضلعی داده شده در دایره (O) محاط شده باشد..... این فرآیند را می توان به طور نامحدود ادامه داد.

خطهای پادموازی (آنتی پارالل)

۸۱۶. تعریف. دو خط AB و CP نسبت به دو ضلع Ox و Oy از زاویهٔ xOy آنتی پارالل نامیده می‌شوند در صورتی که $\hat{OAB} = \hat{OCD}$ باشد، از تعریف فوق نتیجه می‌شود:



۱. خطهای AD و BC نسبت به ضلعهای زاویهٔ M پاد موازی اند.

۲. چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

۳. قطرهای AC و BD آنتی پارالل نسبت به ضلعهای زاویهٔ O و زاویهٔ M هستند.

۴. ضلعهای روبه روی چهارضلعی محاطی آنتی پارالل نسبت به قطرهای این چهارضلعی هستند.

نامگذاری خطهای آنتی پارالل نخستین بار در سال ۱۶۶۷ در کتاب *Nouveaux Elements de Geometry* توسط ARNAULD (۱۶۱۲-۱۶۹۴) آورده شد.

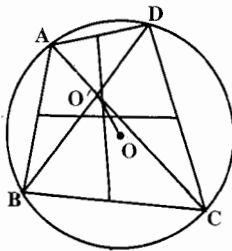
۲.۷. چهارضلعی محاطی عمود قطر

۲.۷.۱. تعریف و قضیه

تعریف. هر چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشند، چهارضلعی عمود قطر نامیده می‌شود. در این بخش چهارضلعی محاطی را که قطرهای آن بر هم عمود باشند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. این چهارضلعی را چهارضلعی محاطی عمود قطر می‌نامند.

۲.۲.۷. نقطه و دایره

۱.۲.۲.۷. نقطه درون دایره



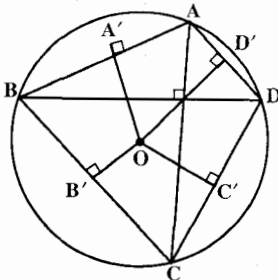
۸۱۷. اگر در یک چهارضلعی محاطی قطرهای برهم عمود باشند، محل برخورد قطرهای نیز بر قرینه مرکز دایره محیطی چهارضلعی نسبت به نقطه تقاطع خطهایی که وسطهای ضلعهای مقابل را به هم وصل می کنند، منطبق است.

تعریف. نقطه برخورد خطهایی که وسطهای ضلعهای روبه روی چهارضلعی را به هم وصل می کنند، مرکز ثقل چهارضلعی نامیده می شود.
قضیه. اگر یک چهارضلعی عمود قطر، محاطی باشد، پاد مرکز آن (قرینه مرکز دایره محیطی چهارضلعی نسبت به مرکز ثقل چهارضلعی) بر نقطه برخورد قطرهایش منطبق است.

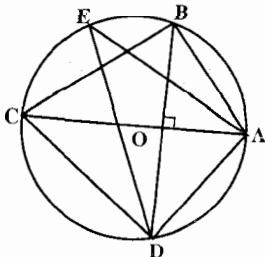
۲.۲.۲.۷. نقطه های همدایره

۸۱۸. در چهارضلعی محاطی عمود قطر تصویرهای نقطه برخورد دو قطر بر روی چهار ضلع، روی دایره ای قرار دارند که از وسط ضلعها می گذرد و بعکس.

۳.۲.۷. پاره خط



۸۱۹. در هر چهار ضلعی محاطی که قطرهایش برهم عمود باشند، فاصله مرکز دایره محیطی از هر ضلع، برابر نصف ضلع روبه رو به آن ضلع است.



۸۲۰. اگر ABCD یک چهارضلعی محاطی که قطرهایش برهم عمودند، باشد و E انتهای قطری از دایره محیطی آن که از D می گذرد باشد، ثابت کنید :

$$AE = CB$$

۷.۲.۴. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۸۲۱. هرگاه دو قطر یک چهار گوشه محاطی برهم عمود باشند، هر خط که از نقطه برخورد دو قطر بر یک ضلع چهار گوشه عمود شود، از وسط ضلع مقابل به این ضلع می‌گذرد. (از برهماگوپتا)

۷.۳. چهارضلعی محیطی

۷.۳.۱. تعریف و قضیه

می‌دانیم چهارضلعی محیطی است، در صورتی که همه ضلعهای آن بر یک دایره مماس باشند. دایره را دایره محاطی چهارضلعی می‌نامند.

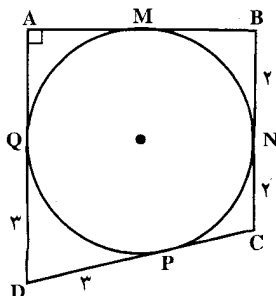
در هر چهارضلعی محیطی مجموع ضلعهای روبه رو با هم برابرند و بعکس.

۸۲۲. قضیه. اگر قطرهای یک چهارضلعی محاطی برهم عمود باشند، تصویر محل برخورد قطرهای این چهارضلعی روی چهارضلع آن چهار رأس یک چهارضلعی محاطی و محیطی هستند.

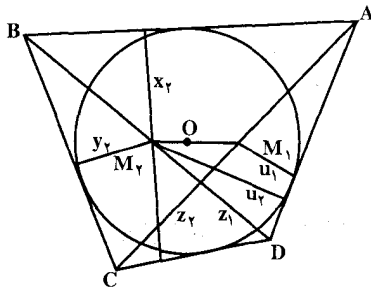
۷.۳.۲. شعاع

۷.۳.۱. اندازه شعاع

۸۲۳. در چهارضلعی محیطی ABCD (شکل روبه‌رو)، با توجه به این که $\hat{A} = 90^\circ$ ، $BN = NC = 2$ ، $DP = DQ = 3$ است، شعاع دایره محاطی چهارضلعی را بیابید.



۳.۳.۷. نقطه و دایره



۱. ۳.۳.۷. نقطه های همخط

۸۲۴. ثابت کنید که اگر دایره ای مماس بر خطهای AB, BC, CD, DA وجود داشته باشد، آن وقت مرکز آن و وسطهای AC و BD همخطند.

۸۲۵. نشان دهید که پاد مرکز چهارضلعی محاطی با متقارنهای مرکز دایره محیطی چهارضلعی، نسبت به دو ضلع روبه روی هم، همخط است.

۴.۳.۷. ضلع

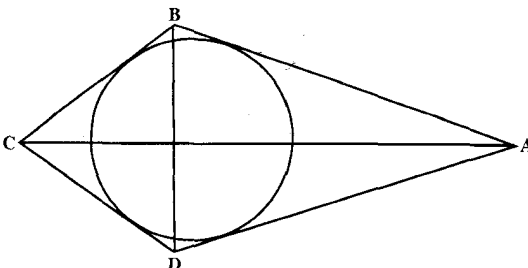
۸۲۶. اندازه های سه ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی، بترتیب، ۷، ۱۱ و ۱۶ سانتیمتر است. اندازه ضلع چهارم آن را تعیین کنید.

۸۲۷. اگر $AB = a + ۱$ ، $BC = ۴a - ۳$ ، $CD = ۳a + ۲$ و $DA = a + ۳$ ضلعهای متوالی یک چهارضلعی محیطی باشند، اندازه ضلع CD چه قدر است؟

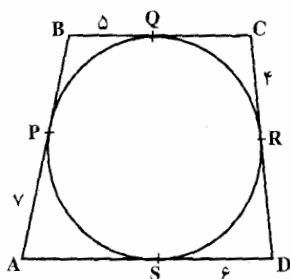
۸۲۸. محیط یک چهارضلعی محیطی برابر ۳۶ سانتیمتر است. اگر اندازه یک ضلع این چهارضلعی ۸ سانتیمتر باشد، اندازه ضلع روبه روی آن را تعیین کنید.

۵.۳.۷. قطر

۸۲۹. ثابت کنید، اگر دو ضلع مجاور از یک چهارضلعی محیطی مساوی یکدیگر باشند، دو قطر چهارضلعی بر هم عمودند. آیا یکدیگر را نصف هم می کنند.



۶.۳.۷. محیط



۸۳۰. محیط چهارضلعی محیطی ABCD را به دست آورید، P, Q, R, S ، نقطه‌های تماس ضلعهای چهارضلعی با دایره‌اند.

۸۳۱. مجموع دو ضلع روبه‌روی یک چهارضلعی محیطی برابر ۲۷ سانتیمتر است. اندازه محیط این چهارضلعی را بیابید.

۷.۳.۷. زاویه

۸۳۲. چهارضلعی ABCD را بر دایره به مرکز O محیط کرده‌ایم. ثابت کنید، مجموع دو زاویه AOB و COD برابر 180° درجه است.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۴

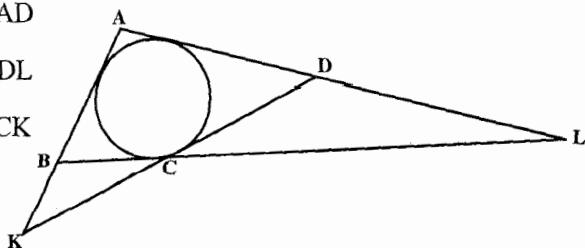
۸.۳.۷. پاره خط

۸۳۳. امتداد ضلعهای AB و DC از چهارضلعی محدب ABCD، در نقطه K و امتداد ضلعهای AD و BC آن در نقطه L متقاطعند. پاره خط BL، DK را قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر یکی از سه رابطه

$$AB + CD = BC + AD$$

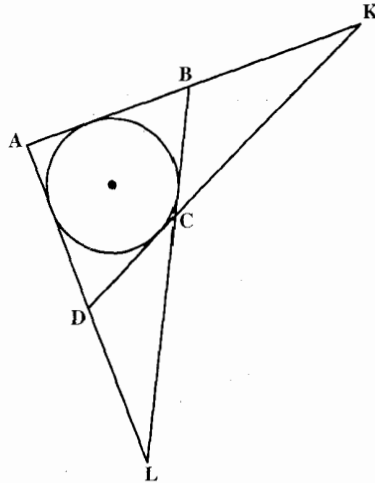
$$BK + BL = DK + DL$$

$$AK + CL = AL + CK$$



برقرار باشد، آن وقت دوتای دیگر هم برقرارند.

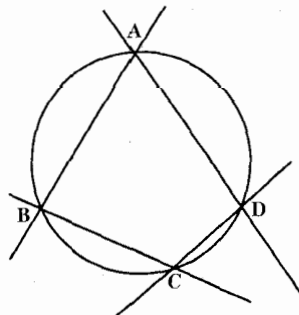
۸۳۴. امتداد ضلعهای AB و DC از چهارضلعی محدب ABCD، در نقطه K و امتداد ضلعهای AD و BC آن در نقطه L متقاطعند، پاره خط BL و DK را قطع می کند. ثابت کنید که اگر یکی از سه رابطه $AD + DC = AB + CB$ ، $AK + CK = AL + CL$ و $BK + DK = BL + DL$ برقرار باشد، آن گاه دو تای دیگر هم برقرارند.



۹.۳.۷. شکلهای ایجاد شده

۸۳۵. ثابت کنید، اگر $n \geq 4$ باشد، هر چهارضلعی محاطی را می توان به n چهارضلعی محاطی تجزیه کرد.

المیاد بین المللی ریاضی، ۱۹۷۲



۱۰.۳.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۳۶. مرکز دایره‌ای به شعاع r ،

که بر ضلعهای AB ، AD و

BC از چهارضلعی محدب

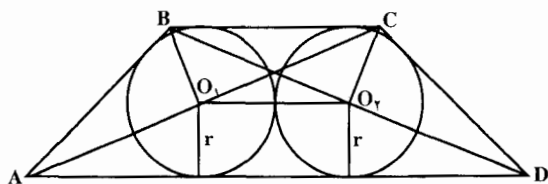
$ABCD$ مماس است، روی

قطر AC ی آن قرار دارد.

مرکز دایره‌ای به همان شعاع

r ، که بر ضلعهای BC ، CD و AD مماس است، بر قطر BD واقع است. اگر این دو

دایره بر هم مماس بیرونی باشند، مساحت چهارضلعی $ABCD$ را پیدا کنید.

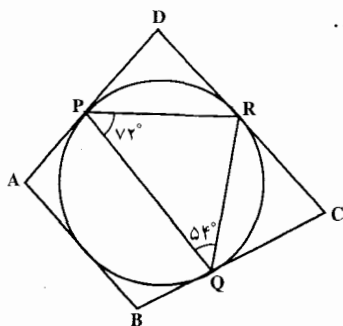


۱۱.۳.۷. مسأله‌های ترکیبی

۸۳۷. در شکل $\square ABCD$ بر دایره محیط است. رأسهای $\triangle PQR$ نقطه‌های تماس

$\square ABCD$ است. $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$. اگر $\hat{RPQ} = 72^\circ$ و $\hat{RQP} = 54^\circ$ ،

اندازه تمام کمانها و زاویه‌های شکل را بیابید.

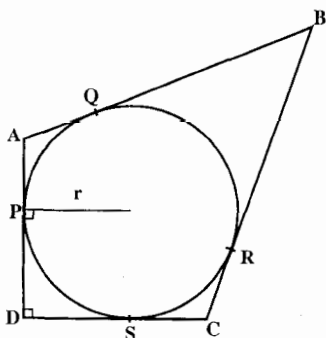


۸۳۸. چهارضلعی محیطی $ABCD$ داده شده است. اگر $QB = 27$ ، $BC = 38$ ، $DC = x$

و $\hat{D} = 90^\circ$ باشد، مطلوب است محاسبه:

الف. r ، اگر $x = 25$ باشد؛

ب. x ، اگر $r = 10$ باشد.



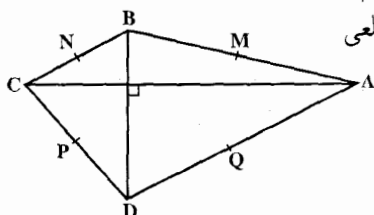
۴.۷. دایره و چهارضلعی کوژ (محدب) یا کاو (مقعر)

۱.۴.۷. تعریف و قضیه

در این قسمت مطالب مربوط به دایره و چهارضلعی کوژ یا کاو را بررسی می‌کنیم.

۲.۴.۷. نقطه و دایره

۸۳۹. یک چهارضلعی داده شده است. چهار دایره رسم می‌کنیم که هریک بر سه ضلع چهارضلعی مماس باشند. ثابت کنید، مرکزهای این چهار دایره رأسهای یک چهارضلعی محاطی‌اند.

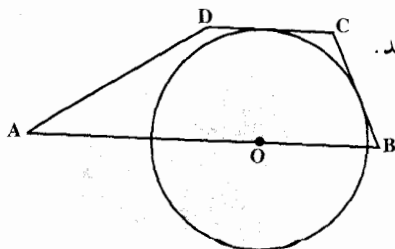


۸۴۰. ثابت کنید، اگر قطرهای یک چهارضلعی بر هم عمود باشند، وسطهای ضلعهای آن چهارضلعی روی یک دایره واقع هستند.

۳.۴.۷. پاره خط

۱.۳.۴.۷. اندازه پاره خط

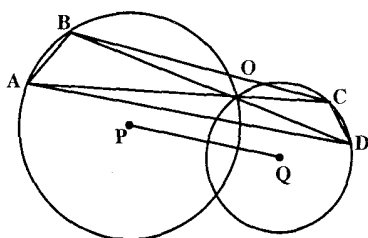
۸۴۱. در چهارضلعی ABCD: $AB = a$, $AD = b$ ($a > b$). اگر BC، CD و AD بر دایره‌ای که مرکزش روی AB قرار دارد، مماس باشند، اندازه پاره خط BC را پیدا کنید.



۲.۳.۴.۷. رابطه بین پاره خطها

۸۴۲. اگر دایره مماس بر چهار ضلع یک چهارضلعی در خارج آن چهارضلعی قرار بگیرد (بر امتداد ضلعهای چهارضلعی مماس باشد)، تفاضل ضلعهای روبه‌رو با هم برابرند.

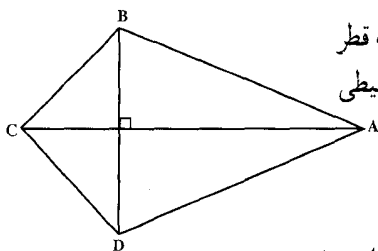
بخش ۷ / دایره و چهارضلعی □ ۲۳۷



۸۴۳. در چهارضلعی کوژ ABCD، نقطه O محل برخورد قطر هاست. دایره های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می کنیم. اگر P و Q مرکزهای این دو دایره باشند، آن گاه ثابت کنید که $PQ \geq \frac{AB + CD}{2}$.

مرحله اول دهمین دوره المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۱

۴.۴.۷. ثابت کنید چهارضلعی محیطی است



۸۴۴. ثابت کنید، اگر در یک چهارضلعی محدب، یک قطر عمود منصف قطر دیگر باشد، چهارضلعی محیطی است.

۵.۴.۷. شکلهای ایجاد شده

۸۴۵. در چهارضلعی محدب ABCD، نقطه تلاقی قطر ها را E، مرکزهای دایره های محیطی مثلثهای ABE، BCE، CDE و ADE را به ترتیب P، Q، R و S می گیریم. آن گاه، الف. PQRS یک متوازی الاضلاع است. ب. PQRS اگر و تنها اگر متوازی الاضلاع است که ABCD یک لوزی باشد. ج. PQRS اگر و تنها اگر متوازی الاضلاع است که ABCD یک مستطیل باشد. د. PQRS اگر و تنها اگر متوازی الاضلاع است که ABCD یک متوازی الاضلاع باشد. ه. هیچ یک از گزاره های بالا صحیح نیست.

مسابقه های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۷

۸۴۶. در چهارضلعی ABCD، دایره های محاطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB شعاعهای برابر دارند. ثابت کنید که چهارضلعی داده شده مستطیل است.

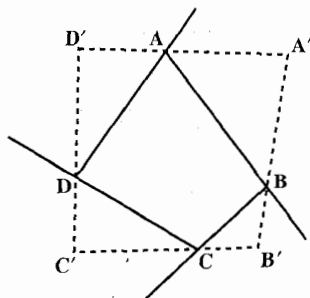
۸۴۷. چهارضلعی محدب ABCD را، به وسیله قطرهای آن، به چهار مثلث تقسیم کرده ایم. ثابت کنید، اگر شعاعهای چهار دایره محاطی این مثلثها، با هم برابر باشند، چهارضلعی ABCD یک لوزی است. المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۹

۸۴۸. نیمسازهای زاویه‌های درونی چهارضلعی یک چهارضلعی محاطی می‌سازند.

۸۴۹. ثابت کنید که از برخورد نیمسازهای زاویه‌های

برونی یک چهارضلعی غیر مشخص یک

چهارضلعی محاطی ایجاد می‌شود.



۸۵۰. چهار محور X_1, X_2, X_3, X_4 ، بترتیب معینی در یک صفحه قرار دارند. اگر

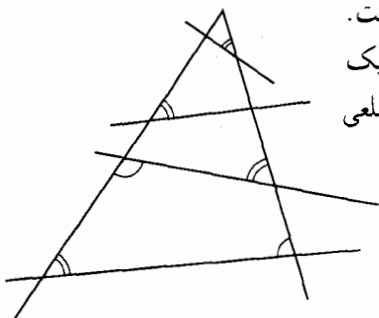
نیمسازهای زاویه‌های محورهای متوالی، تشکیل یک چهارضلعی دهند، ثابت کنید، این

چهارضلعی قابل محاط شدن در یک دایره است.

۸۵۱. دو زوج خطهای متباین (پادموازی) نسبت به یک

زوج خطهای متباین دیگر، متباینند. (چهارضلعی

محاطی تشکیل می‌دهند).



۶.۴.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۵۲. در چهارضلعی محدب ABCD دو زاویهٔ روبه‌روی B و D قائمه هستند. از رأسهای A

و C عمودهای AE و CF را بر قطر BD فرود می‌آوریم. ثابت کنید که وسطهای قطعه

خطهای BD و EF بر هم منطبقند.

۷.۴.۷. مسأله‌های ترکیبی

۸۵۳. چهارضلعی ABCD داده شده است.

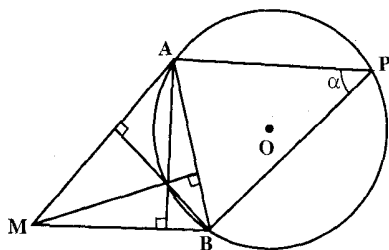
۱. ثابت کنید، چهار دایره‌ای که از وسطهای هر دو ضلع متوالی و وسط قطر گذرنده بر

نقطهٔ برخورد آنها بگذرند، از یک نقطه خواهند گذشت.

۲. چهار دایره‌ای که از وسطهای ضلعهای مثلثهای ABC، BCD، CDA و DAB

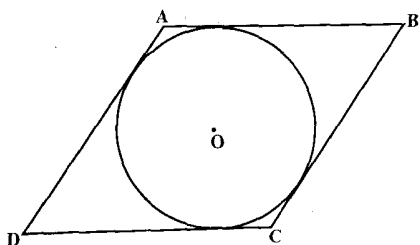
می‌گذرد، از یک نقطه خواهند گذشت.

ABM از نقطه ثابتی می گذرند.



۵.۱.۵.۷. شکلهای ایجاد شده

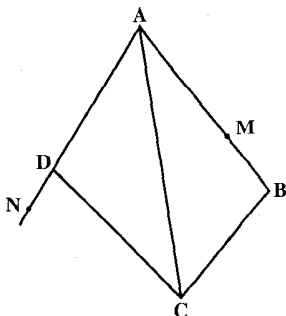
یک دایره، لوزی است.



۶.۱.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

برابر با $\sqrt{3}$ است. مساحت متوازی الاضلاع را پیدا کنید.

کنید که قطر AC نیز همواره از نقطه ثابتی می‌گذرد.



در این قسمت مطالب مربوط به دایره و مستطیل را بررسی می‌کنیم.

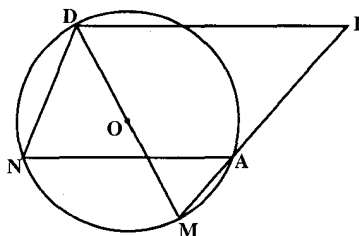
۸۶۱. یک دایره و یک مستطیل حداکثر چند نقطه برخورد می‌توانند داشته باشند؟

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۸۶۲. ثابت کنید که از چهار رأس هر مستطیل یک دایره می‌گذرد.

۸۶۳. در شکل چهارضلعی DIAN یک متوازی الاضلاع است و نقطه‌های I، A و M روی

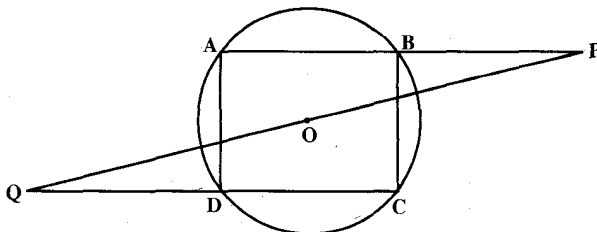
یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید: $DM = DI$



۷. ۵. ۲. ۴. ۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۸۶۴. ثابت کنید، تمام مستطیل‌هایی که در یک دایره محاطند و یک ضلع یا امتداد یک ضلعشان

از نقطه ثابتی می‌گذرد، ضلع روبه روی آن ضلع نیز از یک نقطه ثابت می‌گذرد.



۵. ۲. ۵. ۷. شکلهای ایجاد شده

۸۶۵. فرض کنید ABCD مستطیل، E

نقطه ای روی BC، F نقطه ای روی

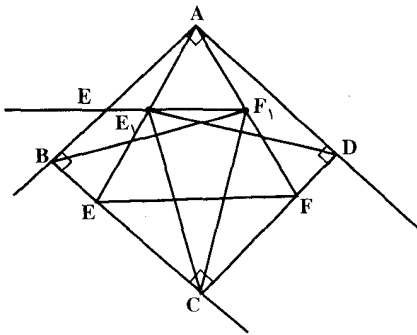
DC، E_1 وسط AE و F_1 وسط AF

باشد. ثابت کنید که اگر مثلث AEF

متساوی الاضلاع باشد، آن وقت

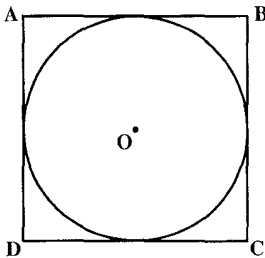
مثلثهای DE_1C و BF_1C هم،

متساوی الاضلاعند.



۸۶۶. ثابت کنید هر مستطیل محیط بر یک

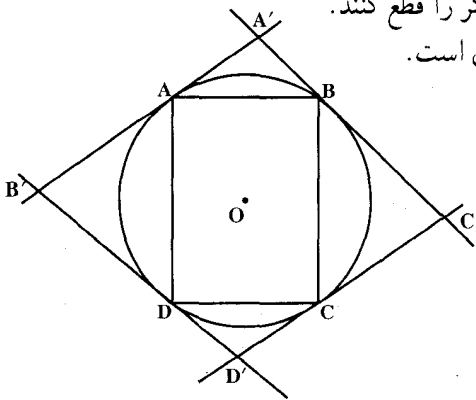
دایره مربع است.



۸۶۷. مستطیل ABCD محاط در دایره به مرکز O داده شده است. از رأسهای این مستطیل

مماسهایی بر دایره می کشیم تا یکدیگر را قطع کنند.

ثابت کنید چهارضلعی حاصل لوزی است.

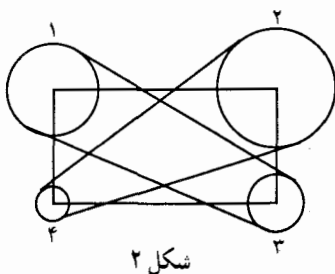


۸۶۸. چهار دایره ۱، ۲، ۳ و ۴ را، به ترتیب، به مرکز رأسهای مستطیل و به شعاع r_1, r_2, r_3, r_4

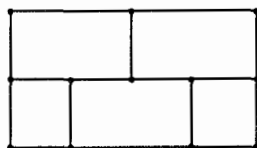
و رسم کرده ایم؛ در ضمن $d > r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ ، طول قطر مستطیل است؛

شکل ۲). مماسهای مشترک بیرونی را برای دو دایره ۱ و ۳ و برای دو دایره ۲ و ۴ رسم

بخش ۷ / دایره و چهارضلعی □ ۲۴۳



شکل ۲



شکل ۱

کرده ایم. ثابت کنید، در چهارضلعی که از برخورد این مماسها به دست می آید، می توان دایره ای محاط کرد.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۱

۳.۵.۷. دایره و مربع

۱.۳.۵.۷. تعریف و قضیه

در این قسمت دایره و مربع مورد بررسی قرار می گیرند.

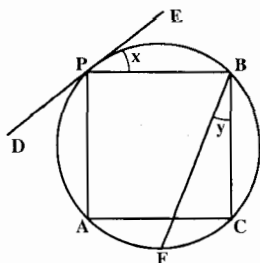
۸۶۹. قضیه. هر مربع محاط در یک دایره و محیط بر دایره دیگری است.

۲.۳.۵.۷. نقطه و دایره

۸۷۰. صفحه ای شطرنجی که طول ضلع هر خانه آن برابر یک سانتیمتر است، در اختیار داریم.

دایره ای به شعاع 100 سانتیمتر رسم کرده ایم، به نحوی که محیط آن، از هیچ رأسی از خانه ها نمی گذرد و بر هیچ ضلعی از خانه ها مماس نیست. محیط این دایره، چند خانه را می تواند قطع کند؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۶۸



۳.۳.۵.۷. زاویه

۸۷۱. مربع محاط در دایره، DE مماس و F وسط

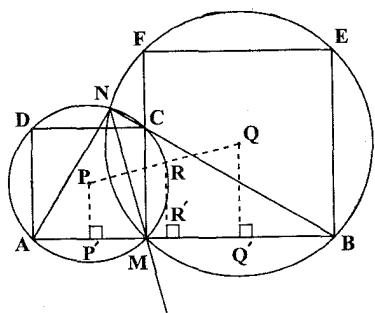
کمان AC است. اندازه x و y را بیابید.

الف) $\sqrt{2}$ ب) ۲ ج) $\sqrt{3}$ د) $2\sqrt{2}$ هـ) $2\sqrt{3}$

۸۷۳. در یک مربع به ضلع واحد، چند دایره رسم کرده ایم که، شعاع هر کدام از آنها از $\frac{1}{1000}$ کوچکتر است. فاصله بین هر دو نقطه از هر دو دایره، برابر $\frac{1}{1000}$ نیست. ثابت کنید، مساحتی که به وسیله دایره ها پوشیده می شود، از $\frac{34}{1000}$ تجاوز نمی کند.

۵.۳.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی

یک طرف AB و درحالی که قطعه های AM و MB بترتیب قاعده هایشان می باشند رسم کرده ایم.



دایره‌های محیطی این مربعها به مرکزهای P و Q در M نیز در نقطه دیگر N متقاطع می‌شوند. فرض می‌کنیم که نمایشگر نقطه دیگر برخورد خطهای راست AF و BC باشد.

۱. ثابت کنید نقطه‌های N و N' بر هم منطبقند.

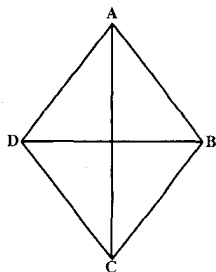
۲. ثابت کنید خطهای راست MN بی توجه به اختیار نقطه M از نقطه ثابت S می گذرند.

المیادہای بین المللی ریاضی، ۱۹۵۹

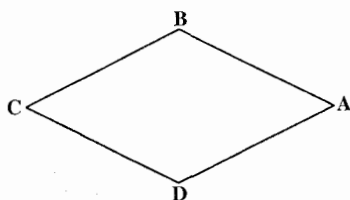
۷.۵.۴. دایره و لوزی

۱.۴.۵.۷. تعریف و قضیه

می‌دانیم که لوزی چهارضلعی است که چهار ضلع آن با هم برابرند. در این قسمت مطالب مربوط به دایره و لوزی را بررسی می‌کنیم.



۸۷۵. قضیه. ثابت کنید که ضلعهای هر لوزی، بر یک دایره مماسند.



۲.۴.۵.۷. زاویه

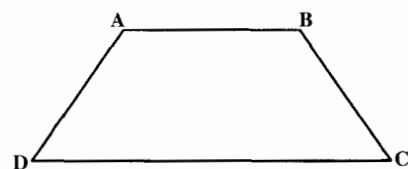
۸۷۶. A, B, C و D را رأسهای یک لوزی فرض می‌کنیم. K_1 دایره‌ای است که از سه نقطه C, B و D گذشته است. همچنین دایره K_2 از نقطه‌های A, C و D؛ دایره K_3 از نقطه‌های A, B و D و سرانجام، دایره K_4 از نقطه‌های A, B و C گذشته‌اند. ثابت کنید، زاویه بین مماسهای بر دو دایره K_1 و K_3 در نقطه B، برابر است با زاویه بین مماسهای بر دو دایره K_2 و K_4 در نقطه A.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۳

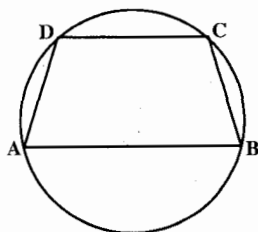
۵.۵.۷. دایره و دوزنقه

۱.۵.۵.۷. تعریف و قضیه

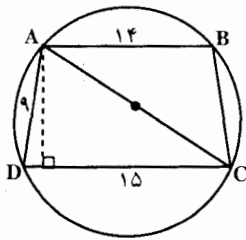
می‌دانیم دوزنقه چهارضلعی است که تنه‌ها دوزنق آن موازی یکدیگرند، که این دو ضلع را قاعده‌ها و دو ضلع ناموازی را ساقهای دوزنقه می‌نامند. در این قسمت مطالب مربوط به دایره و دوزنقه را بررسی می‌کنیم.



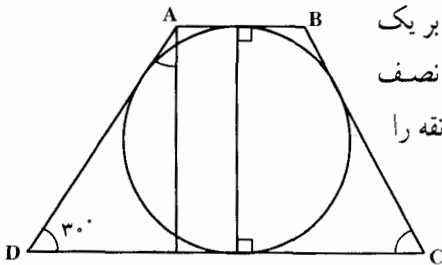
۸۷۷. قضیه. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آن که دوزنقه‌ای محاطی باشد آن است که متساوی الساقین باشد.



۲.۵.۵.۷. شعاع

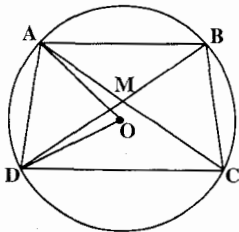


۸۷۸. شعاع کوچکترین دایره‌ای را پیدا کنید که دوزنقه متساوی الساقینی را با قاعده‌های ۱۵ و ۱۴ و ضلع جانبی ۹ در برگیرد.



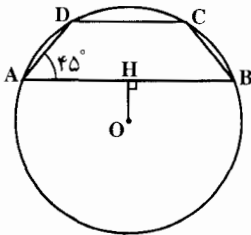
۸۷۹. مساحت دوزنقه متساوی الساقینی محیط بر یک دایره، برابر با S و ارتفاع دوزنقه برابر با نصف ساق آن است. شعاع دایره محاط در دوزنقه را پیدا کنید.

۳.۵.۵.۷. زاویه



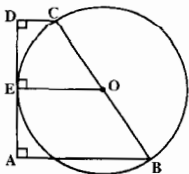
۸۸۰. دوزنقه ABCD در دایره به مرکز O محاط است. AB و CD دو قاعده آن هستند. محل برخورد دو قطر آن را M می‌نامیم. ثابت کنید: $\angle AMD = \angle AOD$.

۴.۵.۵.۷. پاره خط



۸۸۱. دوزنقه ABCD در دایره‌ای محاط است. زاویه $\hat{A}$ از آن که مجاور به قاعده بزرگتر است مساوی 45° است. ثابت کنید که قاعده کوچکتر مساوی است با دو برابر فاصله مرکز دایره از قاعده بزرگتر.

۵.۵.۵.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۸۸۲. در دوزنقه قائم الزاویه‌ای به ارتفاع h ، به قطر ساق مایل دایره‌ای رسم کرده‌ایم و دیده‌ایم که این دایره بر ساق قائم مماس شده است. مطلوب است، مساحت مثلث

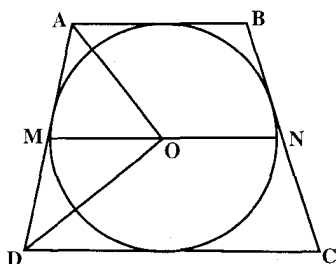
قائم الزاویه‌ای که ضلعهای مجاور به زاویه قائمه اش مساوی دو قاعده این دوزنقه باشد.

۸۸۳. بر دایره‌ای دوزنقه متساوی الساقینی محیط

کرده‌ایم، خط واصل بین وسطهای دوساق

آن مساوی m شده است، محیط و طول ساق

دوزنقه را به دست آورید.



۶.۵.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی

۸۸۴. دوزنقه ABCD در یک دایره به مرکز O محاط است.

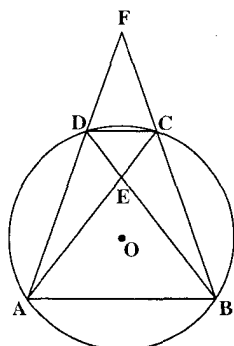
قطرهای AC و BD یکدیگر را در نقطه E و امتداد

ضلعهای AD و BC یکدیگر را در نقطه F قطع

می‌کنند. ثابت کنید که،

۱. چهار نقطه A, D, E و O روی یک دایره واقعند.

۲. چهار نقطه A, C, O و F روی یک دایره قرار دارند.



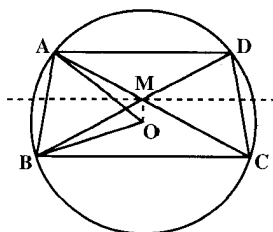
۸۸۵. دوزنقه متساوی الساقین ABCD در دایره O محاط است. ساق AB ثابت و ساق CD

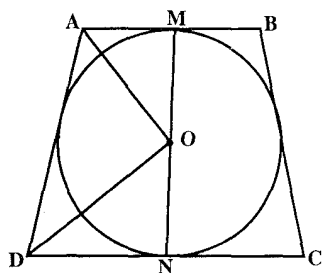
متحرک است و قطرهای AC و BD یکدیگر را در نقطه M قطع می‌کنند.

۱. ثابت کنید نقطه M همواره روی دایره محیطی مثلث AOB واقع است.

۲. ثابت کنید خطی که از نقطه M به موازات دوقاعده دوزنقه رسم می‌شود از نقطه ثابتی

مانند I می‌گذرد.





۸۸۶. دوزنقه متساوی الساقین ABCD محیط بر دایره به مرکز O داده شده است. نقطه های تماس دو قاعده AB و CD با دایره را M و N می نامیم. ثابت کنید:

۱. نقطه های M و N وسطهای دو قاعده بوده و سه نقطه M، O و N بر یک استقامتند.

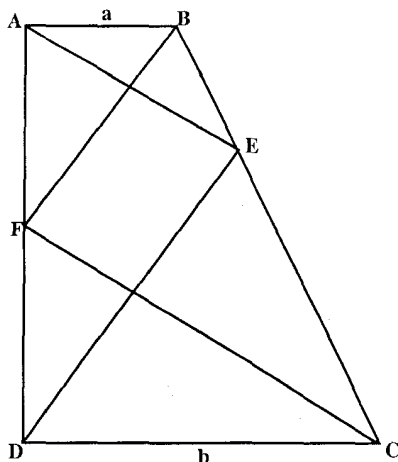
۲. ثابت کنید مثلث AOD قائم الزاویه است.

۳. ثابت کنید اندازه ساق دوزنقه، مساوی نصف مجموع دو قاعده آن است.

۸۸۷. در دوزنقه قائم الزاویه ABCD ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) قاعده های $AB = a$ و $CD = b$ و ساق $BC = a + b$ می باشند. نقطه E را روی BC به قسمی اختیار می کنیم که $BE = a$ باشد و وسط AD را F می نامیم:

۱. ثابت کنید که مثلثهای AED و BFC قائم الزاویه می باشند.

۲. طول خط مرکزین دایره های محیطی مثلثهای ABE و DCF را تعیین کنید.



بخش ۸

● دایره و n ضلعی ($n \geq 5$)

۱.۸. تعریف و قضیه

۲.۸. شعاع

۳.۸. نقطه و دایره

۴.۸. زاویه

۱.۴.۸. اندازه زاویه

۲.۴.۸. رابطه بین زاویه‌ها

۵.۸. پاره خط

۱.۵.۸. اندازه پاره خط

۲.۵.۸. رابطه بین پاره خطها

۶.۸. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۶.۸. خطها موازی اند

۲.۶.۸. خطها هم‌رستند

۷.۸. شکل‌های ایجاد شده

۸.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۹.۸. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۸. دایره و n ضلعی ($n \geq 5$)

۱.۸. تعریف و قضیه

در این بخش مطالب مربوط به چندضلعیهای محاطی و محیطی (پنج ضلعی و شش ضلعی و ...) و دایره و چندضلعیهای دیگر ($n \geq 5$) را مورد بررسی قرار می دهیم.

۲.۸. شعاع

۸۸۸. در چندضلعی محاطی، قطرهای نامتقاطع رسم می شوند و چندضلعی را به مثلثهایی تقسیم می کنند. ثابت کنید که مجموع شعاعهای دایره های محاط در این مثلثها، مستقل از طریقی است که قطرها رسم شده اند.

۸۸۹. فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_n$ چندضلعی محاطی باشد؛ مرکز دایره، در درون چندضلعی قرار دارد. مجموعه ای از دایره ها، بر دایره داده شده در نقطه های $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، مماس درونی اند و یکی از نقطه های برخورد دو دایره مجاور، روی ضلعی از چندضلعی قرار دارد. ثابت کنید، اگر n فرد باشد، آن وقت شعاع همه دایره ها یکی است. طول مرکز بیرونی اجتماع دایره های محاطی، برابر با محیط دایره داده شده است.

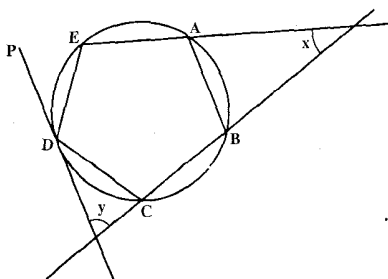
۳.۸. نقطه و دایره

۸۹۰. پنج ضلعی میکل Miquel دایره های محیطی پنج مثلث حاصل از ضلعها و امتداد ضلعهای یک پنج ضلعی را رسم می کنیم. ثابت کنید نقطه های برخورد این دایره ها روی یک دایره اند.

۴.۸. زاویه

۱.۴.۸. اندازه زاویه

۸۹۱. $ABCDE$ پنج ضلعی منتظم محاط در دایره و DP مماس بر دایره در نقطه D است. اندازه x و y را بیابید.



۲.۴.۸. رابطه بین زاویه‌ها

۸۹۲. در هر $2n$ ضلعی محاطی، مجموع زاویه‌های با شماره فرد مساوی مجموع زاویه‌های با شماره زوج است.

۸۹۳. هفت ضلعی $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ ، در یک دایره محاط شده است. ثابت کنید، اگر مرکز این دایره، در درون هفت ضلعی باشد، آن وقت، مجموع زاویه‌های رأسهای A_1 ، A_3 و A_5 ، از 45° درجه کمتر است.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۲

۵.۸. پاره خط

۱.۵.۸. اندازه پاره خط

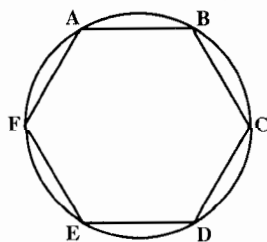
۸۹۴. قضیه پونسله (Poncelet). اگر یک $2n+1$ ضلعی محاط در یک دایره باشد و $2n$ ضلع آن به موازات خود تغییر کنند، آخرین ضلع طول ثابتی دارد.

۲.۵.۸. رابطه بین پاره خطها

۸۹۵. پنج ضلعی منتظم ABCDE در یک دایره محاط است. اگر M نقطه دلخواهی از کمان $\widehat{AE}$ باشد، ثابت کنید: $MB + MD = MA + MC + ME$.

۶.۸. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۶.۸. خطها موازی اند



۸۹۶. شش ضلعی محدب و محاطی ABCDEF را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید اگر AB با DE و BC با EF موازی باشند، ضلعهای CD و FA نیز متوازی هستند.

۸۹۷. قضیه پونسله (Poncelet). اگر دو چند ضلعی محاطی با $3n$ ضلع دارای $(2n-1)$ ضلع موازی باشند، ضلع آخری آنها نیز باهم موازی اند.

۲.۶.۸. خطها همرسند

۸۹۸. برای آن که یک چندضلعی محدب قابل محاط شدن در یک دایره باشد، کافی است که:

- (الف) همه ضلعهایش با هم برابر باشند.
- (ب) همه زاویه‌هایش با هم برابر باشند.
- (ج) عمود منصفهای ضلعهای آن همرس باشند.
- (د) محور تقارن داشته باشد.
- (هـ) مرکز تقارن داشته باشد.

المیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۷.۸. شکلهای ایجاد شده

۸۹۹. فرض کنید $ABCDEF$ شش ضلعی محاطی باشد که در آن $AB = CD = EF = R$ ،

که شعاع دایره محیطی است و O مرکز آن. ثابت کنید که نقطه‌های برخورد دو به دو دایره‌های محیطی مثلثهای BOC ، DOE و FOA ، متمایز از O ، رأسهای مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع R به حساب می‌آیند.

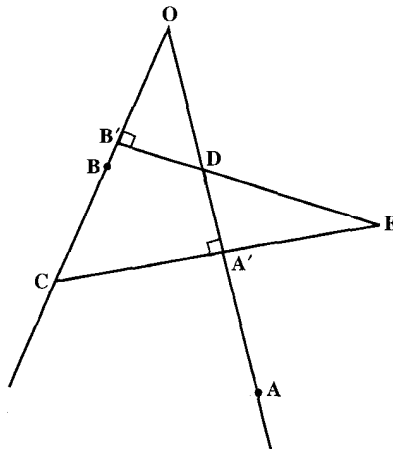
۹۰۰. بر ضلعهای زاویه O دو طول اختیاری OA و OB را جدا می‌کنیم و از A' وسط OA

عمودی بر OA اخراج می‌کنیم تا ضلع OB را در نقطه C قطع کند و از B' وسط OB

عمودی بر OB اخراج می‌کنیم تا ضلع OA را در نقطه D قطع کند. خطهای $A'C$ و

$B'D$ یکدیگر را در نقطه E قطع می‌کنند. ثابت کنید پنج ضلعی $ACBDE$ محاطی

است.

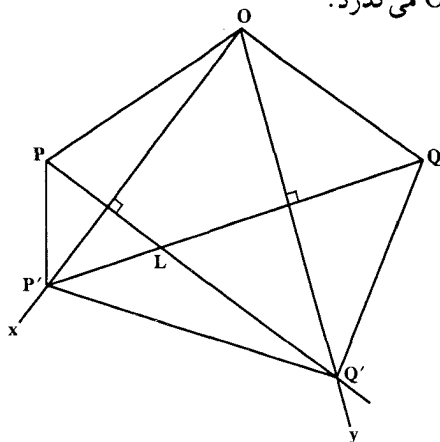


بخش ۸ / دایره و n ضلعی ($n \geq 5$) □ ۲۵۳

۹۰۱. ثابت کنید P و Q قرینه‌های یک نقطه مثل L نسبت به ضلعهای Ox و Oy از یک زاویه و نقطه‌های :

$$Q' = (LP, Oy) , P' = (LQ, Ox)$$

روی دایره‌ای قرار دارند که از نقطه O می‌گذرد.



۹۰۲. قطرهای یک شش ضلعی با هم برابرند و ضلعهای آن دو به دو موازی می‌باشند. ثابت کنید که این شش ضلعی قابل محاط شدن در یک دایره است. مسأله کاتالان (CATALAN)

۸.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۹۰۳. ثابت کنید که مساحت چندضلعی محیطی برابر است با πp ، که در آن r شعاع دایره محاطی و p نصف محیط چندضلعی است. (به‌ویژه این دستور برای مثلث هم درست است).

۹۰۴. خطی که تصویرهای یک نقطه دلخواه بر ضلعهای یک زاویه را به هم وصل می‌کند، بر مزدوج هم‌زاویه خطی که از آن نقطه به رأس زاویه وصل می‌شود، عمود است.

۹.۸. مسأله‌های ترکیبی

۹۰۵. در یک پنج ضلعی محدب همه ضلعها با هم برابرند.

۱. ثابت کنید : در درون این پنج ضلعی و روی قطر بزرگتر، نقطه‌ای وجود دارد که، از آن جا، هر ضلع پنج ضلعی به زاویه‌ای دیده می‌شود که از 90° درجه تجاوز نمی‌کند.

۲. ثابت کنید، دایره‌هایی که به قطر ضلعها رسم شوند، پنج ضلعی را نمی‌پوشانند.

راهنمایی و حل

از آن جا که به گفته جورج پولیا J. Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می تواند برای حل مسأله ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید؛ ولی در صورتی که او را با مسأله ای که باید حل کند تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازه کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی ماند که او انجام دهد». در این مجموعه، برخی از مسأله ها حل شده اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله ها به عهده دانش پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرة المعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوه تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و با ساده ترین راه حل، یا راهنمایی نمی باشند؛ و به طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره گیری از ذهن خلاق خویش به راه حلهای ساده تر و یا جالبتر از راه حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هرچند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، اما ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهای وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضی دانان و دیگر علاقه مندان به هندسه درخواست می شود نظریات ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه حلهای جالبتر یا ساده تر برای مسأله های حل شده، و راه حلهای مناسب و جالب برای مسأله های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه ها یا مسأله ها به نام فرستنده آن، در چاپهای بعدی دایرة المعارف درج خواهد شد.

می گیرند؛ در نتیجه نقطه های A و C برهم و نقطه های B و D نیز برهم واقع شده و کمانهای $\widehat{AB}$ و $\widehat{CD}$ برهم منطبق می شوند؛ یعنی دو کمان متساوی اند.

۵. یک قوس را ثابت نگاه می داریم و دایره را آن قدر در حول مرکزش می چرخانیم تا قوس دیگر بر قوس ثابت منطبق شود؛ در نتیجه دوزاویه مرکزی بر یکدیگر منطبق می شوند، یعنی متساوی اند. نتیجه. هر قطر دایره را به دو کمان برابر تقسیم می کند که هر یک از آنها رو به رو به یک زاویه نیمصفحه است.

۶. اگر دایره را آن قدر بچرخانیم که OC بر OA قرار گیرد و دوزاویه در یک طرف OA واقع شوند، ضلع OD در درون زاویه AOB می افتد و نقطه D بین A و B واقع می شود، یعنی:

$$\widehat{AB} > \widehat{CD}$$

۷. اگر $\widehat{AOB}$ از $\widehat{COD}$ بزرگتر نباشد، یا با آن مساوی است یا از آن کوچکتر است؛ هرگاه $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ باشد، $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ و این خلاف فرض است و اگر $\widehat{AOB} < \widehat{COD}$ باشد، $\widehat{AB} < \widehat{CD}$ و این نیز خلاف فرض است؛ پس در نتیجه $\widehat{AOB} > \widehat{COD}$ است. ۸. در دو مثلث AOB و A'O'B' (شکل)

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' \\ AB = A'B' \\ OB = OB' \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOB = \triangle A'O'B'$$

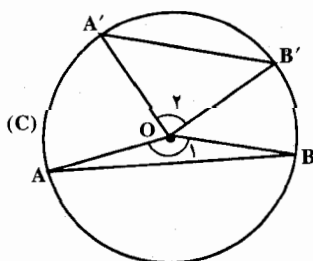
بنابراین $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ و در نتیجه: $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$. بترتیب عکس می توان دید که:

$$\widehat{AB} = \widehat{A'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$$

و در این صورت دو مثلث AOB و A'O'B' به دلیل برابری دو ضلع و زاویه بین آنها مساوی یکدیگر می شوند، و در نتیجه $AB = A'B'$.

۹. در شکل داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ AB > A'B' \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{O_1} > \widehat{O_2}$$

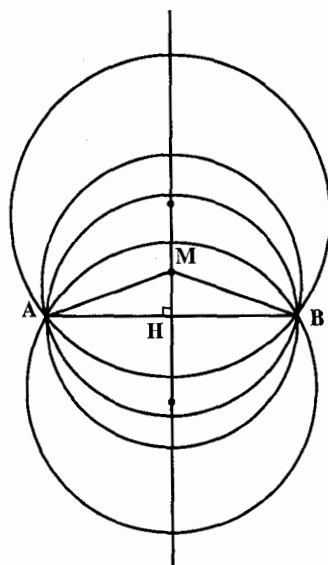


بنابراین $\widehat{AB} > \widehat{A'B'}$

عکس قضیه را با برهان خلف یا با روش مستقیم ثابت کنید.

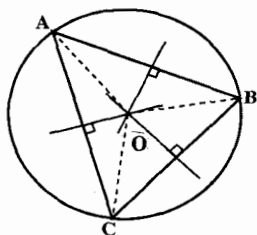
راهنمایی و حل قضیه ها و مسأله های بخش ۱. ربع دایره و نیمدایره

۱.۱. تعریف و قضیه



۱. در صفحه P پاره خط AB را در نظر می گیریم. چنان که می دانیم اگر نقطه M روی عمود منصف این پاره خط واقع باشد، دایره به مرکز M و شعاع MA از هر دو نقطه A و B می گذرد. بنابراین دایره های بیشماری می توان رسم کرد که همه آنها بر دو نقطه A و B بگذرند. مرکزهای همه این دایره ها بر عمود منصف پاره خط AB واقعند. شعاع این دایره ها بزرگتر یا مساوی $\frac{AB}{2}$ است. بنابراین کوچکترین دایره گذرنده بر دو نقطه A و B دایره به قطر پاره خط AB است.

۲. اگر سه نقطه A، B و C بر یک خط راست واقع باشند، عمود منصفهای سه پاره خط AB، BC و AC متوازی هستند و نقطه ای نمی توان داشت که از سه نقطه مزبور به یک فاصله باشد. بنابراین در این حالت دایره ای نمی توان رسم کرد که آن سه نقطه را شامل باشد.

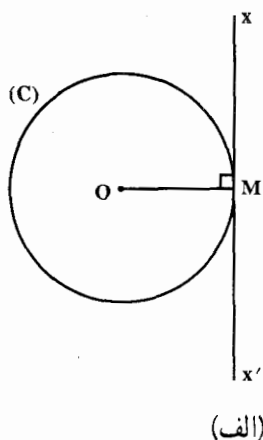


۳. سه نقطه A، B و C را که بر یک خط راست واقع نیستند در نظر می گیریم (شکل)، عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC در یک نقطه و فقط در یک نقطه مانند O هم رسند و $OA = OB = OC$ ، بنابراین دایره به مرکز O و به شعاع OA، (یا OB یا OC) بر سه نقطه A، B و C می گذرد. نقطه O تنها نقطه ای است که از نقطه های A، B و C به یک فاصله است،

پس دایره به مرکز O و به شعاع OA تنها دایره ای است که بر سه نقطه مذکور می گذرد.

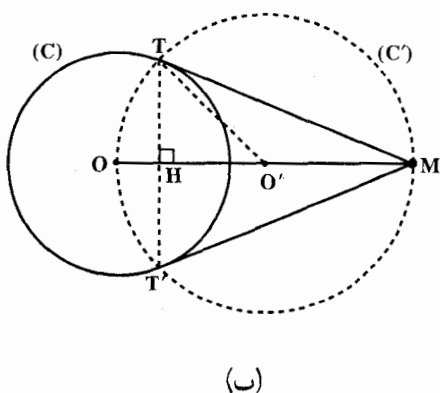
۴. یکی از دو زاویه را ثابت نگاه می داریم و دایره را حول مرکز آن قدر می چرخانیم تا یک ضلع زاویه دیگر بر یک ضلع زاویه ثابت قرار گیرد و دو زاویه در یک طرف آن ضلع واقع شوند؛ بدیهی است که چون دو زاویه متساوی اند، اضلاع دیگرشان نیز بر روی هم قرار

۱۴. اگر $AB > A'B'$ باشد، وتر AM را مساوی وتر $A'B'$ و در طرف قوس AB رسم کنید.

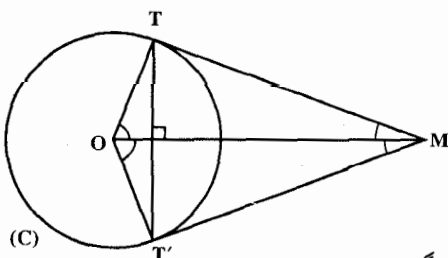


۱۵. اگر نقطه M بر دایره واقع باشد، خط $x'Mx$ که در آن نقطه بر شعاع OM عمود رسم شود، در نقطه M بر دایره مماس و بنابراین جواب مسأله است و مسأله فقط یک جواب دارد (چرا؟) (شکل الف).

در حالتی که نقطه M در برون دایره باشد، برای پی بردن به روش رسم مماس، ملاحظه می کنیم که اگر MT بر دایره (C) مماس و نقطه O' وسط پاره خط OM باشد، در مثل قائم الزاویه OTM ، $O'T = \frac{1}{2}OM$ ، یعنی خطی که از نقطه M می گذرد و بر دایره (C) مماس است با آن دایره در نقطه ای به فاصله $\frac{1}{2}OM$ از نقطه O' مماس می شود. بنابراین اگر به مرکز O' و به شعاع $\frac{1}{2}OM$ دایره ای رسم کنیم، دایره (C) را در نقطه ای مانند T قطع می کند و از وصل کردن آن نقطه به نقطه M خط مماس رسم می شود (شکل ب).



۱۶. از نقطه M دو مماس MT و MT' بر دایره (C) رسم شده اند. دو مثلث TOM و $T'OM$ همنهشتند. در نتیجه $\hat{TMO} = \hat{T'MO}$ و $MT = MT'$ و $\hat{TOM} = \hat{T'OM}$ ؛ و در مثلث متساوی الساقین MTT' ، $MH \perp TT'$ است.



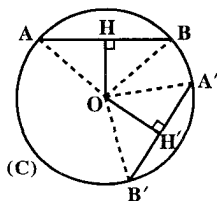
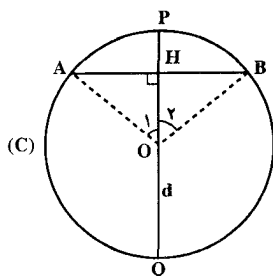
۱۷. برای اثبات این قضیه سه حالت در نظر می گیریم:

حالت اول. یکی از ضلعهای زاویه محاطی قطری از دایره است (شکل الف). اگر از A

۱۰. اگر در دایره $C(O, R)$ ، قطر PQ بر وتر AB عمود باشد، در مثلث AOB که متساوی الساقین است، پاره خط OH ارتفاع نظیر قاعده است و بنابراین زاویه رأس و

قاعده مثلث را نصف می کند، پس: $AH = HB$ و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

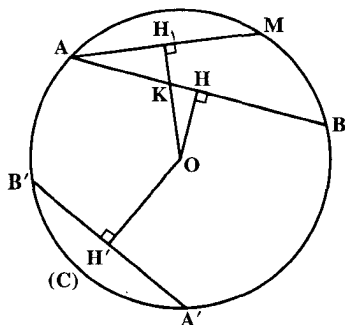
از تساوی این دو زاویه مرکزی، تساوی کمانهای AP و PB نتیجه می شود. اما PQ قطر دایره است و بنابراین کمانهای PAQ و PBQ متساوی اند، در نتیجه: $\widehat{AQ} = \widehat{QB}$.



۱۲. از تساوی دو وتر AB و $A'B'$ تساوی دو مثلث AOB و $A'OB'$ را به حالت برابری سه ضلع نتیجه می گیریم. لازمه تساوی این دو مثلث آن است که همه اجزای نظیر آنها، و از جمله ارتفاعهای نظیر دو قاعده، متساوی باشند، پس $OH = OH'$.

به عکس، بسادگی ثابت می شود که در هر دایره وترهایی که از مرکز دایره به یک فاصله اند، متساوی اند.

۱۳. بر دایره (C) ابتدا از نقطه A، کمان $\widehat{AM}$ را مساوی با کمان $\widehat{A'B'}$ جدا می کنیم، چون $A'B' < AB$ ، نقطه M بر کمان $\widehat{AB}$ بین A و B و در آن طرفی از وتر AB قرار می گیرد که مرکز دایره در آن طرف قرار ندارد، پس اگر عمودی که از مرکز دایره بر وتر AM فرود می آید، آن وتر را در نقطه H_1 و وتر AB را در نقطه K قطع کند:



$$AM = A'B' \Rightarrow OH_1 = OH'$$

اما $\widehat{AB} > \widehat{AM}$ ، پس وترهای AB و AM در یک امتداد نیستند و پاره خط OH_1 که بر وتر AM عمود است، بر وتر AB عمود نیست، پس:

$$\left. \begin{array}{l} OH < OK \\ OK < OH_1, \quad OH_1 = OH' \end{array} \right\} \Rightarrow OH < OH'$$

به مرکز دایره وصل کنیم، زاویه مرکزی AOC به دست می آید که زاویه خارجی مثلث متساوی الساقین OAB است، بنابراین مساوی مجموع دو زاویه غیر مجاور آن است.

$$\widehat{AOC} = \widehat{A} + \widehat{B} = 2\widehat{B}$$

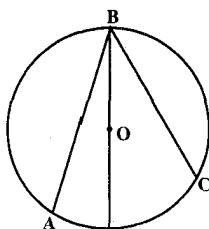
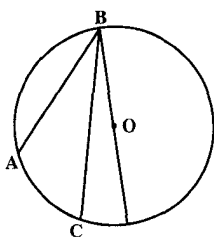
یعنی زاویه محاطی ABC مساوی نصف زاویه مرکزی AOC می باشد،

$$\widehat{ABC} = \frac{1}{2} \widehat{AOC}$$

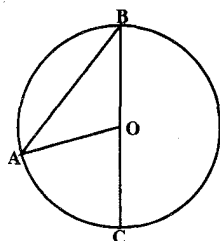
چون اندازه زاویه مرکزی AOC برابر اندازه کمان AC می باشد، نتیجه می شود که اندازه زاویه ABC مساوی نصف اندازه کمان روبه روی آن می باشد.

حالت دوم. دو ضلع زاویه در دو طرف مرکز دایره قرار دارند. شکل (ب)

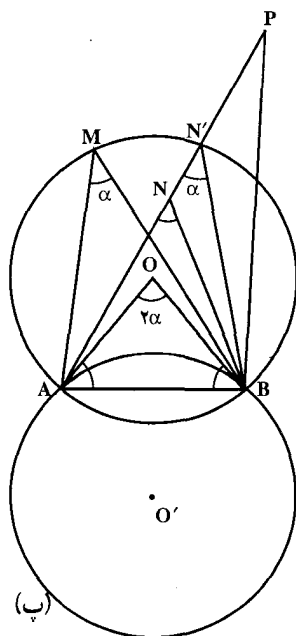
حالت سوم. دو ضلع زاویه در یک طرف مرکز دایره واقعند. شکل (پ)
اثبات حالت‌های (ب) و (پ) با توجه به شکل آسان است.



(ب)



(الف)



(پ)

۱۸. نقطه‌های ثابت A و B و زاویه حاده α را در نظر می گیریم (شکل). در نقطه‌های مذکور بر خط AB و در یک

طرف آن خط، دو زاویه به اندازه $90^\circ - \alpha$ می سازیم.

ضلعهای این دو زاویه در نقطه‌ای مانند O یکدیگر را قطع می کنند. دایره‌ای که به مرکز O و به شعاع OA یا OB رسم می کنیم از دو نقطه A و B می گذرد. اگر نقطه M را بر کمان بزرگتر نظیر وتر AB از این دایره، ($\widehat{ACB} > 180^\circ$)، که با مرکز آن در یک طرف پاره خط

AB قرار دارد اختیار کنیم، $\widehat{AMB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = \alpha$

(چرا؟)، یعنی هر نقطه واقع بر کمان ACB رأس زاویه‌ای است، مساوی α که ضلعهای آن از دو نقطه ثابت A و B می گذرند. اکنون ثابت می کنیم که رأس هر زاویه مساوی α که ضلعهایش بر دو نقطه A و B بگذرند، بر

$\widehat{ACB}$ از دایره O قرار دارد. در حقیقت اگر فرض شود که نقطه ای مانند N مثلاً در درون دایره واقع باشد، یکی از دو خط NA یا NB و مثلاً NA ، دایره را در نقطه ای مانند N' قطع می کند و در مثلث $NN'B$:

$$\hat{N}_1 > \hat{N}', \quad \hat{N}' = \alpha \Rightarrow \hat{N}_1 > \alpha$$

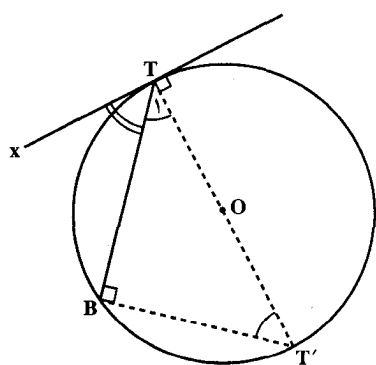
به همین ترتیب ثابت می شود که اگر P نقطه ای در بیرون دایره باشد، $\hat{APB} < \alpha$ است. پس هر نقطه M از صفحه دایره با شرط آن که $\hat{AMB} = \alpha$ باشد، بر $\widehat{ACB}$ واقع است. کمان $\widehat{ACB}$ را که با مرکز دایره در یک طرف وتر AB قرار دارد و دارای خاصیت بالا است، کمان حاوی زاویه α وابسته به پاره خط AB می نامیم. این کمان را کمان درخور زاویه α وابسته به پاره خط AB نیز می گویند.

اگر بر خط AB در دو نقطه A و B و در طرف دیگر این پاره خط زاویه هایی مساوی $\alpha - 90^\circ$ بنا کنیم به همان ترتیب دایره دیگر O' از صفحه P حاصل می شود که عیناً دارای همین خاصیت است.

بدیهی است کمان کوچکتر $\widehat{AB}$ از دایره $C(O, R)$ نیز حاوی زاویه منفرجه $\alpha - 180^\circ$ وابسته به پاره خط AB است و همچنین کمان مشابه آن از دایره دیگر نیز همین خاصیت را دارد.

۱۹. قطر TT' را که از نقطه تماس می گذرد، رسم می کنیم (شکل). در مثلث TBT' :

$$\hat{B} = \frac{1}{2} \widehat{TT'} = 90^\circ \Rightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}' = 90^\circ$$



از طرفی، $OT \perp Tx \Rightarrow \hat{T}_1 + \hat{T}B = 90^\circ$ و از آن جا :

$$x \hat{T}B = \hat{T}'$$

اما زاویه T' زاویه ای محاطی و مقابل به TB و در نتیجه مساوی نصف این کمان است. پس

$$x \hat{T}B = \frac{1}{2} \widehat{TB}$$

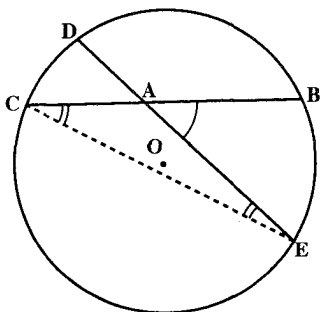
۲۰. در مثلث EAC از شکل داریم :

$$\hat{BAE} = \hat{ACE} + \hat{CEA}$$

اما دو زاویه طرف دوم، زاویه های محاطی هستند. بنابراین :

$$\hat{BAE} = \frac{1}{2} \widehat{BE} + \frac{1}{2} \widehat{DC}$$

یا

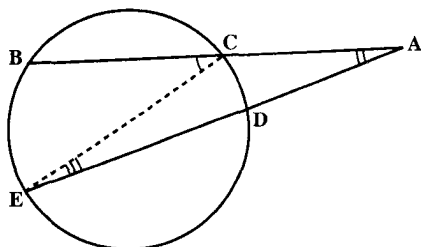


$$\widehat{BAE} = \frac{1}{2}(\widehat{BE} + \widehat{DC})$$

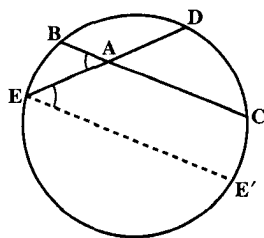
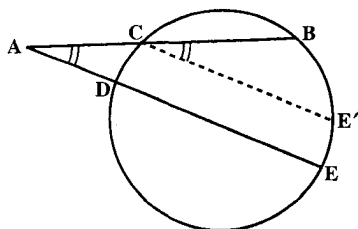
۲۱. قضیه را با توجه به شکل به صورت

$$\widehat{CAE} = \frac{1}{2}(\widehat{BE} - \widehat{CD})$$

ثابت کنید.



نکته. آیا با توجه به شکل‌های زیر می‌توانید قضیه‌های بالا را به صورت دیگر ثابت کنید؟

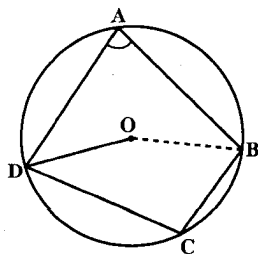


۲۲. در شکل، اندازه هریک از دو زاویه $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$ نصف کمان مقابل به آن است، اما مجموع دو کمان مقابل آن زاویه‌ها شامل تمام دایره و مساوی چهار قائمه است، پس:

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180^\circ$$

$$\widehat{CDA} + \widehat{CBA} = 180^\circ$$

و به همین دلیل



۲۳. اگر دایره محیطی مثلث $\widehat{BAD}$ را رسم کنیم و M نقطه دلخواهی از کمان روبه روی $\widehat{A}$

باشد :

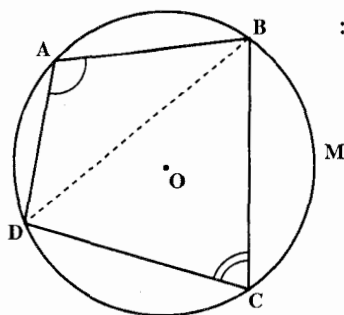
$$\hat{A} = \frac{1}{2} \widehat{BMD} = \frac{1}{2} (36^\circ - \widehat{BAD}) = 18^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BAD}$$

$$\hat{A} = 18^\circ - \hat{C}$$

اما بنا به فرض :

$$\hat{C} = \frac{1}{2} \widehat{BAD}$$

از مقایسه این دو رابطه :



می دانیم که مکان هندسی رأسهای زاویه هایی که ضلعهای آنها از دو نقطه B و D می گذرند و اندازه آنها $\frac{1}{2} \widehat{BAD}$ است، کمان $\widehat{BMD}$ از دایره مزبور است، پس نقطه C بر دایره گذرنده بر سه نقطه A, B, D واقع است. یعنی چهارضلعی مفروض محاطی است.

۲۴. اگر چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی محیطی باشد و ضلعهای آن در نقطه های M, N, P و Q بر دایره محاطی آن مماس باشند (شکل)، می توان نوشت :

$$AM = AQ \quad (\text{چرا؟})$$

$$MB = BN$$

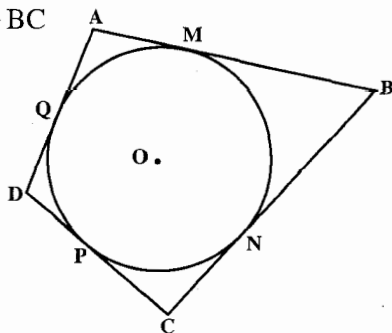
$$CP = NC$$

$$PD = QD$$

و چون این چهار رابطه را عضو به عضو با هم جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$(AM + MB) + (CP + PD) = (AQ + QD) + (BN + NC)$$

$$\Rightarrow AB + CD = AD + BC$$



۲۵. اثبات در حالت لوزی ساده است، پس فرض می‌کنیم چهارضلعی ABCD در شکل لوزی نیست و $AB + CD = BC + AD$. با توجه به شکل دیده می‌شود که $AD > AB$ و $CD > CB$ و

و $CD - BC = AD - AB$ ، اکنون

$AM = AB$ را بر AD و

$CN = CB$ را بر CD جدا می‌کنیم.

با توجه به رابطه بالا خواهیم داشت:

$$ND = MD$$

چون نقطه‌های B ، M و N را دو به

دو به هم وصل کنیم، مثلث BMN

پدید می‌آید. (چرا؟) می‌توان ملاحظه

نمود که نیمسازهای سه زاویه A ، C و D ، عمود منصفهای ضلعهای مثلث MBN هستند (چرا؟) و بنابراین در نقطه‌ای مانند O هم‌رسند. نقطه O از ضلعهای سه زاویه نامبرده به یک فاصله است، پس اگر به مرکز O و شعاعی مساوی OH (یا هریک از پاره‌خطهای OH' ، OH'' و OH''') دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر ضلعهای زاویه‌های مزبور، یعنی بر همه ضلعهای چهارضلعی مماس می‌شود. بنابراین چهارضلعی محیطی است.

۲.۱. شعاع

۲۶. مثلثهای OAB و OMN متساوی الساقین و OC نیمساز زاویه AOB و MON است، پس عمود منصف پاره‌خطهای AB و MN می‌باشد.

۳.۱. نقطه و نیمدایره

۲۷. در چهارضلعی $AEBF$ ، $\hat{BAF} = \hat{FEB} = 90^\circ$ است، پس دایره به قطر BF از نقطه‌های A و E می‌گذرد، یعنی چهار نقطه A ، E ، B و F همدایره‌اند.

۴.۱. کمان

۲۸. گزینه (ج) درست است.

۵.۱. وتر

۲۹. چهارضلعی PFEA محاطی است، زیرا $\widehat{FPE} = \frac{\widehat{CB}}{۲} = \widehat{FAE} = \frac{\widehat{CD}}{۲}$ است، پس:

$$\widehat{EFA} = \widehat{BPA} = ۹۰^\circ \Rightarrow AD \perp EF$$

۶.۱. قطر

۳۰. مثلث AMB قائم الزاویه متساوی الساقین است و $AB = MA\sqrt{۲}$ است. پس:

$$AB = ۶\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۱۲\text{cm}$$

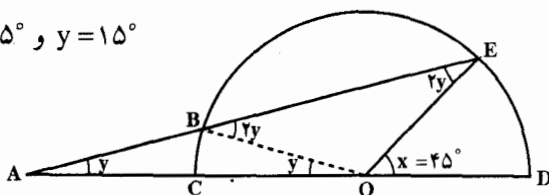
۷.۱. زاویه

۳۱. گزینه (ب) درست است. پاره خط BO را رسم می کنیم و اندازه های زاویه های EOD و BAO را بترتیب با x و y نشان می دهیم. توجه کنید که $AB = OD = OE = OB$ و قضیه زاویه خارجی مثلث را در مثلثهای ABO و AEO به کار ببرید. نتیجه می شود:

$$\widehat{EBO} = \widehat{BEO} = ۲y \text{ و } x = ۳y$$

$$۳y = ۴۵^\circ \text{ و } y = ۱۵^\circ$$

پس:



راه دیگر. با توجه به این که اندازه زاویه برونی دایره برابر است با نصف تفاضل کمانهای نظیر آن، داریم:

$$\dot{y} = \frac{1}{۲}(x - y), y = \frac{x}{۳} = \frac{۴۵^\circ}{۳} = ۱۵^\circ$$

۳۲. هریک از کمانهای $\widehat{AM}$ و $\widehat{MN}$ و $\widehat{NB}$ برابر ۶۰° است. از آنجا:

$$\widehat{MDN} = \frac{۶۰ + ۱۸۰}{۲} = ۱۲۰^\circ$$

۸.۱. پاره خط

۳۳. فرض کنید $B_1, B_2, \dots, B_{n+1}$ معرف نقطه‌های قرینه نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ نسبت به قطر $A.A_{2n+1}$ و C_k و C'_k نقطه‌های برخورد خط راست $A_k A_{2n+1-k}$ با OA_n و OA_{n+1} باشند. فرض کنید D_k و D_{k-1} نقطه‌های برخورد خط راست $A_k B_{k+1}$ و $A_k B_{k-1}$ با قطر باشند. به روشنی، همین نقطه‌ها، نقطه‌های برخورد خطهای راست $B_k A_{k+1}$ و $B_k A_{k-1}$ با قطر هستند. همچنین، روشن است که مثلث $D_{k-1} A_k D_k$ بر مثلث $C_k O C'_k$ قابل انطباق است. بنابراین، مجموع طول پاره خطهای $C_k C'_k$ ، برابر است با مجموع طول پاره خطهای $D_{k-1} D_k$ ($k=1, \dots, n$)، اما، $D_n = O$ و $D_0 = A_0$ ، یعنی این مجموع برابر با شعاع نیمدایره است.

۳۴. قرینه نقطه‌های B, D و C نسبت به قطر AB را B', D' و C' می‌نامیم و خطهای ED', DC', CB', BC', CD' و DO را رسم می‌کنیم.

$$DE = OP \text{ و } KL = PQ, \quad MN = AQ \quad \text{داریم:}$$

$$DE + KL + MN = r \quad \text{پس:}$$

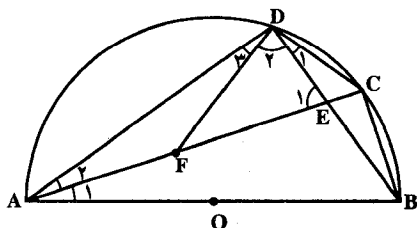
۳۵. مثلث ADE قائم‌الزاویه در رأس D و DF میانه وارد بر وتر است، زیرا:

$$\hat{A}DB = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{D}_3 = 90^\circ \quad (1)$$

$$\hat{C}DF = 90^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{D}_1 = 90^\circ \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{D}_2$$

از طرفی $\hat{D}_1 = \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است، پس $\hat{D}_3 = \hat{A}_2$ و از آن جا $\hat{D}_2 = \hat{E}_1$ ، در نتیجه $DF = AF = FE$ است، پس نقطه F وسط پاره خط AE می‌باشد.



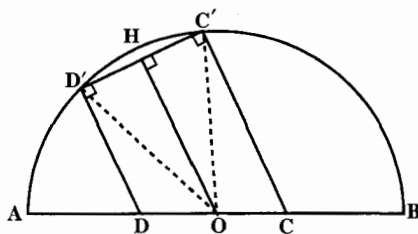
۹.۱. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۹.۱. خطها موازی اند

۳۶. دو مثلث قائم الزاویه OMG و NOH باهم برابرند، پس شعاعهای دایره‌های محاطی درونی این دو مثلث نیز با هم برابرند، یعنی نقطه‌های I و I' از AB به یک فاصله‌اند.

۲.۹.۱. خطها برهم عمودند

۳۷. از نقطه O خطی به موازات CC' یا DD' رسم می‌کنیم تا $D'C'$ را در نقطه H قطع کند. چون $OD' = OC' = R$ است، پس OH روی عمود منصف $D'C'$ است، یعنی $\hat{H} = 90^\circ$ ، پس $\hat{D}' = 90^\circ$ یعنی $D'C'$ بر DD' یا CC' عمود است.



۳۸. نقطه‌های E_1 و F_1 را قرینه نقطه‌های E و F نسبت به AB بگیرید.

۱۰.۱. شکل‌های ایجاد شده

$$\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$$

۳۹. داریم:

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AF}}{2} = \frac{18^\circ - \widehat{AC}}{2} = 9^\circ - \frac{\widehat{AC}}{2} \quad (1)$$

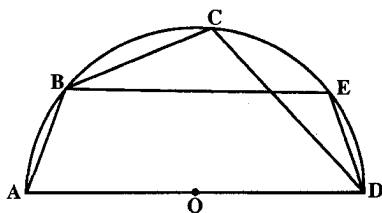
$$\hat{E} = \frac{\widehat{BF} + \widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{BF} + \widehat{BD}}{2} = \frac{18^\circ - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow \hat{E} = 9^\circ - \frac{\widehat{AC}}{2} \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \hat{C} = \hat{E}$$

۱۱. ۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۴۰. چون $\widehat{EB} = 30^\circ$ است، پس نزدیکترین وتر به مرکز دایره DE و دورترین وتر EB است.

۴۱. چهارضلعی که ضلع به طول ۱ آن، موازی قطر نیم‌دایره باشد، در شکل چهارضلعی ABED جواب است. واضح است مسأله وقتی جواب دارد که ۱ کوچکتر از قطر دایره باشد.



۱۲. ۱. مسأله‌های ترکیبی

۴۲. ۱. چون $AC = CM$ و $BD = MD$ است، پس: $AC + DB = CM + MD = CD$.

۲. تمام زاویه‌های چهارضلعی حاصل قائمه‌اند.

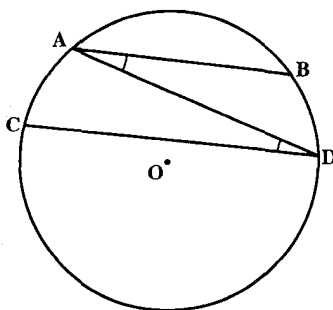
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲. یک دایره

۱. ۲. تعریف و قضیه

۴۳. در دایره (C) اگر $AB \parallel CD$ باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم، $\widehat{BD} = \widehat{AC}$ است. از A به D

وصل می‌کنیم. داریم: $\widehat{BAD} = \widehat{ADC}$ و با توجه به این که $\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2}$ و

$$\widehat{ADC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \text{ است. پس: } \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{AC}$$



۴۴. وسط قوس BC از دایره به مرکز O را M می‌نامیم و

خط Mx را مماس بر دایره در نقطه M رسم می‌کنیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم، $Mx \parallel CD$ است. از O به M

وصل می‌کنیم. می‌دانیم که OM بر Mx و BC عمود

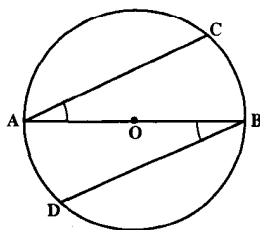
است، پس $BC \parallel Mx$ است.

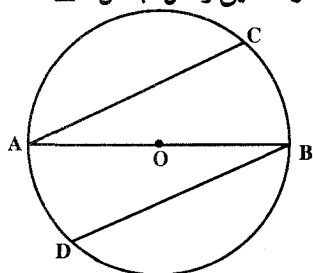
نکته. این قضیه حالت ویژه‌ای از قضیه قبلی است.

۴۵. قطر AB از دایره به مرکز O را در نظر می‌گیریم. اگر AC

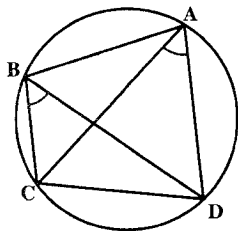
و BD دو وتر متوازی از دایره باشند، داریم:

$\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$ و از آن جا $\widehat{CB} = \widehat{AD}$ ، پس: $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ و در نتیجه $AC = BD$ است.



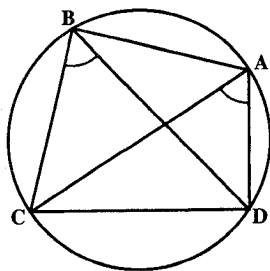


۴۶. اگر AC و BD دو وتر متساوی باشند که بر دو نقطه A و B ، دو انتهای قطر AB از دایره O گذشته باشند، $\widehat{AD} = \widehat{CB}$ خواهد بود و از آن جا $\widehat{CAB} = \widehat{ABD}$ پس $AC \parallel BD$ است.

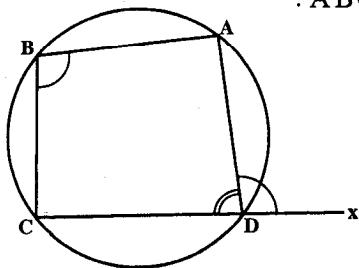


۴۷. در چهارضلعی محاطی $ABCD$ قطرهای AC و BD را رسم می کنیم. زاویه های روبه رو به هر ضلع، به عنوان مثال زاویه های روبه رو به ضلع CD باهم برابرند، زیرا زاویه های محاطی روبه رو به کمان $\widehat{CD}$ می باشند.

۴۸. اگر در چهارضلعی $ABCD$ ، $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ باشد، این چهارضلعی محاطی است، زیرا کمان درخور زاویه $\widehat{CAD}$ از نقطه B نیز می گذرد.



۴۹. در چهارضلعی محاطی $ABCD$ ، امتداد ضلع CD را Dx می نامیم. داریم: $\widehat{ADx} = \widehat{ABC}$ ، زیرا هر دو زاویه مکمل زاویه $\widehat{ADC}$ می باشند. بعکس اگر $\widehat{ABC} = \widehat{ADx}$ باشد، چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، زیرا خواهیم داشت: $\widehat{ABC} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

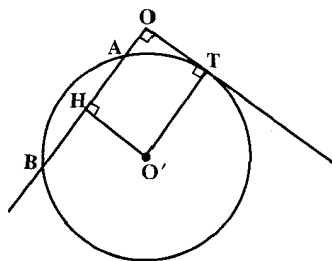


۲.۲. شعاع

۵۰. محیط دایره را به ۱۰ بخش برابر تقسیم می کنیم و شش نقطه تقسیم پشت سرهم را، A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 و A_6 می نامیم. در این صورت، خط راست A_2A_5 موازی با قطر A_1A_6 و خط راست A_3A_4 و همچنین، خط راست A_3A_6 موازی با خط راست A_2A_5 است. محل برخورد خط راست A_2A_5 را با خط راست A_3A_6 ، با حرف P نشان می دهیم. چهارضلعی $PA_3A_4A_5$ ، متوازی الاضلاع است. بنابراین باید ثابت کنیم، طول پاره خط راست A_2P ، برابر است با طول شعاع دایره. ولی، چون چهارضلعی A_2OA_6P هم متوازی الاضلاع است (O ، مرکز دایره است)، پس $|A_2P| = |OA_6|$ و حکم ثابت است.

۵۱. اگر نقطه تماس دایره با ضلع دیگر زاویه قائمه را T و مرکز دایره را O' و وسط پاره خط AB را H بنامیم، چهارضلعی $OTO'H$ مستطیل است و داریم:

$$R = O'T = OH = \frac{OA + OB}{2} = \frac{a + b}{2}$$

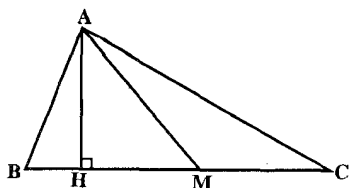


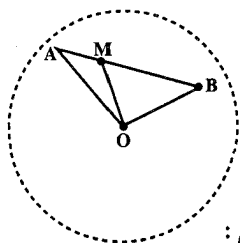
۳.۲. نقطه و دایره

۲.۳.۱. نقطه درون دایره

۵۲. می دانیم در مثلث ABC ، اگر M نقطه دلخواهی از ضلع BC باشد $AM \leq \max\{AB, AC\}$ (براساس قضیه های عمود و مایل).

حال اگر A و B نقطه دلخواهی از نقطه های درونی دایره باشند، بر اساس مطلب بالا



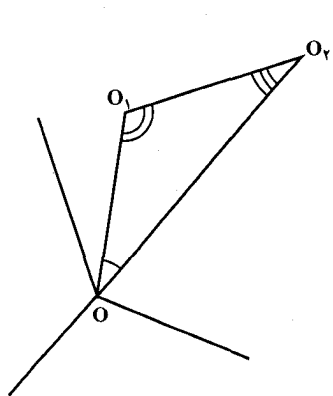


پس : $OM \leq \text{Max}\{OA, OB\}$

$$\text{Max}\{OA, OB\} < R \Rightarrow OM < R$$

همه نقطه‌های پاره خط AB درون دایره است $\Rightarrow M$ یک نقطه درونی دایره است $\Rightarrow$ پس دایره مجموعه‌ای محدب است.

۵۳. مربعهای به ضلع واحد را در نظر می‌گیریم که مرکزهای آنها روی همه گرهایی از شبکه باشند که در درون دایره به شعاع 10° قرار گرفته‌اند (ضلعهای این مربعها را موازی خطهای راست شبکه می‌گیریم). چون طول قطر هریک از این مربعها، برابر است با $2 < \sqrt{2}$ ، بنابراین، همه این مربعها سطح دایره به شعاع 9° و هم مرکز با دایره داده شده را می‌پوشانند. در نتیجه، مجموع مساحتهای آنها (که از نظر عددی با تعداد گرههای شبکه برابر است)، از 81π (مساحت دایره به شعاع 9°) بیشتر است و در ضمن $81\pi > 251$. نکته. می‌توان مسأله‌ای کلی‌تر را تنظیم کرد: تعداد جوابهای x و y را در مجموعه عددهای درست، برای نامعادله $x^2 + y^2 < n$ ارزیابی کنید (در مسأله ما $n=100$). از حل مسأله، می‌توان نتیجه گرفت که این تعداد، از $\pi(\sqrt{n}-1)^2$ کمتر نیست.



۵۴. برخلاف حکم مسأله، فرض می‌کنیم هیچ کدام از نقطه‌های $O_1, \dots, O_7$ که به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دور مرکز O از دایره مفروض قرار گرفته‌اند، بر O واقع نباشد. چون مجموع زاویه‌های $O_1O_2O_3, O_2O_3O_4, \dots, O_7O_1O_2$ برابر با 360° درجه است، بنابراین، دست کم یکی از آنها، از 60° درجه کوچکتر است. مثلاً فرض کنید، زاویه $O_1O_2O_3$ از 60° درجه کمتر باشد؛ از دو زاویه باقی‌مانده در مثلث $O_1O_2O_3$ ،

زاویه $O_1O_2O_3$ را بزرگتر می‌گیریم (اگر زاویه $O_1O_2O_3$ برابر صفر باشد، به معنای آن است که فاصله O_1O_2 از واحد کوچکتر است). در این صورت داریم:

$$\angle O_1O_2O_3 > 60^\circ > \angle O_1O_2O_4$$

که از آن جا نتیجه می شود: $O_1O_2 < O_2O \leq 1$ ، که با فرض مسأله متناقض است.

۲.۳.۲. نقطه روی دایره

۵۵. همه نقطه های محیط دایره را به زوج نقطه هایی تقسیم می کنیم به نحوی که هر زوج، دو سر یک قطر دایره را تشکیل دهند. در هر زوج یکی از نقطه ها را (به دلخواه) در مجموعه اول و نقطه دیگر را در مجموعه دوم، قرار می دهیم. از آن جا، که وتر هر مثلث قائم الزاویه محاط در دایره، قطری از این دایره است، بنابراین، رأسهای زاویه های حاده این مثلث، متعلق به دو مجموعه مختلف خواهند بود.

۵۶. گزینه (ب) درست است، زیرا مکان هندسی نقطه هایی که از نقطه P به فاصله ۳ سانتیمتر واقعند، دایره ای به مرکز P و به شعاع ۳ سانتیمتر است. این دایره، دایره (C) را حداکثر در دو نقطه می تواند قطع کند.

۵۷. A ، B و C را، سه نقطه متوالی در ساحل دریاچه می گیریم. از شرط مسأله معلوم می شود که، تنها وقتی A و B به هم مربوطند که B و C به هم مربوط نباشند. بنابراین، همه نقطه ها، به زوج نقطه های مجاور تقسیم می شوند که با کشتی به هم مربوطند. در ضمن هر دو تا از این زوج نقطه ها هم با یکدیگر ارتباط دارند. یعنی یکی از نقطه های زوج اول، با یکی از نقطه های زوج دوم مربوط است.

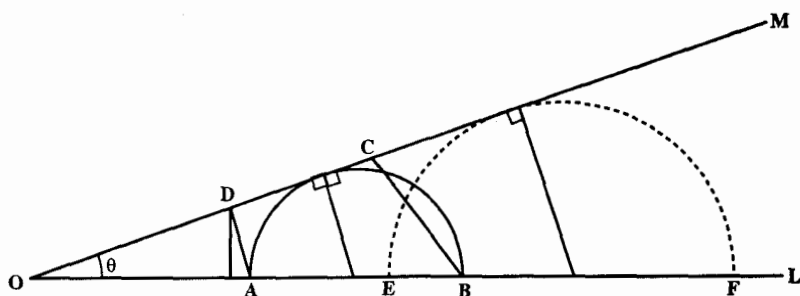
۵۸. با روش استقرای ریاضی روی n . فرض کنید، همه نقطه ها به جز یکی (نقطه X)، روی کمان $\widehat{AB}$ باشند که از 120° درجه کمتر است (A و B ، دو نقطه از نقطه های مفروضند). اگر X روی کمان $\widehat{AB}$ باشد، حکم مسأله درست است. اگر X روی کمان $\widehat{AB}$ نباشد، آن وقت یکی از دو کمان $\widehat{XA}$ یا $\widehat{XB}$ شامل کمان $\widehat{AB}$ می شود و اندازه بزرگتر از 120° درجه پیدا می کند.

۵۹. فرض می کنیم، هر نقطه از صفحه با یکی از n رنگ متفاوت رنگ شده باشد، در این صورت ممکن است که بر هر زیر مجموعه از نقطه ها، $k \leq n$ رنگ ظاهر شود و روی هم رفته:

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n - 1$$

ترکیب رنگی متفاوت موجود است که می توانند بر یک مجموعه نقطه ظاهر شوند. اکنون مجموعه جميع دایره های متحدالمرکز به مرکز O ، که شعاعهایشان کمتر از ۱ است، را در نظر می گیریم. در میان هر 2^n عضو این دسته دایره ها، حداقل دو دایره، که آنها را R و S می نامیم، موجودند که حامل مجموعه یکسانی از رنگها می باشد. آنها را طوری نامگذاری می کنیم که شعاعهای r و s شان در: $0 < r < s < 1$ صدق کنند. ادعا می کنیم که نقطه Y بر R چنان موجود است که دایره $C(Y)$ ، که شعاعش: $r + \frac{a(Y)}{r}$ است بر S

منطبق است؛ و به عبارت دیگر چنان که: $a(Y) = r(s-r)$ یا $r + \frac{a(Y)}{r} = s$ باشد. واضح است که: $0 < r(s-r) < 1$ می باشد، و چون نقطه X در امتداد R در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت (با شروع از خط OA) حرکت کند، اندازه زاویه AOX هر نقطه در فاصله: $(0, 1)$ را می پوشاند. چون این زاویه اندازه $r(s-r)$ داشته باشد، X موقع مطلوب Y واقع بر R را خواهد داشت، بنابراین: $C(Y) = S$ است. از این گذشته رنگ Y جایی بر دایره S ظاهر می شود.



۶۰. به عنوان نمونه، حشره هرگز روی نقطه ای که مجاور نقطه آغاز حرکت او، در جهت حرکت عقربه های ساعت قرار نمی گیرد.

۶۱. دو نقطه دو سر قطر دایره را در نظر بگیرید و از این قضیه استفاده کنید که، میانه هر مثلث از نصف مجموع دو ضلع دو طرف میانه، کوچکتر است.

۶۲. دو نقطه «وابسته» نامیده می شود، اگر دقیقاً n نقطه از F روی یکی از دو کمان منتهی به این دو نقطه وجود داشته باشند. ما نیاز به این داریم که کمترین مقدار k را با این خاصیت که هر k نقطه از E شامل حداقل یک زوج از نقطه های وابسته باشند را تعیین کنیم، با وصل هر زوج از نقطه های وابسته یک گراف G با درجه ۲ در هر رأس به دست می آید. G از دورهای مجزا تشکیل شده است. دو حالت در نظر می گیریم:

الف. اگر $\frac{2n-1}{3}$ ، آن گاه $(2n-1, 3) = (2n-1, n+1) = G$ ، و خود G یک دور است.

ب. اگر $\frac{2n-1}{3}$ ، آن گاه، $(2n-1, n+1) = 3$ و دور در G وجود دارد، هر کدام شامل $\frac{2n-1}{3}$ رأس می باشد.

در حالت الف، آشکارا کمترین مقدار k برابر است با: $n = \left\lceil \frac{2n-1}{2} \right\rceil + 1$.

در حالت ب، کمترین مقدار k برابر است با $n-1$ با $3 - \frac{3}{2} + 1 = n-1$ $3 \left[\frac{2n-1}{3} \right] + 1 = 3 - \frac{3}{2} + 1 = n-1$

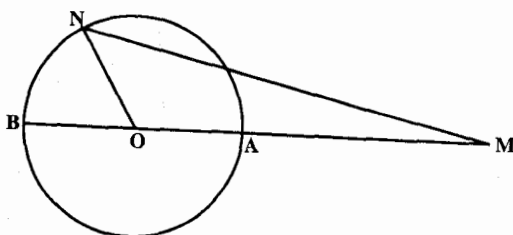
به طور خلاصه، کمترین مقدار k برابر است با:

$$\begin{cases} n, 3 \nmid 2n-1 & \text{اگر} \\ n-1, 3 \nmid 2n-1 & \text{اگر} \end{cases}$$

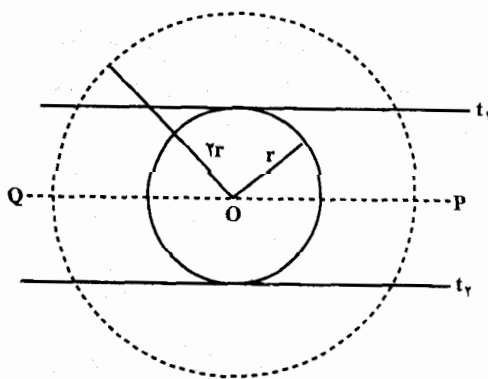
۳.۳.۲. نقطه برون دایره

۶۳. نقطه M را در امتداد قطر AB اختیار می کنیم. اگر N نقطه ای دلخواه از محیط دایره باشد، از N به M و O وصل می کنیم. در مثلث MON داریم:

$$OM - ON < NM < OM + ON \Rightarrow OM - OA < NM < OM + OB \\ \Rightarrow MA < MN < MB$$



به همین ترتیب اگر نقطه M را روی قطر AB و بین A و O یا بین O و B اختیار کنیم، ثابت می شود که: $MA < MN < MB$.



۶۴. فرض کنید O مرکز، r شعاع و t_1 و t_2 دو مماس موازی بر دایره مفروض باشند (شکل). مکان هندسی نقطه های هم فاصله از t_1 و t_2 خط QOP است که موازی آنهاست و در وسط آنها قرار دارد (و بنابراین از O می گذرد). P و Q نقطه های برخورد این

مکان با دایره‌های به مرکز O و به شعاع $2r$ (در شکل به صورت نقطه چین) به همراه O ، مرکز دایره، تنها سه نقطه‌ای هستند که از دایره و از دو خط مماس موازی t_1 و t_2 به یک فاصله‌اند. تعداد این نقطه‌ها ۳ است.

۲. ۳. ۴. نقطه های همخط

۶۶. اگر انتهای قطر گذرنده از B را E بنامیم، $\widehat{B\hat{O}D} + \widehat{D\hat{O}E} = 180^\circ$ و $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{DE}$ است، پس $\widehat{A\hat{O}B} = \widehat{D\hat{O}E}$ و از آنجا $\widehat{B\hat{O}D} + \widehat{A\hat{O}B} = 180^\circ$ یا $\widehat{A\hat{O}D} = 180^\circ$ ، یعنی A، O و D بر یک خط راست قرار دارند.

۶۷. از نقطه P به نقطه M وصل کرده، ثابت کنید: $\hat{BPM} = \hat{DPK}$.

۶۸. زاویه‌های $\hat{EBA}$ و $\hat{ABD}$ قائمه‌اند.

۲.۳.۵. تعداد دایره‌های گذرنده بر نقطه‌ها

۶۹. گزینه (ج) نادرست است.

۷۰. نقطه‌های A و B را به نقطه O مرکز دایره (K) وصل

می‌کنیم. اگر O' نقطه‌ای دلخواه از پاره خط OA (یا

(OB) باشد، دایره به مرکز O' و به شعاع $O'A$ (یا

(O'B) در داخل دایره (K) واقع می شود. عمود منصف

پاره خط AB را رسم می کنیم تا پاره خط OA یا OB

را در نقطه O'' قطع کند. دایره به مرکز O'' و به شعاع

$O''A = O''B$ در داخل دایره (K) قرار دارد، بعلاوه تمام نقطه‌های مجاور به نقطه O''

که روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند نیز مرکز دایره‌هایی هستند که از نقطه‌های

A و B می‌گذرند و در داخل دایرهٔ (K) واقعند. پس بی‌شمار دایره وجود دارد که از

نقطه‌های A و B بگذرند و در درون دایره (K) باشند.

۷۱. خط راستی در نظر می‌گیریم، که همه نقطه‌ها، نسبت به آن، در یک نیم‌صفحه قرار گیرند؛

سپس، این خط راست را به موازات خود، آن قدر جابجا می‌کنیم تا از اولین نقطه A_1

بگذرد. بعد، همین خط راست را، دور نقطه A_1 ، آن قدر دوران می‌دهیم، تا برای

نخستین بار، بر نقطه دیگر A_2 بگذرد. در این صورت، همه بقیه نقطه‌ها، در یک نیمصفحه،

نسبت به خط راست A_1A_2 واقع می‌شوند. این نقطه‌ها را، به صورت $A_3, \dots, A_{n+3}$,

طوری شماره گذاری می کنیم که، برای آنها، داشته باشیم :

$$A_1 A_i A_2 \leq A_1 A_{i+1} A_2, (i = 3, \dots, 2n+2)$$

در ضمن، برابری دو زاویه $A_1 A_i A_2$ و $A_1 A_{i+1} A_2$ ، برای هیچ مقداری از i ، ممکن نیست. (زیرا، نقطه های A_1, A_i, A_{i+1}, A_2 ، بر محیط یک دایره واقع نیستند).

بنابراین، نابرابری $A_1 \hat{A}_{n+3} A_2 < A_1 \hat{A}_i A_2$ درست برای n نقطه $A_{n+2}, \dots, A_{2n+3}$ برقرار است و همین نقطه ها (و تنها همین نقطه ها) هستند که در درون دایره ای قرار گرفته اند که از A_1, A_{n+3}, A_2 می گذرد.

۴.۲. کمان

۴.۲.۱. اندازه کمان

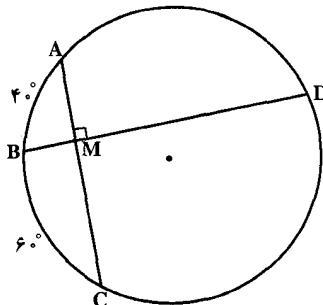
۷۲. با توجه به این که $\widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CA} = 360^\circ$ است، اندازه کمان $\widehat{AC}$ برابر 149° است.

۷۳. $\widehat{BQ} = 55^\circ$ و $\widehat{AD} = 7^\circ$.

۷۴. $\widehat{CD} = 14^\circ$ و $\widehat{AD} = 12^\circ$.

نکته. دو کمان داده شده نمی توانند دو کمان روبه روی هم باشند، زیرا $\frac{40^\circ + 60^\circ}{2} = 50^\circ$

است، حال آن که $\widehat{AMD} = 9^\circ$ می باشد. پس این دو کمان، دو کمان مجاور هم می باشند.



پ. $y = 80^\circ$

ب. $y = 40^\circ$

۷۵. الف. $y = 130^\circ$

ج. $x = 95^\circ$ و $y = 45^\circ$

ث. $y = 94^\circ$

ت. $y = 120^\circ$

ج. $x = 118^\circ$ و $y = 242^\circ$ ح. $x = 190^\circ$ و $y = 7^\circ$ خ. $x = 150^\circ$ و $y = 40^\circ$

۲.۴.۲. رابطه بین کمانها

۷۶. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases} \widehat{CP} = \widehat{CA} - \widehat{AP} \\ \widehat{CP} = \widehat{CB} + \widehat{PB} \end{cases} \Rightarrow 2\widehat{CP} = \widehat{CA} + \widehat{CB} \Rightarrow \widehat{CP} = \frac{\widehat{CA} + \widehat{CB}}{2}$$

اگر نقطه C' بین نقطه های A و B اختیار شود، رابطه بالا به صورت $\widehat{C'P} = \frac{|\widehat{C'A} - \widehat{C'B}|}{2}$

درمی آید.

۷۷. راه اول. داریم:

$$\widehat{ACI} = \widehat{NOI} \Rightarrow \frac{\widehat{AI}}{2} = \widehat{NI} \Rightarrow \widehat{AI} = 2\widehat{NI} \Rightarrow \widehat{AN} = \widehat{NI}$$

راه دوم. NO را امتداد دهید تا دایره را در N' قطع کند، سپس از ویژگی و ترهای موازی و زاویه مرکزی استفاده کنید.

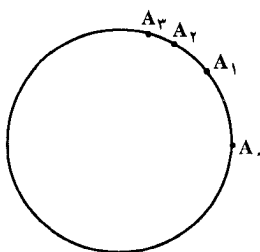
۲.۴.۳. تعداد کمانها

۷۸. به ازای $n=10$ یا $n=11$.

۷۹. برای هر k که از ۱۰۰ کوچکتر باشد، و در ضمن هر عدد $k+1$ بر ۸ بخش پذیر نباشد.

۸۰. الف. اگر دو نقطه A_i و A_j به فرض $j > i$ بر هم منطبق باشند، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \dots + \frac{1}{j} = 2k\pi$$



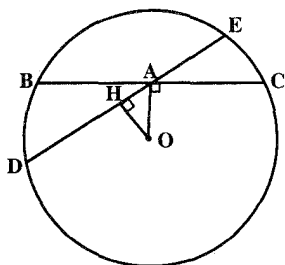
طرف اول گویا و طرف دوم گنگ است، پس تساوی نمی تواند برقرار باشد.

ب. چون هیچ دو نقطه ای بر هم منطبق نیستند و تعدادشان نامتناهی است. اقلأ در یک کمان یک میلیمتری باید تعدادشان نامتناهی باشد، زیرا تعداد فاصله های یک میلیمتری که می توان روی این دایره جدا کرد، متناهی است.

۲.۵.۵. وتر

۲.۵.۱. اندازه وتر

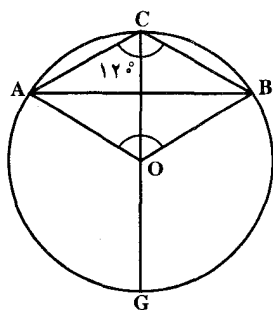
۸۱. وتر BC را که در نقطه A بر OA عمود است و وتر DE را که از نقطه A می گذرد ولی



عمود بر OA نیست، در نظر می گیریم و از نقطه O عمود OH را بر وتر DE فرود می آوریم. در مثلث قائم الزاویه AOH وتر OA از هر ضلع مثلث و از جمله از OH بزرگتر است. بنابراین $BC < DE$ می باشد. پس بین وترهایی از دایره O که از نقطه A می گذرند، وتر BC که در نقطه A بر OA عمود است، کمترین طول را دارد. به عبارت دیگر وتر به طول مینیممی که از یک نقطه در یک دایره می توان رسم کرد وتری است که بر قطر گذرنده آن نقطه عمود است. ۸۲. وتر AB را باید عمود بر خط راست OX رسم کرد.

۲.۵.۲. برابری وترها

۸۳. داریم: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{ADE} = \hat{A}_1$ ، پس $\hat{ADE} = \hat{A}_2$. از آن جا $\widehat{AE} = \widehat{DC}$ ، در نتیجه $\widehat{AC} = \widehat{DE}$ است، پس $AC = DE$ می باشد.

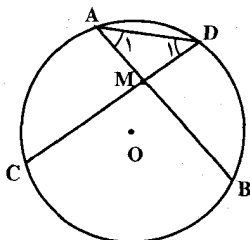


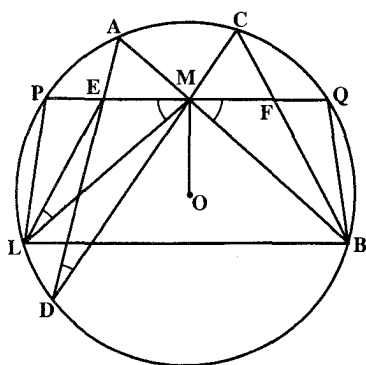
۸۴. این دو وتر از مرکز دایره به یک فاصله اند.

۸۵. اگر $\hat{ACB} = 12^\circ$ باشد، پاره خط AB وتر نظیر کمان 12° است، زیرا $\hat{AGB} = 24^\circ$ خواهد بود و در این صورت AB وتر زاویه مرکزی $\hat{AOB} = 12^\circ$ نیز هست.

۲.۵.۳. برابری قطعه های وترها

۸۶. چون $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ است، پس $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ ، یعنی مثلث MAD متساوی الساقین است، پس $MA = MD$ و از آن جا $MC = MB$ است.





۸۷. راه حلی که در این جلد از دایرةالمعارف برای قضیة پروانه ارائه می شود، توسط ا. ایلبرگ (Arthur Eilberg) در SSM (School Sci, and Math) ژانویه سال ۱۹۵۵ ارائه گردیده است. در جلدهای دیگر، راه حل های دیگری از قضیة پروانه براساس موضوع هر جلد ارائه خواهد شد و اینک راه حل: از نقطه B خطی موازی وتر PQ رسم می کنیم تا دایره را در نقطه L قطع کند. از L به M، E و D و

وصل می کنیم. مثلث MLB متساوی الساقین و OM عمود منصف وتر PQ است و $PL = QB$ (۱) می باشد. دو زاویه MED و MLD با هم برابرند؛ زیرا:

$$\hat{MED} = \frac{\widehat{QB} + \widehat{BD} + \widehat{AP}}{2} \quad (2)$$

$$\hat{MLD} = \hat{MLB} + \hat{BLD} = \hat{MBL} + \hat{BLD} = \frac{\widehat{AP} + \widehat{PL} + \widehat{BD}}{2} \quad (3)$$

$$(1) \text{ و } (2) \text{ و } (3) \Rightarrow \hat{MED} = \hat{MLD}$$

در نتیجه چهارضلعی MELD محاطی و $\hat{MLE} = \hat{MDE} = \hat{MBF}$ است. لذا دو مثلث MLE و MBF با هم برابرند، زیرا: $MB = ML$ و $\hat{MLE} = \hat{MBF}$ و $\hat{FMB} = \hat{EML}$. بنابراین $ME = MF$ است.

لذت ما از حل مسأله پروانه مدیون ریاضیدانان نامداری چون شاسلس Chasles، کارنو Carnot، بونسله Poncelet، ژرگون Gergonne، ون استادت Von Staudt، مونتر Monge و دیگران که در قرن نوزدهم هندسه تصویری را توسعه داده اند و همچنین دزارگ، باپوس و اقلیدس است.

۸۸. اثبات این قضیه راه های مختلفی دارد که یک راه حل آن به صورت زیر است:

فرض می کنیم: $S_1 = S_{MAE}$ ، $S_2 = S_{MCF}$ ، $S_3 = S_{MED}$ ، $S_4 = S_{MBF}$ با توجه به این که $\hat{D} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{A}$ است، داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{MA \cdot EA}{MC \cdot CF} \quad (1), \quad \frac{S_3}{S_4} = \frac{DM \cdot DE}{BM \cdot BF} \quad (2),$$

$$\frac{S_1}{S_4} = \frac{MA \cdot ME}{MB \cdot MF} \quad (3), \quad \frac{S_3}{S_2} = \frac{MD \cdot ME}{MF \cdot MC} \quad (4)$$

اما (۱)، (۲)، (۳)، (۴): پس:

$$\frac{MA.EA.DM.DE}{MC.CF.BM.BF} = \frac{MA.ME.MD.ME}{MB.MF.MF.MC}$$

و یا :

$$\begin{aligned} \frac{EA.ED}{FC.FB} &= \frac{ME^2}{MF^2} \Rightarrow \frac{EP.EQ}{FP.FQ} = \frac{ME^2}{MF^2} \\ \Rightarrow \frac{(p-m)(q+m)}{(p+n)(q-n)} &= \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow pq(m-n) = mn(p-q) \Rightarrow \frac{pq}{mn} = \frac{p-q}{m-n} \\ \Rightarrow \frac{m-n}{mn} &= \frac{p-q}{pq} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \end{aligned}$$

۸۹. ثابت کنید : $\hat{NCD} = \hat{NDC}$.

۹۰. مثلث AMN متساوی الاضلاع و مثلثهای AMD و ANE متساوی الساقین هستند.

۲.۵.۴. نابرابری وترها

۹۱. زاویه محاطی ACB را در نظر گرفته، قطر CG را رسم می کنیم. داریم :

$$\hat{AOG} = \hat{GOB} = \hat{ACB} \Rightarrow AG < AB$$

و در مثلث متساوی الساقین AGB،

$$AG < AB, \quad AG + GB > AB \quad \text{یا} \quad 2AG > AB \Rightarrow AG > \frac{AB}{2}$$

نکته. اگر اندازه زاویه محاطی ACB بیشتر از $\frac{4}{3}\pi$ زاویه قائمه باشد :

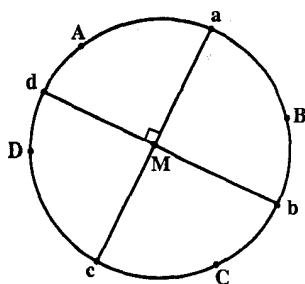
$AG > AB$ و $AG < 2AB$ ، هنگامی که زاویه مرکزی از 40° و $2'$ و 151° کمتر باشد.

اگر زاویه مرکزی این مقدار را داشته باشد، $AG = 2AB$.

اگر زاویه مرکزی از 40° و $2'$ و 151° بیشتر باشد، $AG > 2AB$.

و بالاخره برای زاویه مرکزی 180° ، اندازه وتر زاویه مرکزی برابر قطر دایره است و برای زاویه محاطی نظیر این مقدار تهی است.

۹۲. وتر AB بزرگتر است زیرا به مرکز دایره نزدیکتر است.



۲.۵.۵. ثابت کنید وترها برهم عمودند

۹۳. اگر نقطه برخورد ac و bd را M بنامیم، داریم :

$$\hat{aMb} = \frac{aB + Bb + cD + Dd}{2} \Rightarrow \hat{aMb} = \frac{\frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{DA}}{2}}{2}$$

$$= \frac{360^\circ}{2} = 90^\circ$$

پس ac و bd برهم عمودند.

۲. ۵. ۶. تعداد وترها

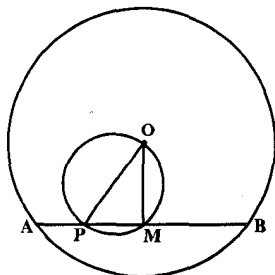
۹۴. گزینه (ب) درست است.

۹۵. ۲۵ پاره خط راست.

۲. ۵. ۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۹۶. (ه). اگر P نقطه مفروض، O مرکز دایره، AB یکی از وترهای گذرنده بر P و M وسط AB باشد، زاویه OMP قائمه است و در نتیجه M بر دایره C به قطر OP واقع است. برعکس اگر M یک نقطه دلخواه دایره C باشد، وتر دایره k که بر P و M می‌گذرد (در حالتی که P و M منطبق باشند، آن وتر بر دایره C مماس خواهد بود)، در M بر OM عمود است. بنابراین M وسط وتر و متعلق به مکان هندسی است.

۹۷. فرض می‌کنیم، هر دو پاره خط راست AB و CD از یک رنگ، متقاطع باشند. آنها را با پاره خطهای راست AC و BD از همان رنگ عوض می‌کنیم. در ضمن، تعداد نقطه‌های برخورد پاره خطهای راست آبی با پاره خطهای راست قرمز، تغییر نمی‌کند. این عمل را تا آن‌جا ادامه می‌دهیم که هیچ دو پاره خط راست هم‌رنگ، یکدیگر را قطع نکنند. اکنون کافی است توجه کنیم که، روی هر پاره خط راست قرمز، دست کم، یک نقطه برخورد با پاره خط راست آبی وجود دارد.



۹۸. فرض کنید P نقطه مفروض، و M نقطه وسط وتر AB از

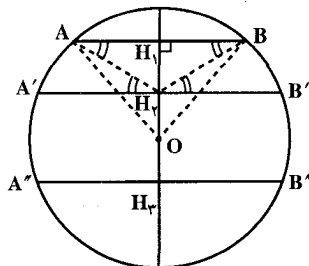
دایره مفروض (O) باشد؛ AB وترى از دایره است که از نقطه مفروض P می‌گذرد. پاره خط OP از نقطه M با زاویه قائمه دیده می‌شود؛ پس M روی دایره‌ای به قطر OP قرار دارد. از طرف دیگر، هر نقطه M واقع بر این

دایره در صورتی که به P وصل شود، وترى از دایره (O) را مشخص می‌سازد که OM در نقطه M بر آن عمود است، پس M نقطه وسط این وتر است و بنابراین به مکان هندسی

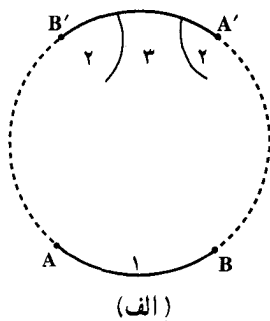
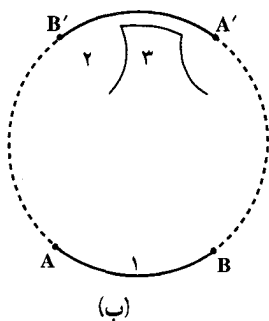
تعلق دارد و اگر نقطه P خارج از (O) باشد، هر نقطه M از مکان هندسی باید روی دایره ای به قطر OP قرار داشته باشد، ولی تمامی نقطه های این دایره متعلق به مکان هندسی نیستند. مکان هندسی بخشی از دایره (OP) است که درون دایره مفروض (O) قرار دارد. ۹۹. همه وترها در نقطه وسط خود بر این دایره مماسند.

۲. ۶. قطر

۱۰۰. زاویه محاطی BAC قائمه است، پس $\widehat{BC} = 180^\circ$ و در نتیجه قطر BC دایره است. ۱۰۲. فرض می کنیم، حکم درست نباشد. انتهای کمانها را با سیاه رنگ می کنیم. تمامی محیط دایره را، به کمانهای به طول واحد تقسیم و نقطه های تقسیم را با قرمز رنگ می کنیم. کمانی مثل $\widehat{AC}$ به طول ۲ را در نظر می گیریم که دو انتهای آن سیاه و B' وسط آن قرمز باشد. نقطه B ، انتهای دیگری که از B' می گذرد، سیاه است. فرض کنید، روی کمان $\widehat{AB}$ به طول $1-3k$ ، n_1 کمان به طول ۱، n_2 کمان به طول ۲ و n_3 کمان به طول ۳ وجود داشته باشد. روی کمان $\widehat{BC}$ ، n_1 کمان به طول ۳ وجود خواهد داشت (انتهای دیگر قطرهای که از انتهای کمانهای به طول واحد می گذرند، قرمزند). بنابراین $n_3 = k - n_1$ ، که با برابری $3k - 1 = n_1 + 2n_2 + 3n_3$ متناقض است. ۱۰۳. خطی که وسط یک وتر را به مرکز دایره وصل می کند، بر آن وتر عمود است.



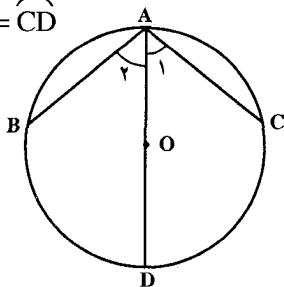
۱۰۴. انتهای منحنیهایی که مرز بخشها را مشخص می کنند، محیط دایره را به چند کمان تقسیم می کنند. یکی از آنها، برای مثال کمان $\widehat{AB}$ ، را در نظر می گیریم که به رنگ اول درآمده باشد. کمان روبه روی آن $\widehat{A'B'}$ و $A)$ و $A')$ و، همچنین B و B' ، دو سر یک قطرند، ممکن است شامل ۰، ۱ یا چند نقطه تقسیم باشد. اگر نقطه های تقسیم، بیش از دو تا باشند، نقشه (ب)، چیزی شبیه شکل (الف) درمی آید. در این صورت، می توانیم بخشهای دایره را آن طور که در شکل (ب) دیده می شود، تغییر دهیم که در نتیجه، تعداد نقطه های تقسیم کاهش می یابد. اگر روی کمان $\widehat{A'B'}$ ، نقطه تقسیمی وجود نداشته



باشد، آن وقت این کمان، به طور کامل، در درون کمان $\widehat{CD}$ قرار دارد که، در آن C و D، دو نقطه تقسیم هستند. در این صورت، A و B در درون کمان $\widehat{C'D'}$ قرار می گیرند و می توان همان عمل بالا را درباره آنها انجام داد. با کم کردن تعداد نقطه های تقسیم روی محیط دایره، می توان سرانجام به تقسیمی از بخشها رسید که، برای هر کمان $\widehat{AB}$ (هر یک از دو نقطه A و B، انتهای یکی از مرزهای بخشهاست)، روی کمان $\widehat{A'B'}$ ، درست انتهای یک منحنی مرزی وجود داشته باشد. از این جا، بسادگی نتیجه می شود که، تعداد کل انتهای منحنیها، عددی فرد است که ممکن نیست.

۱۰۶. اگر AB و AC دو وتر مساوی در دایره به مرکز O باشند، قطر AD از دایره را رسم می کنیم، داریم:

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}, \quad \widehat{AB} = \widehat{AC} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{CD} \\ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$$



۷.۲. زاویه

۷.۲.۱. زاویه مرکزی

۱۰۷. گزینه (ه) درست است.

۱۰۸. الف. $\hat{x} = 136^\circ$ ، ب. $\hat{y} = 111^\circ$.

۱۰۹. گزینه (ه) درست است. زیرا:

$$\hat{P} = 4^\circ \Rightarrow \hat{PAB} + \hat{PBA} = 18^\circ - 4^\circ = 14^\circ$$

$$\hat{TAS} = 18^\circ - \hat{PAB}, \hat{RBS} = 18^\circ - \hat{PBA}$$

$$\Rightarrow \hat{TAS} + \hat{RBS} = 36^\circ - 14^\circ = 22^\circ$$

چون OA و OB، بترتیب، نیمساز زاویه‌های TAS و RBS هستند؛

$$\hat{OAS} + \hat{OBS} = \frac{1}{2}(22^\circ) = 11^\circ \Rightarrow \hat{AOB} = 18^\circ - 11^\circ = 7^\circ$$

اندازه زاویه AOB بر حسب درجه، مستقل از وضعیت مماس ASB است.

۱۱۰. داریم:

$$AB + AC - BC = 2AP = 2AQ \quad \hat{BOC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} = C^{te}$$

۱۱۲. چهارضلعی ABDC دوزنقه قائم‌الزاویه و OD و OC نیمسازهای زاویه‌های D و C از این دوزنقه‌اند.

۲.۷.۲. زاویه محاطی

۱۱۳. این زاویه، محاطی روبه‌رو به قطر است.

۱۱۴. داریم:

$$\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 90^\circ, \hat{C} = 30^\circ$$

۱۱۵. مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویه $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ است.

$$\hat{AOB} = \hat{AMB} = 120^\circ \quad ۱۱۶$$

۱۱۷. گزینه (ب) درست است. به فرض $\widehat{AB} = x^\circ$ و $\widehat{AD} = y^\circ$ ، داریم:

$$3x + y = 360^\circ$$

$$\frac{1}{2}(x - y) = 40^\circ$$

دستگاه این دو معادله که نسبت به y حل شود، $y = 30^\circ$ به دست می‌آید، در نتیجه:

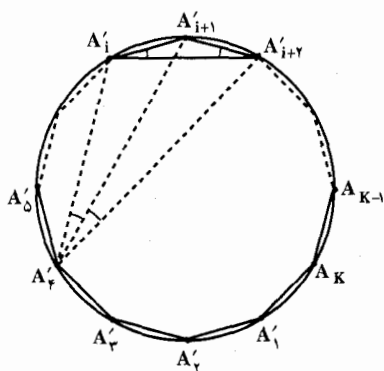
$$\hat{C} = \frac{1}{2}y = 15^\circ$$

۱۱۸. گزینه (الف) درست است.

$$۱۱۹. \text{الف. } x = 40^\circ, y = 95^\circ \quad \text{ب. } x = 50^\circ, y = 40^\circ$$

$$۱۲۰. \text{الف. } 25^\circ \quad \text{ب. } 39^\circ \quad \text{پ. } 50^\circ \quad \text{ت. } 30^\circ \quad \text{ث. } 40^\circ$$

$$\text{ج. } 76^\circ \quad \text{چ. } 45^\circ \quad \text{ح. } 95^\circ \quad \text{خ. } 75^\circ \quad \text{د. } 120^\circ$$



۱۲۱. ثابت می‌کنیم، حداکثر مقدار α ، برابر

$$\frac{180^\circ}{n} \text{ است. فرض کنید، وضعی از}$$

نقطه‌ها در صفحه، متناظر با مقدار α باشد. خط راستی را، برای مثال $A'_i A'_j$ ، طوری در نظر می‌گیریم که همه نقطه‌ها، نسبت به آن، در یک نیم‌صفحه واقع باشند و نقطه A'_k را به نحوی انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویه $A'_i A'_j A'_k$ ماکزیم

باشد (شکل). در این صورت همه نقطه‌های دیگر، در درون این زاویه قرار می‌گیرند و

$$\widehat{A'_i A'_j A'_k} \geq \alpha(n-2)$$

زیرا، هر یک از $(n-2)$ زاویه بین نیم‌خطهای راست مجاور $A'_i A'_j$ ($A'_i \neq A'_j$)، از α کمتر نیستند. سپس نقطه A'_k را انتخاب می‌کنیم که، برای آن، زاویه $A'_i A'_j A'_k$ ماکزیم باشد. در این صورت همه نقطه‌های

$$A_i \in \{A'_i, A'_j, A'_k\}$$

در داخل این زاویه‌اند و

$$\widehat{A'_i A'_j A'_k} \geq \alpha(n-2)$$

اگر $A'_k \neq A'_i$ و $A'_k \neq A'_j$ ، آن وقت، به همین ترتیب، نقطه A'_k را انتخاب می‌کنیم و غیره. چون تعداد نقطه‌ها برابر n است، بنابراین، یکی از نقطه‌های $A'_i, A'_j, A'_k, \dots, A'_n$ به ناچار، برای نخستین بار تکرار می‌شود. فرض کنید، این وضع، بعد از انتخاب نقطه A'_k اتفاق بیفتد، یعنی زاویه $A'_i A'_j A'_k$ ، برای نقطه‌ای مثل

$$A_j = A'_i \in \{A'_i, \dots, A'_{k-2}\}$$

به حداکثر خود می‌رسد. در این صورت اگر $i \neq 1$ ، آن وقت نقطه A'_i در درون زاویه $A'_i A'_j A'_k$ ، یعنی در درون چندضلعی محدب $A'_i A'_{i+1} \dots A'_{k-1} A'_k$ قرار می‌گیرد که نوع انتخاب آن را نقض می‌کند. در نتیجه $i = 1$ و k ضلعی محدب $A'_1 A'_2 \dots A'_k$ ، زاویه‌هایی به مجموع زیر دارد:

$$180^\circ(k-2) \geq k \cdot \alpha(n-2)$$

$$\alpha \leq \frac{180^\circ(k-2)}{(n-2)k} = \frac{180^\circ}{n-2} \left(1 - \frac{2}{k}\right) \leq \frac{180^\circ}{n-2} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{180^\circ}{n} \quad \text{از آن جا:}$$

در ضمن، علامت برابری، تنها وقتی برقرار است که $k = n$ و

$$A'_1 \hat{A}'_2 A'_3 = A'_2 \hat{A}'_3 A'_4 = \dots = A'_k \hat{A}'_1 A'_2 = \alpha(n-2)$$

و همه قطرهایی که از یک رأس دلخواه n ضلعی $A'_1 \dots A'_n$ رسم می‌شوند، این زاویه را به زاویه‌های برابر α تقسیم می‌کنند. چنین n ضلعی، تنها می‌تواند منتظم باشد، زیرا برای هر مقدار $l = 1, \dots, n$ داریم:

$$A'_1 \hat{A}'_{l+2} A'_{l+1} = A'_{l+2} \hat{A}'_l A'_{l-1} \Rightarrow A'_1 A'_{l+1} = A'_{l+1} A'_{l+2}$$

$A'_{n+1} = A'_1$ و $A'_{n+2} = A'_2$ به حساب آورده‌ایم (شکل). بنابراین، چندضلعی باید نه تنها زاویه‌هایی برابر، بلکه ضلعهای برابر هم داشته باشد.

سرانجام، رأسهای n ضلعی منتظم، در شرط $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$ صدق می‌کنند. این مطلب، وقتی روشن می‌شود که دایرة محیطی n ضلعی را رسم کنیم و به این نکته توجه کنیم که، زاویه بین قطرهای مجاور که از یک رأس رسم شوند، مقابل به زاویه $\frac{360^\circ}{n}$ یعنی

برابر $\frac{180^\circ}{n}$ می‌باشد.

۲.۷.۳. زاویه ظلی

۱۲۲. ضلعهای دو زاویه بر هم عمودند.

ب. $x = 70^\circ$

۱۲۳. الف. $x = 62^\circ$ ، $y = 28^\circ$

ت. $x = 46^\circ$ ، $y = 58^\circ$

ب. $x = 55^\circ$

۲.۷.۴. زاویه درونی (زاویه بین دو وتر)

۱۲۴. زاویه P رأس داخل دایره است، پس:

$$\hat{P} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{AC}}{2} \Rightarrow 7x + 11 = \frac{2x + x + 88}{2} \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \hat{P} = 53^\circ$$

۱۲۵. با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$\widehat{MR} = \widehat{MK} = 14^\circ, \widehat{MQ} = 26^\circ \Rightarrow \widehat{RK} = 8^\circ, \widehat{RQ} = 140^\circ - 26^\circ = 114^\circ$$

$$\hat{RPK} = \frac{\widehat{RK} + \widehat{MQ}}{2} = \frac{8^\circ + 26^\circ}{2} = 53^\circ$$

۱۲۶. الف. $x = 50^\circ$ ، y قابل محاسبه نیست، زیرا تنها مجموع دو کمان $\widehat{BC}$ و $\widehat{AD}$ را داریم.

ب. $x = 100^\circ$ ، $y = 95^\circ$

۵.۷.۲. زاویه برونی (زاویه بین امتداد دو وتر، دو مماس یا یک وتر و یک مماس)

۱۲۷. داریم: $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$ و $\angle APB = 120^\circ$.

ب. $x = y = 55^\circ$

الف. $y = 8^\circ$, $x = 6^\circ$

ت. 36°

پ. 20°

ب. 37°

الف. 30°

ح. 25°

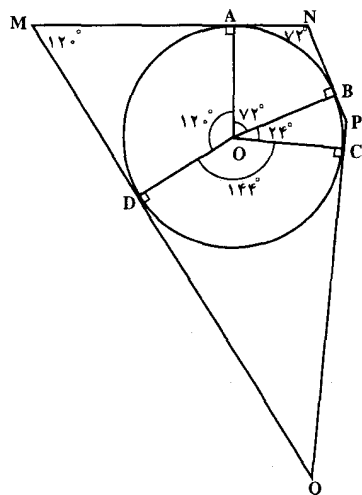
ج. 94°

ج. 130°

ث. 120°

۱۳۰. کمانهای ایجاد شده روی دایره 144° , 120° و 72° و زاویه های مورد نظر

36° , 60° , 108° و 156° می باشند.



۶.۷.۲. زاویه های مختلف

۱۳۱. داریم:

$\hat{B}_1 = 64^\circ$, $\hat{B}_2 = 116^\circ$, $\hat{D} = 45^\circ$, $\hat{C}_1 = 19^\circ$, $\hat{A} = 38^\circ$, $\hat{C}_2 = 161^\circ$

پ. 6°

ب. 35°

الف. 35°

ج. 9°

ث. 6°

ت. 120°

۱۳۳. داریم:

$\hat{1} = 7^\circ$, $\hat{2} = \hat{4} = \hat{8} = 35^\circ$, $\hat{3} = 11^\circ$, $\hat{5} = \hat{6} = 55^\circ$, $\hat{7} = 9^\circ$

پ. $x = 75^\circ$

ب. $x = 125^\circ$

الف. $x = y = 65^\circ$

ج. $x = 55^\circ$, $x = 9^\circ$

ث. $x = 8^\circ$, $x = 4^\circ$

ت. $x = 7^\circ$

ب. $x = 55^\circ$, $x = 19^\circ$

الف. $x = 4^\circ$, $x = 14^\circ$

ت. $x = 68^\circ$, $x = 34^\circ$

ب. $x = y = 43^\circ$

۲۹۰ □ دایرة المعارف هندسه / ج ۲

۱۳۶. داریم: $x = 7^\circ$ و $y = 7^\circ$.

۱۳۷. داریم: $x = 282^\circ$ و $y = 78^\circ$.

۱۳۸. داریم:

$$\hat{D} = \frac{\widehat{EF}}{2}, \hat{E} = \frac{\widehat{FD}}{2}, \hat{F} = \frac{\widehat{DE}}{2}$$

$$\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = \frac{\widehat{EF} + \widehat{FD} + \widehat{DE}}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

۱۳۹.

$$\widehat{DH} = 6^\circ, \widehat{FG} = \widehat{ED} = 96^\circ, \widehat{EF} = 18^\circ - (96^\circ + 6^\circ) = 24^\circ$$

$$\widehat{GH} = 18^\circ - 96^\circ = 84^\circ, \hat{BAC} = \frac{\widehat{DG} - \widehat{EF}}{2} = \frac{84^\circ + 6^\circ - 24^\circ}{2} = 6^\circ, \dots$$

۱۴۰.

$$\hat{A} = 65^\circ, \hat{B} = 95^\circ, \hat{C} = 115^\circ, \hat{D} = 58^\circ, \hat{E} = 3^\circ, \hat{F} = 2^\circ$$

۷.۷.۲. رابطه بین زاویه ها

۱.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه ها (برابریها)

۱۴۱. اگر از C به A وصل کنیم و نقطه برخورد PA و BC را D بنامیم، CD میانه و ارتفاع مثلث PAC است.

$$144. \hat{MOP} = \hat{ABC} \text{ و } \hat{NOP} = \hat{ACB}$$

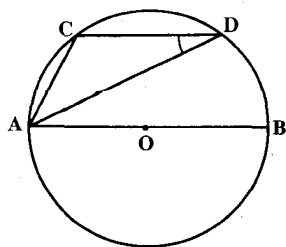
۱۴۵. اگر نقطه M روی یکی از دو کمان AA' یا BB' باشد، $\hat{AMB} = \hat{A'MB'}$ است و

اگر نقطه M روی یکی از کمانهای AB یا A'B' واقع باشد، $\hat{AMB} + \hat{A'MB'} = 180^\circ$ است.

۱۴۶. می دانیم که قوسهای محصور بین دو وتر متوازی در یک دایره برابرند. پس:

$$AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

$$\hat{ACD} - \hat{ADC} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BD} - \widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 9^\circ$$



۱۴۷. دو کمان $\widehat{BD}$ و $\widehat{CD}$ برابرند و $\widehat{AB} = 18^\circ$ است، پس :

$$\hat{C} - \hat{A} = \frac{\widehat{DBA} - (\widehat{DC} = \widehat{DB})}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 9^\circ$$

اگر H نقطه برخورد مماس بر دایره در نقطه D با AC باشد، با توجه به این که $\widehat{DAC} = \widehat{CDH}$ است. داریم :

$$\hat{H} = \hat{C} - \hat{D} = \hat{C} - \widehat{DAC} = 9^\circ$$

بنابراین : $\widehat{DHC} = 9^\circ$ یعنی DH ارتفاع است.

۱۴۸. ضلعهای دو زاویه BOC و DAE برهم عمودند.

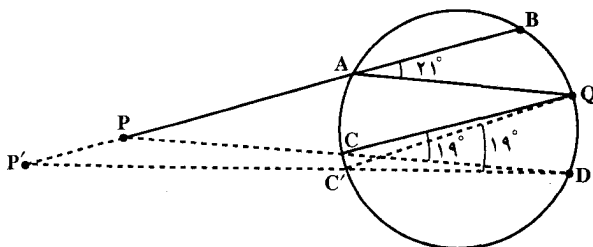
۱۴۹. ضلعهای دو زاویه برهم عمودند.

۱۵۰. (ج). داریم :

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC}), \quad \hat{Q} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$$

$$\hat{P} + \hat{Q} = \frac{1}{2}\widehat{BD} = \frac{1}{2}(42^\circ + 38^\circ) = 40^\circ$$

در این مسأله، مجموع اندازه‌های زاویه‌های P و Q مقدار ثابتی است، هرچند که اندازه هر کدام از آنها می‌تواند تغییر کند (شکل).



۱۵۱. ثابت کنید : $\widehat{AMO} = \widehat{OMB} = \widehat{BMC}$.

۱۵۴. گزینه (الف) درست است زیرا زاویه DOA، زاویه خارجی مثلث OAC است و

(۱) $x = \hat{A} + y$ است. از طرفی اگر شعاع OB را رسم کنیم، مثلثهای AOB و BOC

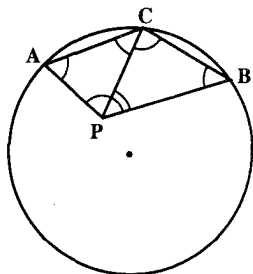
متساوی الساقین و OBA زاویه خارجی مثلث OBC است. بنابراین داریم :

(۲) $\hat{A} = \widehat{OBA} = 2y$. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $x = 3y$.

۲.۷.۷.۲. رابطه بین زاویه‌ها (نابرابریها)

۱۵۵. در دو مثلث APC و PBC ، $AC = CB$ و $PC = PC$

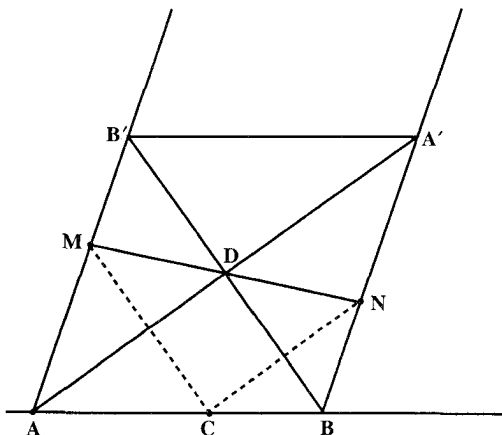
است. ثابت کنید: $\hat{PAC} + \hat{ACP} < \hat{PCB} + \hat{CBP}$.



۲.۷.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۵۶. نقطه برخورد AD و BD با دو خط متوازی را A' و B'

نامیده، از A' به B' وصل کنید و ثابت کنید که چهارضلعی $ABA'B'$ لوزی است. در این صورت دایره به قطر AB از نقطه D خواهد گذشت.



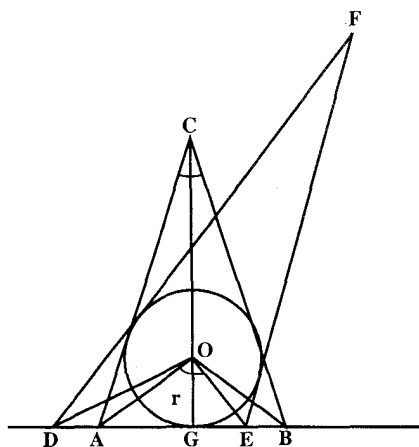
۱۵۷. دایره‌ای را رسم می‌کنیم که همه نقطه‌های برخورد خطهای راست را، در درون خود

داشته باشد. این خطهای راست، $4n$ کمان روی محیط دایره جدا می‌کنند؛ در ضمن، از دو کمان مجاور، هر دو کمان با هم متعلق به دو زاویه نیستند (دلیل آن را بگویید). بنابراین، تعداد زاویه‌ها نمی‌تواند از $2n$ بیشتر باشد و تنها وقتی برابر $2n$ است که، از هر دو کمان مجاور، یکی متعلق به زاویه باشد. ولی در این حالت، چون تعداد خطهای راست، عددی زوج است، دو کمان روبه‌رو، هر دو متعلق به زاویه‌ای می‌شوند که ممکن نیست.

۱۵۸. مثلث متساوی الساقین با قاعده ثابت و مماس بر دایره داده شده، جواب مسأله است.

مثلث متساوی الساقین ABC محاط بر دایره به شعاع r و مثلث مختلف الاضلاع DEF با قاعده $DE = AB$ و مماس بر دایره به شعاع r را در نظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم

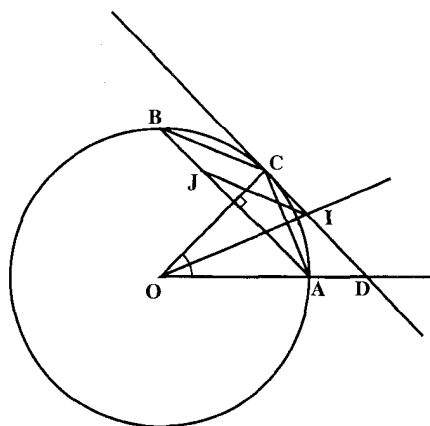
$$\hat{AOB} = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2} \quad \text{اگر} \quad \hat{ACB} > \hat{DFE}$$



و $\hat{D}OE = 90^\circ + \frac{\hat{F}}{2}$ ، بنابراین کافی

است ثابت کنیم $\hat{A}OB > \hat{D}OE$ است.
برای مثلث AOB، عمود OG حداکثر
نوک ارتفاع قطعه حاوی زاویه AOB
است، حال آن که برای قطعه حاوی زاویه
EOD، عمودی دلخواه است که از یک
نقطه دلخواه این کمان رسم شده است.
پس قطعه BOA کوچکتر از قطعه EOD
است؛ در نتیجه زاویه AOB بزرگتر از
زاویه DOE می باشد.

۲. ۸. یارہ خط



۲.۸.۱. اندازه یاره خط

۱۵۹. گزینہ (د) درست است.

۱۶۱. اگر نقطه برخورد OA با مماس CI را D

بنامیم و از A به C وصل کنیم، مثلث OCD قائم الزاویه متساوی الساقین است و دو مثلث AIJ و ACD با هم برابرند.

$$\therefore MN = PQ = \frac{R(\sqrt{3} + 1)}{2} \cdot 162$$

۲.۸.۲. رابطه بین یاره خطها

۲.۸.۲. ۱. رابطه بین یاره خطها (برابریها)

۱۶۳. مثلثهای A_2MN ، A_2A_3N و NA_3O متساوی الساقینند.

۱۶۴. اگر OM و ON تصویرهای OC و OD روی OA باشند:

۱. تصویر نقطه G ، مرکز دایره، روی OA را H بنامید. H وسط OA است و داریم

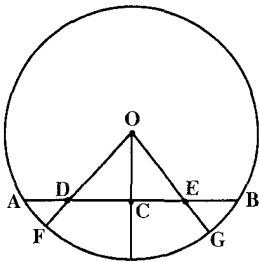
$OM = NA$ ، در نتیجه : $OM + ON = OA$.

۲. CM را ادامه دهید تا دایره را در L قطع کند و از L به D وصل کنید.

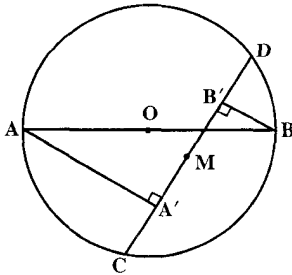
به دلیل برابری OM و AN، وتر LD موازی و مساوی MN است، از آن جا :

$$\widehat{OL} = \widehat{AD} = \widehat{DB} \Rightarrow \widehat{OB} = \widehat{LD} \Rightarrow OB = ED = MN$$

۱۶۵. فرض می کنیم $AB > AC$ و پای عمود را H می نامیم. روی امتداد پاره خط راست BA، نقطه C را طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم $AC = AC'$. بسادگی و با در نظر گرفتن زاویه ها روشن می شود که خط راست MA، نیمساز زاویه CAC' است. چون مثلث ACC' متساوی الساقین است، خط راست MA بر خط راست CC' عمود می شود و $|MC| = |MC'|$ یا $|MB| = |MC'|$. یعنی MH میانه مثلث MBC' است. نقطه H وسط پاره خط راست BC' است.

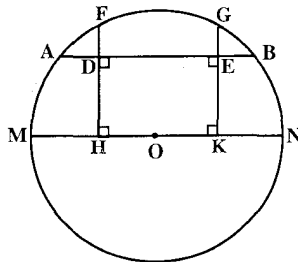


۱۶۶. وتر AB را در دایره به مرکز O در نظر می گیریم و دو نقطه D و E را به یک فاصله از نقطه C وسط OE و OD شعاعهای می کنیم. شاعهای OD و OE دایره را به ترتیب در F و G قطع می کنند. زیرا مثلث ODE متساوی الساقین و $OF = OG$ است.

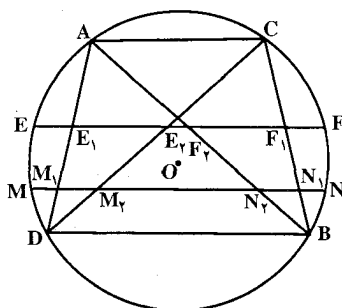


۱۶۷. قطر AB و وتر CD از دایره به مرکز O را در نظر می گیریم. تصویرهای دو سر قطر A و B روی وتر CD را A' و B' و وسط وتر CD را M می نامیم. می خواهیم ثابت کنیم که $MA' = MB'$ است.

۱۶۸. اگر از نقطه O، مرکز دایره، قطر MN را موازی وتر AB رسم کنیم و نقطه برخورد DF و EG با این قطر را به ترتیب H و K بنامیم، $HF = KG$ است و DEKH مستطیل است.



۱۶۹. نقطه‌های برخورد DF و CG با قطری از دایره را که موازی DE است، بترتیب H و L می‌نامیم و از F به G وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای DELH و FGLH مستطیل می‌باشند، پس $DH = EL$ و $FH = GL$ است، از آن‌جا $DF = EG$ است.



۱۷۰. دو وتر مساوی AB و CD را در نظر می‌گیریم. اگر EF پاره خطی باشد که وسطهای دو کمان مساوی AD و BC را به هم وصل کرده است، با توجه به شکل $EE_1 = FF_1$ ، حال اگر خط MN را موازی EF رسم کنیم، پاره خطهای متناظر مساوی روی MN ایجاد می‌شود.

۱۷۱. اگر از نقطه M به نقطه N و از نقطه O به نقطه‌های N و G وصل کنیم، چهارضلعی MNOG متوازی الاضلاع است.

۱۷۲. ثابت کنید مثلثهای MBD و MAC متساوی الساقین می‌باشند.

۱۷۳. چهارضلعی ABPC محاطی و مرکز دایره محیطی آن نقطه I وسط پاره خط AP است. خط مرکزین دو دایره یعنی OI عمود منصف وتر مشترک BC است و لذا با PA' موازی است.

۱۷۴. فرض کنید O معرف مرکز دایره باشد و P_1, M_1, N_1 و R_1 بترتیب نقطه‌های قرینه نقطه‌های N, M, R نسبت به خط راست OA باشند و K نقطه برخورد خطهای راست N_1R_1 و QS باشد. باید ثابت کنیم که نقطه‌های R_1 و S و K بر هم منطبقند. نقطه‌های N_1, M_1 و B روی یک خط راست قرینه با خط راست NMC واقعند. نقطه‌های N_1, P_1 و R_1 هم روی یک خط راست، قرینه با خط راست NPR واقعند (شکل). نقطه‌های N_1, B, Q و K روی یک دایره واقعند. زیرا:

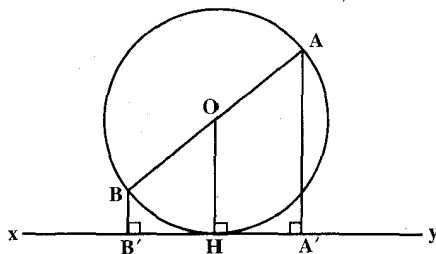
$$\widehat{BN_1K} = \widehat{M_1N_1P} = \widehat{MNP} = \widehat{PQM} = \widehat{BQK}$$

نقطه‌های N_1, B, Q و R هم روی یک دایره قرار دارند، زیرا:

$$\widehat{N_1R_1B} = \widehat{N_1P_1P} = \widehat{N_1QP} = \widehat{NQB}$$

- در نتیجه پنج نقطه B, N_1, Q, R_1 و K همخطند، بنابراین R_1 و K بر هم منطبقند.
 ۱۷۵. دو مثلث قائم الزاویه ATB و OTC با هم برابرند.
 ۱۷۶. الف. اگر $AD = BC$ باشد، آن گاه، $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ و در نتیجه $\widehat{AD} + \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AB}$
 و یا $\widehat{BD} = \widehat{AC}$ است پس، $BD = AC$ است.
 ب. اگر $AC = BD$ باشد، آن گاه $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ و از آن جا $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ ، در نتیجه $AD = BC$ است.

۱۷۷. از B به R وصل کنید، $\widehat{LRB} = \widehat{RBE}$ است، پس $BE \parallel LR$ است.
 ۱۷۸. چهارضلعی $BB'CC'$ دوزنقه قائم الزاویه و نقطه O وسط ساق BC است.
 ۱۷۹. اگر نقطه تماس خط xy با دایره باشد، پاره خط OH به طول R ، وسطهای ساقهای دوزنقه $AA'B'B$ را به هم وصل کرده است.



۱۸۰. با توجه به برابری $\widehat{AD} = \widehat{AE}$ ، ثابت کنید $\widehat{CBP} = \widehat{CPB}$.

۱۸۱. دایره به قطر OP را رسم کنید.

۱۸۲. اگر از B به H وصل کنیم، $\widehat{FBH} = \widehat{DBH}$ و $\widehat{AHB} = 90^\circ$ است.

۱۸۳. $\widehat{QMN} = \widehat{MNQ}$ و $\widehat{QMP} = \widehat{MPQ}$ است.

۱۸۴. چهارضلعی $DMCF$ محاطی است زیرا $OC \perp FC$ و چون M وسط وتر AB است،

$OM \perp EF$ ؛ در نتیجه $\widehat{C_1} = \widehat{F_1}$. به همین علت $\widehat{E_1} = \widehat{D_1}$ و چون $OC = OD$ است،

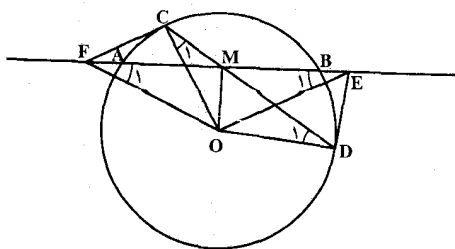
مثلث OCD متساوی الساقین است یعنی، $D_1 = C_1$. پس $\widehat{F_1} = \widehat{E_1}$ یعنی، در مثلث

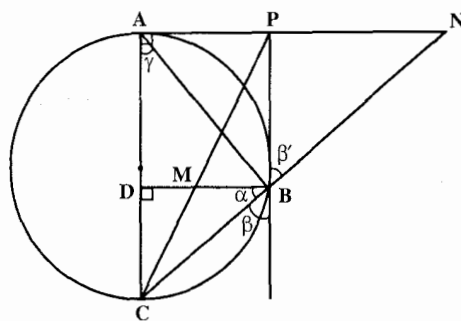
متساوی الساقین OFE ، چون OM

ارتفاع است، میانه نیز می باشد. یعنی

$FM = ME$ و $MA = MB$ ولی

پس: $AF = BE$.

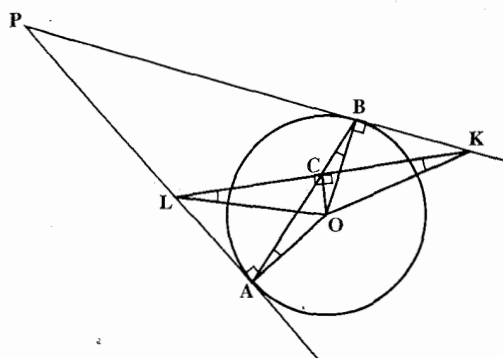




۱۸۵. مماس AP را امتداد می دهیم و B را به C وصل می کنیم. BC مماس AP را در N قطع می کند. اگر B را به A وصل کنیم، دو زاویه γ و α با هم برابرند، زیرا ضلعهایشان بر هم عمودند و $\hat{\gamma}$ با $\hat{\beta}$ نیز با هم برابرند زیرا مقابل به کمان BC

می باشند. پس $\alpha = \beta$. همچنین $\beta = \beta'$ و $\hat{\alpha} = \hat{N}$ زیرا BD با AN موازی است، پس $\hat{\beta}' = \hat{N}$ و مثلث PNB متساوی الساقین است پس $PN = PB$ و چون $PB = PA$ بنابراین P وسط AN است و از آن جا نتیجه می شود که M وسط BD می باشد.

۱۸۶. دایره به قطر OK از نقطه های B



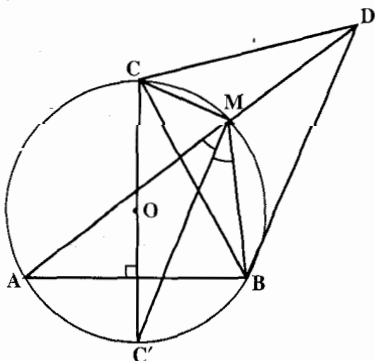
C می گذرد. پس $\hat{OKL} = \hat{OBC}$ و همچنین دایره به قطر OL از A و C می گذرد یعنی، $\hat{OLK} = \hat{OAC}$. اما مثلث OAB متساوی الساقین است پس، $\hat{OBC} = \hat{OAC}$. در نتیجه $OK = OL$ و $\hat{OKL} = \hat{OLK}$

است. در مثلث متساوی الساقین OKL، ارتفاع OC میانه نیز هست. پس $CK = CL$ یعنی C وسط KL است.

۱۸۷. مثلث MAB متساوی الاضلاع است و دو مثلث ABA' و BCB' با هم برابرند.

۲.۲.۸.۲. رابطه بین پاره خطها (نا برابرها)

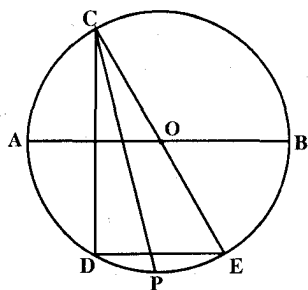
۱.۱۸۹. نیمساز زاویه AMB از نقطه C' وسط کمان AB می گذرد و نیمساز زاویه آن یعنی نیمساز زاویه BMD از نقطه C وسط کمان دیگر AB می گذرد که C و C' دو سر یک قطر از دایره اند. دو مثلث BMC و



CMD با هم برابرند. زیرا $MB = MD$ و MC در دو مثلث مشترک و $\hat{C}MD = \hat{C}MB$ است پس، $CB = CD$ می باشد.

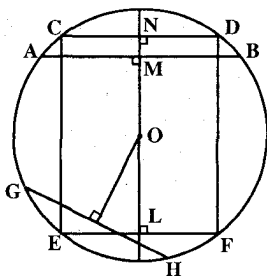
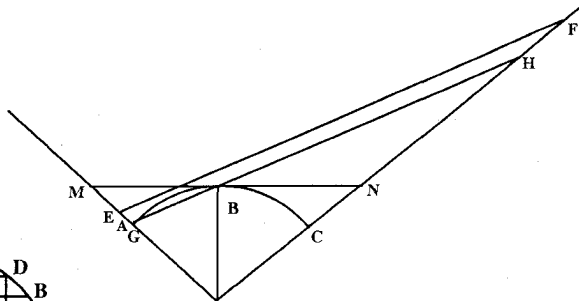
۲. در مثلث ACD می‌توان نوشت: $AD < AC + CD \Rightarrow AM + MD < AC + CD$:
و با توجه به این که $MD = MB$ و $CD = CB$ است. پس داریم:
 $AM + MB < AC + CB$

۳.۸.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۱۹۰. گزینه (الف) درست است، زیرا: امتداد CO دایره را در E قطع می‌کند. چون CE قطر دایره است، $CD \perp DE$. نیمساز زاویه OCD، قوس مقابل، DE را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. یعنی $\widehat{DP} = \widehat{PE}$. صرف نظر از وضعیت C، وتر متناظر آن، DE همواره موازی AB است ($\widehat{AD} = \widehat{EB}$). بنابراین P همواره قوس $\widehat{AB}$ را نصف می‌کند.

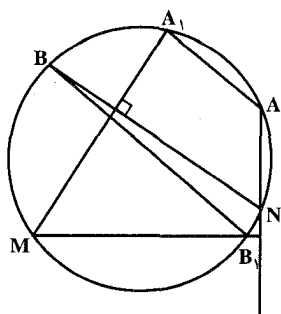
۱۹۱. اگر نقطه B وسط کمان $\widehat{ABC}$ باشد، پاره خط MN، مماس بر این نقطه جواب مسأله است، زیرا اگر مماس دلخواه EF برای این کمان را رسم کنیم و از B خط GH را موازی EF رسم کنیم، $GH < EF$ است اما $MN < GH$ ، پس: $MN < EF$.



۱۹۲. وترهای AB و GH را بترتیب به طولهای ۱ و ۱' در نظر می‌گیریم. اگر $EF = CD = GH$ و CD موازی EF باشد، MN کوتاهترین فاصله و ML بیشترین فاصله است.

۹.۲. خط‌های: موازی، عمود بر هم، ...

۱.۹.۲. خطها موازی اند



۱۹۳. کافی است ثابت کنیم :

$$B_1 \hat{M} A = A \hat{A}_1 B_1 = A_1 \hat{B}_1 B$$

۱۹۴. در شکل (الف) از A به D وصل کنید. $\hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{A}\hat{D}\hat{C}$ است، پس ... در شکل (ب) PP' از مرکز دایره می‌گذرد و بر هر دو مماس عمود است.

۱۹۵. چهار ضلعی PFMG متوازی الاضلاع است.

$$\angle AOM = \angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad .196$$

۲.۹.۲. خطها بر هم عمودند

۱۹۸. ثابت کند $\widehat{A'D'} + \widehat{B'C'} = 180^\circ$ است.

۱۹۹. مثلث OMN متساوی الساقین است.

۲۰۰. ثابت کند : $\hat{OCP} = \hat{CPP}'$.

۲۰۱. نقطه M از نقطه های A، D و C به یک فاصله است.

۲۰۲. نقطه Y وسط کمان $\widehat{AB}$ است.

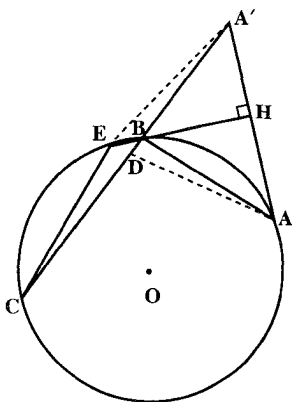
۲۰۳. فرض می‌کنیم $BC > AB$ باشد. پاره‌خط CB را از

طرف B به اندازه $BA' = BA$ امتداد می دهیم و از

A' به A وصل می کنیم. خط EB، نیمساز زاویه

ABA' از مثلث متساوی الساقین ABA' است، زیرا

اگر H پای این نیمساز باشد، داریم :



$$\widehat{EH} = \widehat{AE} = \widehat{EC} \text{ و } \widehat{ABH} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BE}}{2} = \frac{\widehat{AE}}{2} \text{ و } \widehat{A'BH} = \widehat{EBD} = \frac{\widehat{EC}}{2}$$

عمود منصف پاره خط AA' می باشد. از آن جا $EA = EA'$ اما $EA = EC$ (کمانهای نظیر آنها برابرند) پس $EC = EA'$ یعنی مثلث ECA' متساوی الساقین است. در این مثلث ED میانه نظیر قاعده است پس عمود منصف قاعده می باشد.

۲۰۴. چهارضلعی $CC'DD'$ دوزنقه ای است که قاعده های آن عمود بر قطر AB است و MM' موازی قاعده ها است.

۲۰۵. اگر نقطه تقاطع AM و BN را D بنامیم و از A به N وصل کنیم، مثلث AND قائم الزاویه متساوی الساقین است.

$$\widehat{A'PO} = \widehat{B'PO} = \widehat{COB} \text{ و } \widehat{POB} + \widehat{OPB} = 90^\circ \text{ است. } ۲۰۶$$

۲۰۸. چهارضلعی $MQNP$ لوزی است.

۳.۹.۲. خط نیمساز است

۲۰۹. مثلث AOB متساوی الاضلاع و مثلث AEO متساوی الساقین است.

۲۱۰. مثلث OAB متساوی الساقین و OA موازی BH است.

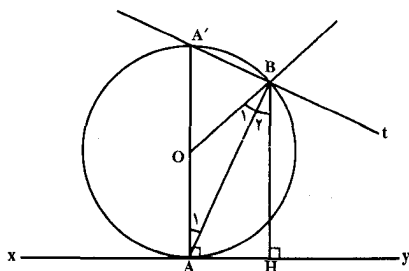
۲۱۱. خط CO ، نیمساز زاویه ACB است و دو مثلث ADC و BDC ، همچنین مثلثهای ACE و CEB همنهشتند.

۴.۹.۲. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۲۱۳. مثلث OAB متساوی الساقین و $OA \parallel BH$ است، پس $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ و $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ است.

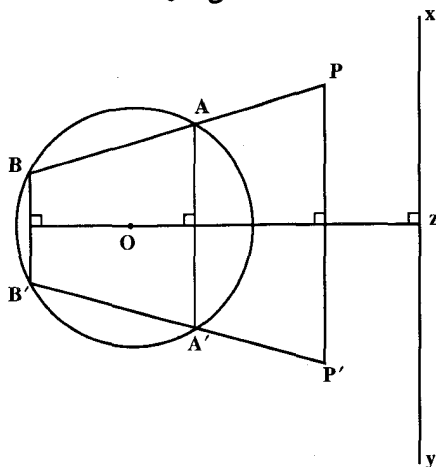
در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ یعنی AB نیمساز زاویه OBH می باشد، پس بر Bt نیمساز خارجی این زاویه عمود است، یعنی زاویه $\hat{ABt} = 90^\circ$ است.

اگر نقطه دیگر برخورد Bt با دایره را A' بنامیم، زاویه $\hat{A'BA} = 90^\circ$ می باشد. لذا $A'A$ از مرکز دایره می گذرد. یعنی نقطه A' انتهای دیگر قطری از دایره است که از نقطه ثابت A مرور می کند. پس A'



نقطه ثابتی است.

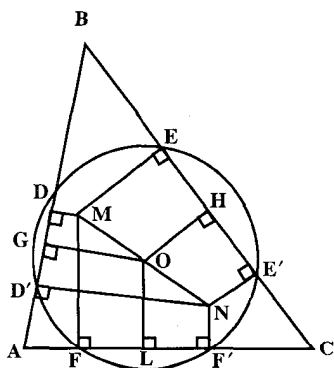
۲۱۵. اگر از نقطه O ، مرکز دایره، عمود OZ را بر خط xy فرود آوریم، خط $A'B'$ از نقطه P' ، قرینه نقطه P نسبت به خط OZ ، می‌گذرد.



۵.۹.۲. خطها هم‌رسند

۲۱۶. نقطه را M و پای عمودهای رسم شده بر سه خط را E ، D و F و مثلث حاصل از برخورد سه خط را ABC و نقطه‌های دیگر برخورد دایره گذرنده بر E ، D و F با خطها

را E' ، D' و F' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که عمودهای اخراج شده بر سه خط در این نقطه‌ها، در نقطه‌ای مانند N هم‌رسند. نقطه M را به مرکز دایره وصل می‌کنیم. فرض کنیم $ON = OM$. خط NF' عمود بر AC است زیرا $LF' = LF$ ، در نتیجه NF' موازی MF است. همین نکته برای NE' و ND' درست است. از آنجا ...

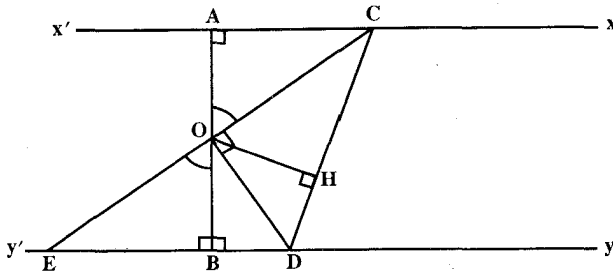


۶.۹.۲. وضع نسبی خط و دایره

۱.۶.۹.۲. خط مماس بر دایره است

۲۱۷. از O عمود OH را بر CD فرود می‌آوریم و OC را امتداد می‌دهیم تا yy' را در نقطه

E قطع کند. دو مثلث قائم الزاویه OAC و OEB، به حالت تساوی یک ضلع و یک زاویه حاده با هم برابرند. زیرا $OA = OB$ و $\hat{AOC} = \hat{BOE}$ و $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ ، پس $OE = OC$ و چون $OD \perp EC$ است، پس مثلث DEC در آن میانه و ارتفاع نظیر ضلع CE است، متساوی الساقین است. در نتیجه OD نیمساز زاویه EDC و از آن جا $OH = OB$ است. پس دایره به قطر AB یعنی دایره به مرکز O و به شعاع OB از نقطه H می گذرد و چون CD در نقطه H بر OH عمود است، پس این دایره بر خط CD در نقطه H مماس می باشد.

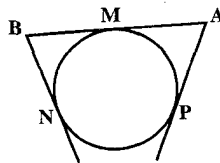


۲۱۸. مثلث قائم الزاویه AOC با مثلث OCB برابر است. پس $\hat{OBC} = 90^\circ$ یعنی CB دایره مماس است.

۲۱۹. ثابت کنید $\hat{CTG} = 90^\circ$ است.

۲۲۰. اگر پاره خط AB برابر مجموع دو مماس AP و BN باشد که از نقطه های A و B بر دایره رسم شده اند. AB خود از نقطه ای مانند M بر دایره مماس است و این نقطه M چنان است که $MB = BN$ و $AM = AP$ است. زیرا اگر نقطه برخورد نیمسازهای دو زاویه A و B را O بنامیم، این نقطه که از سه خط AB، AP و BN به یک فاصله است $(OM = ON = OP)$ ، مرکز دایره داده شده است. یعنی این دایره در نقطه M بر AB مماس است.

نکته. اگر پاره خط AB برابر تفاضل اندازه های دو مماس رسم شده از A و B بر دایره باشد، امتداد پاره خط AB بر دایره مماس است.



۲.۶.۹.۲. خط متقاطع با دایره است.

۲۲۱. در حالت اول (شکل الف):

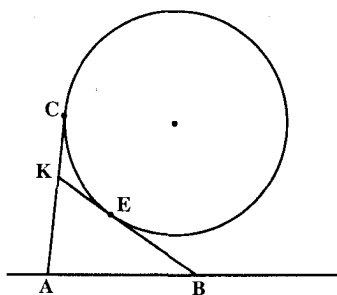
$$AB < AA_1 + A_1B_1 + B_1B = AA_1 + A_1C + B_1D + BB_1$$

$$1 = AC + BD$$

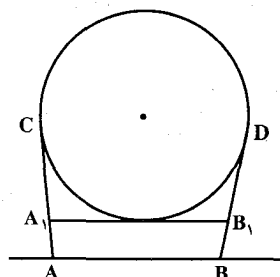
در حالت دوم (شکل ب):

$$AB > BK - AK > BE - AC$$

عکس مسأله هم بسادگی، بارسیدن به تناقض ثابت می شود.



(ب)



(الف)

۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده

۱.۱۰.۲. شکلهای ایجاد شده (مثلث)

۲۲۲. مثلث پدید آمده متساوی الساقین با زاویه رأس ۶۰ درجه است. پس متساوی الاضلاع است.

۲۲۳. CH عمود منصف پاره خط AB است.

۲۲۴. دو وتر AB و CD با هم مساوی اند.

۲۲۵. داریم:

$$AC = AB \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} \quad (۱)$$

$$\hat{B} = \hat{D} \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} \Rightarrow AD = AC$$

پس مثلث ACD متساوی الساقین است.

۲۲۶. با توجه به این که $\widehat{CB} = 6^\circ$ و $\widehat{AC} = 12^\circ$ است، ثابت کنید $\widehat{ADC} = 3^\circ$ است.

۲۲۷. ثابت کنید: $\widehat{PCD} = \widehat{PDC}$.

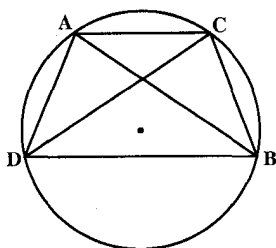
۲۲۸. میانه بودن OM در مثلث OCD، و یا برابری $OD = OC$ را ثابت کنید.

۲.۱۰.۲. شکل‌های ایجاد شده (چندضلعیها $n \geq 4$)

۲۳۰. کمانهای محصور بین دو وتر متوازی با هم برابرند، پس $\widehat{AD} = \widehat{BC}$ و از آن جا: $AD = BC$.

۲۳۱. وترهای متساوی، کمانهای برابر دارند. پس در شکل با فرض $AB = CD$ داریم:
 $\widehat{AB} = \widehat{CD} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BC} \Rightarrow AC \parallel BD$

پس چهارضلعی ABCD دوزنقه متساوی الساقین است.



۲۳۲. ثابت کنید: $\angle EDF + \angle FGE = 18^\circ$.

۲.۱۱. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۳۳. در این دو مثلث $OA = OB$ ، $AC = DB$ و $\widehat{A} = \widehat{B}$ است، پس همنهشتند.

۲۳۴. قبل از هر چیز، ثابت کنید، قورباغه‌ها، دیر یا زود، در همه قطعاها خواهند بود. اکنون تنها کافی است به یک نکته توجه کنید:

اگر در یکی از دو قطاع مجاور، قورباغه‌ای وجود داشته باشد، آن وقت، یکی از این دو قطاع، در آینده هم، مهمان قورباغه خواهد بود.

۲۳۸. ۴۹۵۱. از این مطلب استفاده کنید که از هر دو حلقه‌ای که یکی دیگری را تکمیل می‌کند (یعنی روی هم شامل 10° عدد باشند)، یکی از آنها مجموعی مثبت دارد.

۲۳۹. گزینه (ب) درست است، زیرا:

$$r = \frac{\text{فاصله (برحسب مایل)}}{\text{زمان (برحسب ساعت)}} = \text{سرعت (برحسب مایل ساعت)}$$

بنابراین

$$r \times \frac{5280}{3600} = \frac{22}{15} r = \frac{\text{فاصله (برحسب فوت)}}{\text{زمان (برحسب ثانیه)}}$$

و از آن جا:

$$\frac{15}{22} \times \frac{\text{فاصله (برحسب فوت)}}{r} = \text{زمان (برحسب ثانیه)}$$

$$\text{ثانیه } t = \frac{15}{22r} = \frac{11 \times 15}{22r}$$

اگر ۵ به r اضافه شود، $\frac{1}{4}$ از t کم می شود، بنابراین:

$$\frac{15}{2(r+5)} = t - \frac{1}{4}$$

و از آن جا:

$$\frac{15}{2(r+5)} = \frac{15}{2r} - \frac{1}{4} = \frac{30-r}{4r}$$

$$30r = (r+5)(30-r) = 30r - r^2 + 150 - 5r$$

بنابراین: $(r-10)(r+15) = 0 \Rightarrow r^2 + 5r - 150 = 0$. سرعت منفی را نمی پذیریم.

پس: $r = 10$.

۲۴۰. برای اثبات برابری زاویه های مثلثها، از A به B و از A' به B' وصل کنید. برای همدایره بودن نقطه ها بر سه نقطه یک دایره بگذرانید و ثابت کنید این دایره بر نقطه چهارم مورد نظر در هر قسمت نیز می گذرد.

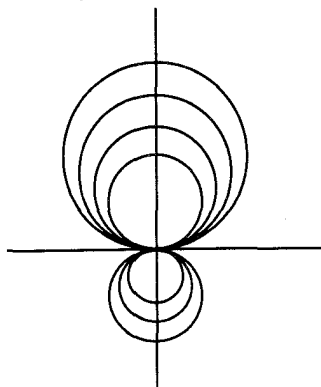
۲۴۱. نقطه برخورد عمود منصف پاره خط AB و خط عمود مرسوم بر xy در نقطه A ، مرکز تنها دایره جواب مسأله است.

۲۴۲. یکی از روشهای ساده حل این مسأله بر مبنای دو لم زیر بیان می شود.

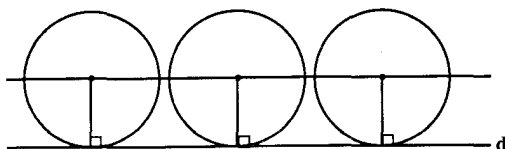
لم ۱. اگر در یک دایره دو وتر روبرو به دو زاویه حاده محاطی نابرابر باشند، آن وتر که بزرگتر است، روبرو به زاویه بزرگتر است.

از دو وتر نابرابر آن که بزرگتر است به مرکز نزدیکتر است و در نتیجه زاویه مرکزی روبرو به آن بزرگتر است. هر زاویه محاطی نیمه زاویه مرکزی است که با آن روبرو به

۲۴۳. خطی است که در آن نقطه بر خط داده شده عمود است.



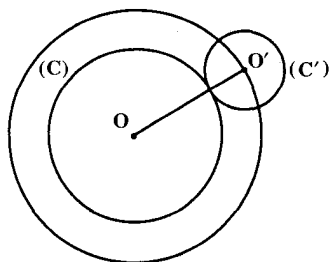
۲۴۴. خطی موازی آن خط و به فاصله‌ای برابر شعاع آن توپ است.



۲۴۵. دایره‌ای است هم مرکز با دایره داده شده و با شعاعی برابر مجموع شعاعهای دو دایره.

زیرا اگر $C(O, R)$ دایره مفروض و $C'(O', R')$ یک دایره مماس باشد، داریم:

$$OO' = R + R' = C^{te}$$



۲۴۶. معما را با راه ساده‌ای حل می‌کنیم: ابتدا یک علامت را در محیط دایره قرار می‌دهیم،

فقط یک ناحیه خواهیم داشت. سپس دو علامت قرار می‌دهیم. با مربوط کردن آنها به

یکدیگر، دایره به ۲ ناحیه جدا از هم، مساوی یا نامساوی با یکدیگر، تقسیم می‌شود.

سپس ۳ علامت را در محیط دایره می‌گذاریم و به همان ترتیب عمل می‌کنیم تا دایره ۴

ناحیه مستقل از هم داشته باشد. به همین روش با گذاشتن ۴ علامت، ۸ ناحیه خواهیم

داشت (نمونه مطرح شده در صورت مسأله) و در ۵ علامت، ۱۶ ناحیه (حتماً امتحان

کنید) و ... به طوری که ملاحظه می‌کنید، هر بار با اضافه شدن یک علامت، شمار

ناحیه ها دو برابر می شود و اگر به همین ترتیب پیش برویم، با ۱۰° علامت در محیط دایره ۵۱۲ ناحیه مستقل خواهیم داشت.
این پاسخ از فرمول زیر هم حاصل می شود:

$$۲^{۱۰-۱} = ۵۱۲$$

۱۲.۲. مسأله های ترکیبی

۲۴۷. ۱. مثلث ABC، قائم الزاویه متساوی الساقین است.

۲. زاویه $\hat{BAC}' = 9^\circ$ است.

۲۴۸. ۱. از ویژگی مماسهای رسم شده از یک نقطه بر دایره استفاده کنید.

۲. اندازه این زاویه برابر $\hat{A} - 18^\circ$ است.

۲۴۹. ۱. ضلعهای این دو زاویه بر هم عمودند.

۲. $\hat{MOA} = 2\hat{ABM}$ است.

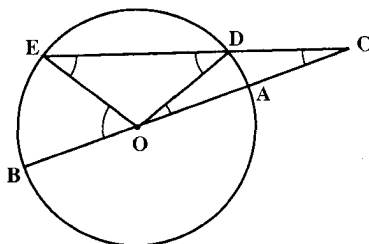
۲۵۰. ۱. زاویه ODE، زاویه خارجی مثلث متساوی الساقین ODC است. پس:

$$\hat{ODE} = \hat{OED} = 2\hat{DOA}$$

۲. زاویه BOE، زاویه خارجی مثلث OEC است. پس داریم:

$$\hat{BOE} = \hat{OED} + \hat{OCE} \Rightarrow \hat{BOE} = \hat{ODE} + \hat{DOA} \Rightarrow$$

$$\hat{BOE} = 2\hat{DOA} + \hat{DOA} = 3\hat{DOA} \Rightarrow \hat{BOE} - 3\hat{DOA} = 0$$

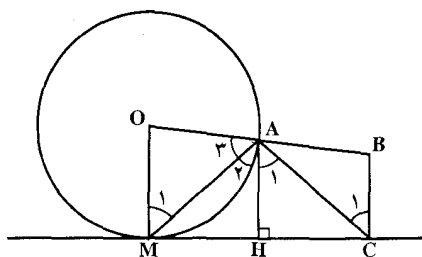


۲۵۱. ۱ و ۲. از نقطه A عمود AH را بر خط مماس در نقطه M فرود می آوریم. نقطه H

وسط پاره خط MC است. زیرا در دوزنقه OBCM خطی که از نقطه A وسط ساق OB

به موازات قاعده ها رسم شده است، از وسط ساق MC می گذرد پس AH عمود منصف

MC می باشد. لذا مثلث AMC متساوی الساقین و AH نیمساز زاویه MAC است.



یعنی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. از طرفی مثلث OAM

متساوی الساقین و $AH \parallel OM$ و

$AH \parallel BC$ است، پس بترتیب

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \text{ و } \hat{A}_2 = \hat{M}_1 \text{ و } \hat{A}_3 = \hat{M}_1$$

است. بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \hat{C}_1$

و در نتیجه $\hat{OAC} = 3\hat{ACB}$.

۲۵۲. ۱. چون $\widehat{AE} = \widehat{AC} = \widehat{CB}$ است، پس $\hat{GAC} = \hat{GCA}$ و در نتیجه $AG = GC$.

۲. ثابت کنید: $\hat{GFC} = \hat{GCF}$.

۲۵۳. ۱. دو وتر AB و AC از مرکز دایره به یک فاصله اند. پس $OH = OK$ است.

۲. خط OA نیمساز زاویه KOH است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳. دو دایره

۱.۳. دو دایره در حالت کلی

۲.۱.۳. وضع نسبی دو دایره

۲۵۴. الف. مماس برون

ب. یکی درون دیگری (متداخل)

پ. برون هم (متخارج)

ت. متقاطع

ث. مماس درون

۲۵۵. الف. متقاطع

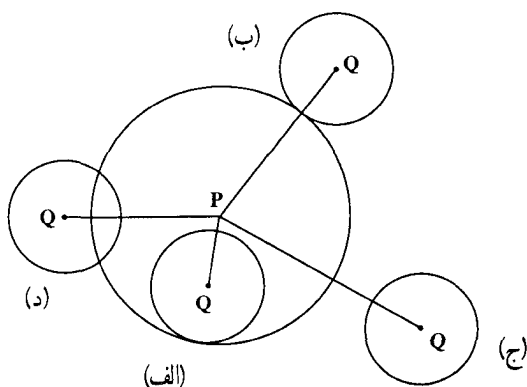
ب. مماس درون

پ. مماس برون

ت. یکی درون دیگری

ث. برون هم (متخارج)

۲۵۶. گزینه (ه)، زیرا هر یک از حکمهای چهارگانه در شکل داده شده تحقق می‌یابد. بنابراین هیچ یک از آنها غلط نیست.

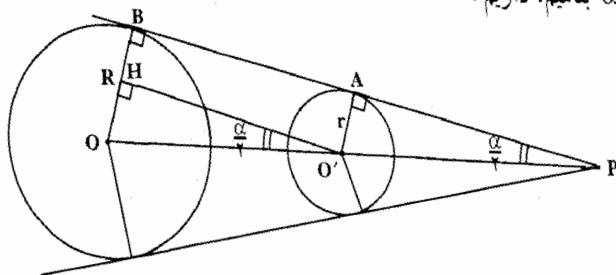


۳.۱.۳. نقطه و دایره

۲۵۷. مماس مشترکهای دو دایره را رسم کنید.

۴.۱.۳. زاویه

۲۵۸. اگر زاویه بین دو مماس مشترک درونی را α و زاویه بین دو مماس مشترک برونی را α' بنامیم، داریم:



$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{R-r}{\sqrt{2(R^2+r^2)}} \Rightarrow \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \times \frac{(R-r)^2}{2(R^2+r^2)} \\ &= \frac{2Rr}{R^2+r^2} \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos } \frac{2Rr}{R^2+r^2} \\ \sin \frac{\alpha'}{2} &= \frac{R+r}{\sqrt{2(R^2+r^2)}} \Rightarrow \cos \alpha' = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha'}{2} = 1 - 2 \times \frac{(R+r)^2}{2(R^2+r^2)} \\ &= \frac{-2Rr}{R^2+r^2} \Rightarrow \alpha' = \text{Arc cos } \frac{-2Rr}{R^2+r^2}\end{aligned}$$

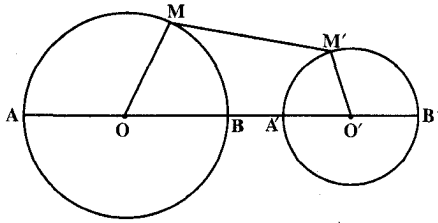
۵.۱.۳. پاره خط

۱.۵.۱.۳. اندازه پاره خط

۲۵۹. خط مرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم تا دایره O را در نقطه‌های A و B و دایره O' را در نقطه‌های A' و B' قطع کند. A'B کوچکترین و AB' بزرگترین قطعه خط متکی بر دو دایره است. زیرا اگر MM' پاره خط دلخواهی باشد که دو سرش روی دو دایره باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\text{چهارضلعی } OMM'O' &\Rightarrow MM' \leq MO + OO' + O'M' \Rightarrow MM' \leq d + R + R' \\ &\Rightarrow MM' < AB' \text{ و } OO' \leq OM + MM' + O'M' \Rightarrow d \leq R + MM' + R' \\ &\Rightarrow MM' \geq d - R - R' \Rightarrow MM' \geq A'B\end{aligned}$$

در حالتی که دو دایره مماس داخل یا مماس خارج باشند، $A'B$ مساوی صفر است.



۲.۵.۱.۳. رابطه بین پاره خطها

۲۶۰. در نقطه A مماسی بر دایره O رسم کنید تا BC را در نقطه D قطع کند. در این صورت

$$\hat{A}' = \hat{A} = \hat{B} \text{ است.}$$

۲۶۱. با توجه به این که قطعه های مماسهای رسم شده، از یک نقطه بر یک دایره، محصور بین

آن نقطه و نقطه های تماس متساوی اند، می توان نوشت :

$$ab = ae \text{ و } dc = dh \quad (۱)$$

$$af = ac \Rightarrow af = ab + bc \quad (۲)$$

$$db = dg \Rightarrow dc + bc = dg \quad (۳)$$

از طرفی ef و gh مماس مشترکهای خارجی دو دایره C و C' با هم برابرند پس :

$$gh = ef \Rightarrow gd + dh = ea + af \quad (۴)$$

از جمع کردن رابطه های (۲) و (۳) و (۴) با توجه به رابطه (۱) نتیجه می شود :

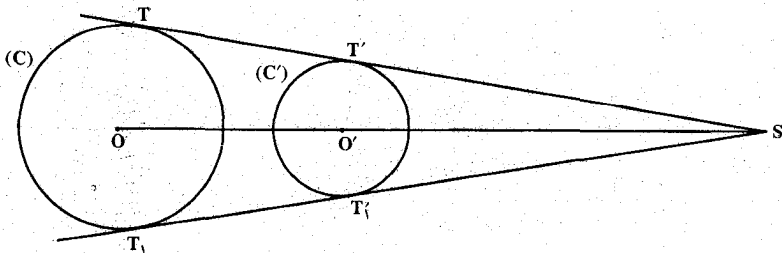
$$2ae = 2cd \Rightarrow ae = cd$$

۶.۱.۳. مماس مشترک دو دایره

۲۶۲. نقطه برخورد دو مماس مشترک بیرونی TT' و $T_1T'_1$ را S می نامیم و از S به O و از S

به O' وصل می کنیم. SO بر SO' منطبق است، زیرا هر دو نیمساز زاویه $\angle TST_1$

می باشند. به روش مشابه برای مماس مشترکهای درونی دو دایره، مسأله حل می شود.

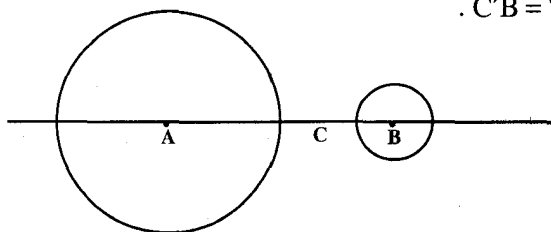


۲۶۳. گزینه (الف) درست است. زیرا دو دایره در صورتی تنها یک مماس مشترک دارند که مماس درون (مماس داخل) باشند، اما دو دایره مساوی، نمی توانند مماس درون باشند زیرا اگر مماس درون باشند، بر هم منطبق می شوند و به یک دایره تبدیل می شوند.

۲.۳. دو دایره برون هم (متخارج)

۲.۲.۳. شعاع

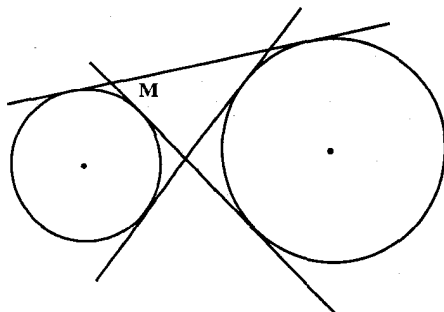
۲۶۴. اگر مرکز دایره های داده شده A و B ، و مرکز دایره جواب، C باشد، دو دایره جواب مسأله است. یکی مماس برون با دو دایره A و B و به شعاع $۵/۵$ سانتیمتر که $CA = ۳/۵\text{cm}$ و $CB = ۱/۵\text{cm}$ است. دیگری مماس درون با هر یک از این دو دایره و به شعاع $۴/۵\text{cm}$ که فاصله مرکز آن C' از A و B برابر است با $C'A = ۱/۵\text{cm}$ و $C'B = ۳/۵\text{cm}$.



۲۶۵. شعاع دایره مورد نظر برابر $\frac{a}{4}$ است.

۳.۲.۳. نقطه و دایره

۲۶۶. بله، چنین نقطه ای وجود دارد. برای مثال نقطه M روی شکل.



۴.۲.۳. وتر

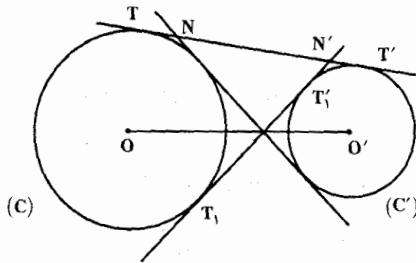
۲۶۷. ثابت کنید چهارضلعی $BCC'B'$ دوزنقه متساوی الساقین است.

۵.۲.۳. پاره خط

۱.۵.۲.۳. رابطه بین پاره خطها

۲۶۸. در شکل ثابت کنید:

$$NN' = T_1T'_1$$



۶.۲.۳. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

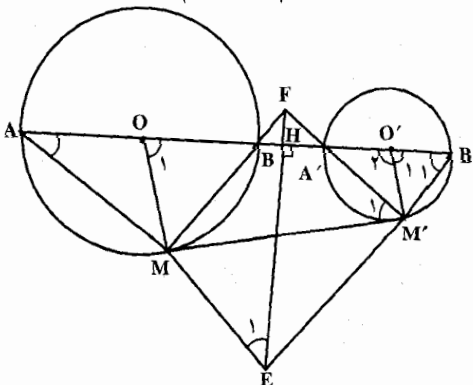
۱.۶.۲.۳. خطها بر هم عمودند

۲۶۹. از O به M و از O' به M' وصل می کنیم. چهارضلعی OMM'O' دوزنقه قائم الزاویه

است. پس $\hat{O}_1 = \hat{O}'_1$ است. در نتیجه $\hat{O}_1 + \hat{O}'_1 = 180^\circ$ است. از طرفی:

$$\hat{A} = \frac{\hat{O}_1}{2} \text{ و } \hat{B}' = \frac{\hat{O}'_1}{2}$$

$$\hat{A} + \hat{B}' = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}'_1}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AEB: \hat{AEB}' = 90^\circ \Rightarrow AM \perp B'M'$$



به همین ترتیب ثابت می شود که

دو خط $A'M'$ و MB نیز بر

هم عمودند. زاویه های AMB

و $A'M'B'$ نیز قائمه اند. پس

چهارضلعی $MEM'A'$

مستطیل است. اگر نقطه

برخورد EF با AB' را H

بنامیم زاویه $\hat{AHE} = 90^\circ$

است، زیرا :

$$\hat{E}_1 = \hat{M}'_1 = \hat{B}' \text{ و } \hat{A} + \hat{B}' = 90^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{E}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{AHE} = 90^\circ$$

پس EF بر خط المرکزین دو دایره عمود است.

۲۷۰. O'M و OM، همچین O'N و ON نیمسازهای دو زاویه مجاور و مکملند.

۷.۲.۳. مماس مشترک دو دایره

۲۷۱. چهار مماس مشترک دارند چون این دو دایره برون هم هستند، زیرا :

$$6 < 2 + 3$$

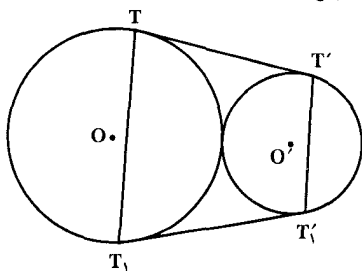
۳.۳. دو دایره مماس برون

۲.۳.۳. شعاع

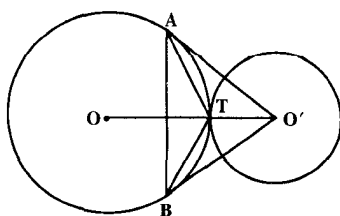
۲۷۲. دو زاویه MOA و M'O'A مکمل یکدیگرند.

$$\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \quad ۲۷۳$$

۳.۳.۳. نقطه و دایره



۲۷۴. شکل حاصل دوزنقه متساوی الساقین است.



۲۷۵. اگر A و B دو نقطه دلخواه روی دایره O و به

یک فاصله از نقطه تماس T باشند، OT یا OO'

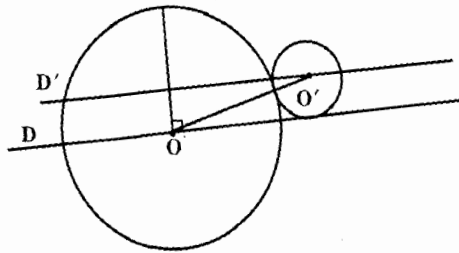
عمود منصف پاره خط AB است. در نتیجه دو

نقطه A و B از مرکز دایره دوم یعنی از نقطه O'

و در نتیجه از این دایره به یک فاصله اند.

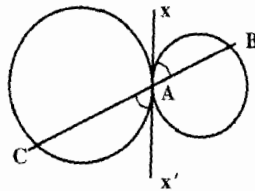
۲۷۶. مرکز دایرة مطلوب به فاصله ۲ cm از نقطه A و به فاصله ۳ cm از نقطه O (اگر دو دایره مماس خارج باشند) و یا به فاصله ۱ cm از نقطه O (اگر دو دایره مماس داخل باشند) قرار دارد.

۲۷۷. نقطه برخورد دو دایره به مرکز O و به شعاع ۴ cm یا $16 - 4 = 12$ cm یا $16 + 4 = 20$ cm با دو خط موازی D و به فاصله ۴ سانتیمتر از آن، جوابهای مسأله اند.



۴.۳.۳. کمان

۲۷۸. اگر خط $x'Ax$ مماس مشترک درونی دو دایره را رسم کنیم (A نقطه تماس دو دایره است). دو زاویه محاطی BAx و CAx' با هم برابرند. پس کمانهای مقابل آنها از نظر عدد درجه ها یکی هستند.



۵.۳.۳. وتر

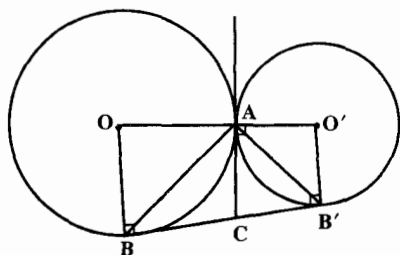
۲۷۹. مماس مشترک درونی دو دایره را رسم کنید و ثابت کنید، $\hat{B} = \hat{B'}$ است.

۲.۸.۳.۳. خطها بر هم عمودند

۲۸۴. مماس مشترک درونی دو دایره را رسم کنید تا MM' را در E قطع کند. در مثلث CMM' ، CE میانه و نصف ضلع MM' است پس این مثلث در رأس C قائم الزاویه است. یعنی $MCM' = 90^\circ$ است. حال اگر نقطه برخورد دو خط AM ، BM' را D بنامیم، چهارضلعی $CMDM'$ مستطیل است. زیرا زاویه های AMC ، $BM'C$ و MCM' قائمه اند. پس زاویه چهارم نیز قائمه است. یعنی، AM عمود بر BM' است.

۳.۸.۳.۳. خط نیمساز است

۲۸۵. مماس مشترک درونی دو دایره را رسم کنید و ثابت کنید که: $\hat{D}AC = \hat{D} + \hat{B}$.

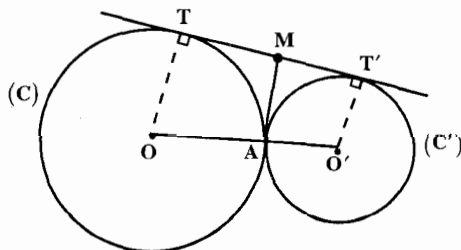


۴.۸.۳.۳. خط مماس بر دایره است

۲۸۶. اگر C نقطه برخورد مماس مشترک درونی دو دایره با مماس مشترک خارجی باشد، AC عمود بر OO' و AC میانه نظیر وتر از مثلث قائم الزاویه ABB' است.

۹.۳.۳. مماس مشترک دو دایره

۲۸۷. نقطه برخورد مماس مشترک درونی دو دایره (C) و (C') با مماس مشترک برونی TT' را M و نقطه تماس دو دایره را A می نامیم. داریم: $MA = MT = MT'$.



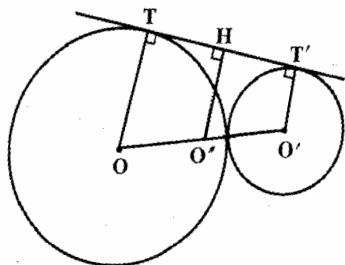
۲۸۸. TT' مماس مشترک برونی دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می گیریم، $O'T'$ و $O'R'$ را رسم می کنیم. چهارضلعی $OTT'O'$ دوزنقه قائم الزاویه است. حال از

نقطه O'' وسط خط المرکزین دو دایره عمود $O''H$ را بر TT' فرود می آوریم.

$O''H \parallel OT \parallel O'P'$ و $O''H = \frac{OT + O'T'}{2} = \frac{R + R'}{2}$ می باشد، پس دایره به قطر

OO' یا به شعاع $O''H$ در نقطه H بر TT'

مماس است.



۱۰.۳.۳. شکلهای ایجاد شده

۲۸۹. خط المرکزین OO' موازی و مساوی AD است، زیرا $OADO'$ متوازی الاضلاع است، پس $ABCD$ لوزی است.

۱۱.۳.۳. دو دایره بر هم مماسند

۲۹۰. برای مشخص بودن وضع، فرض می کنیم شعاع دایره K_1 ، از شعاع دایره K_2 بزرگتر

نباشد. نقطه های تماس دایره های K_1 و K_2 را با خطهای راست I_1 و I_2 ، با A, B, C و

D نشان می دهیم (شکل). روشن است که دو خط راست AC و BD موازی اند.

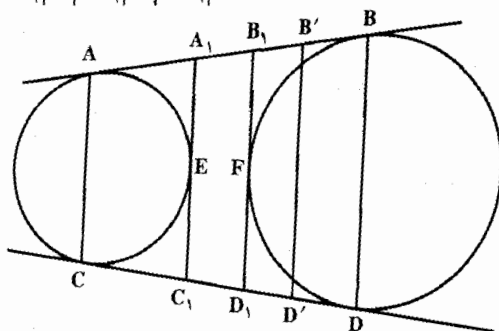
خطهای راست A_1C_1 و B_1D_1 را موازی با خط راست AC و مماس بر دایره های K_1

و K_2 بترتیب در نقطه های E و F رسم می کنیم. در این صورت

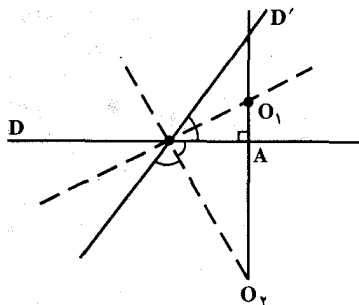
$$|AA_1| = |A_1E| \text{ و } |CC_1| = |C_1E| \text{ و } |BB_1| = |B_1F| \text{ و } |FD_1| = |DD_1|$$

روشن است که بشرط منطبق نبودن نقطه های E و F ، باید داشته باشیم:

$$|AA_1| = |CC_1| < |BB_1| = |DD_1|$$



نقطه های B' و D' را طوری در نظر می گیریم که A_1 ، وسط پاره خط راست AB' و B_1 ، وسط پاره خط راست CD' باشد. روشن است که خط راست $B'D'$ با خط راست BD موازی است، ولی بر آن منطبق نیست. دوزنقه $AB'D'C$ ، یک چهارضلعی محیطی است و بنابراین، در دوزنقه $ABCD$ ، نمی توان دایره ای محاط کرد. تناقض.



۲۹۱. خطی که در نقطه A بر خط D عمود می گردد.

نیمسازهای زاویه های بین دو خط D و D' را در دو نقطه O_1 و O_2 قطع می کند که این دو نقطه مرکزهای دایره های جواب مسأله می باشند.

۱۲.۳.۳. مسأله های ترکیبی

۲۹۲. ۱. $MA = MB = MC$ است.

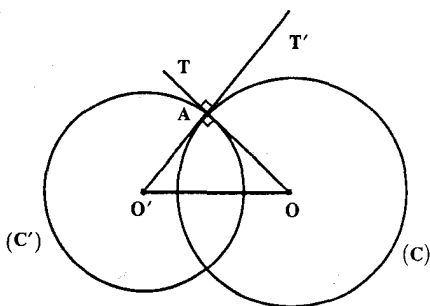
۲. $OM \perp AB$ و $O'M \perp AC$.

۲۹۳. ۱. زاویه بین دو مماس مشترک برونی برابر 60° است.

۲. اندازه خط مرکزین دو دایره $d = 12$ سانتیمتر است.

۴.۳. دو دایره متقاطع

۱.۴.۳. تعریف و قضیه



۲۹۵. دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را که

بر هم عمودند در نظر می گیریم. مماسهای

AT و AT' در نقطه تقاطع A را بر دو

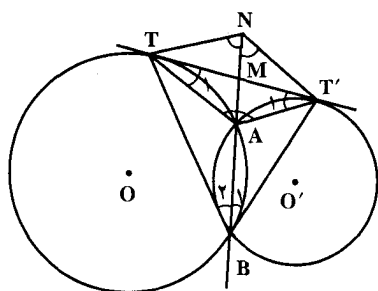
دایره رسم می کنیم در هر قضیه یا عکس

آن، حول نقطه A سه زاویه قائمه پدید

می آید، بنابراین زاویه چهارمی نیز قائمه

است و حکم هر قضیه و عکس قضیه درست است.

۲.۴.۳. شعاع



۲۹۶. از B به A وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا TT' را در نقطه M قطع کند. سپس AM را به اندازه خود تا نقطه N امتداد می‌دهیم. از N به T و T' وصل می‌کنیم. چهارضلعی $NTAT'$ متوازی‌الاضلاع است، پس $\hat{TNT}' = \hat{TAT}'$. از طرفی در مثلث TAT' داریم:

$$\hat{T}_1 = \hat{B}_1 \text{ و } \hat{T}'_1 = \hat{B}_1 \text{ اما، } \hat{TAT}' + \hat{T}_1 + \hat{T}'_1 = 180^\circ$$

$$\hat{TNT}' + \hat{B}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{TNT}' + \hat{BTT}' = 180^\circ$$

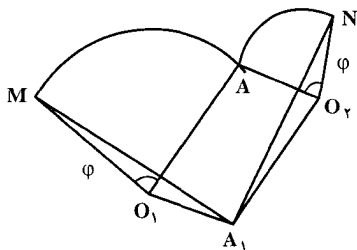
پس چهارضلعی $BTNT'$ محاطی است و دایره محیطی دو مثلث TNT' و BTT' با هم برابر می‌باشند. اما دو مثلث NTT' و ATT' متساوی‌اند، پس دایره محیطی مثلث ATT' با دایره محیطی مثلث BTT' برابر می‌باشد.

۳.۴.۳. نقطه و دایره

۲۹۷. الف. فرض کنید، A و B معرف نقطه‌های برخورد دایره‌ها، A نقطه شروع دو چرخه‌سوارها، M و N جای دو چرخه‌سوارها در لحظه‌ای معین از زمان باشند. اگر M و N در یک طرف AB باشند، آن وقت $\hat{ABM} = \hat{ABN}$ ، و اگر در دو طرف آن باشند، آن وقت $\hat{ABM} + \hat{ABN} = 180^\circ$ ، یعنی، نقطه‌های B ، M و N روی یک خط راست قرار دارند. اگر L و K دو نقطه از دایره‌ها و مقابل قطری نقطه B باشند (L و K ثابتند)، آن وقت چون $\hat{LNM} = \hat{NMK} = 90^\circ$ ، نقطه P ، وسط LK ، از N و M به فاصله برابر است. قانع می‌شویم که P ، قرینه B نسبت به وسط خط‌المركزین دایره‌هاست (شکل الف).

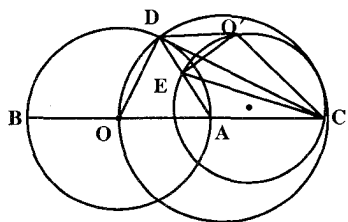
ب. فرض کنید، O_1 و O_2 معرف مرکز دایره‌ها باشند. نقطه A_1 را طوری می‌گیریم که $O_1AO_2A_1$ متوازی‌الاضلاع باشد. بسادگی می‌توان دید که مثلث MO_1A_1 با مثلث NO_2A_1 قابل انطباق است، زیرا $MO_1 = O_1A = O_2A_1$ ، $NO_2 = O_2A = NO_1$ ، و $O_1A_1 = O_2A = NO_1$ ، $MO_1 = O_1A = O_2A_1$ ، زیرا $\hat{MO_1A_1} = \varphi + \hat{AO_1A_1} = \varphi + \hat{AO_2A_1} = \hat{NO_2A_1}$ که در آن، φ ، زاویه متناظر با کمانهای طی شده توسط دو چرخه‌سوارهاست (شکل ب). بنابراین، نقطه‌های مطلوب،

قرینه نقطه‌های برخورد دایره‌ها، نسبت به وسط پاره خط O_1O_2 ، هستند.
تبصره. در قسمت (الف) می‌توانستیم درست به همان روش قسمت (ب) عمل کنیم.
برای مثال، با گرفتن نقطه P به طوری که $\Delta O_1PO_2 = \Delta O_1AO_2$ (A و P در یک طرف O_1O_2 و نامنطبقند)، بسادگی می‌توان ثابت کرد که مثلث‌های متناظر، قابل انطباقند.



۲۹۸. اگر O' مرکز دایره محیطی مثلث ACD باشد، زاویه $EO'D$ با زاویه محاطی ACD برابرند و چهارضلعی $ODO'C$ در دایره‌ای به قطر OC محاط است.

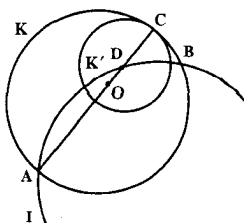
۲۹۹. مسأله ۵ جواب دارد.



۳.۴.۴. کمان

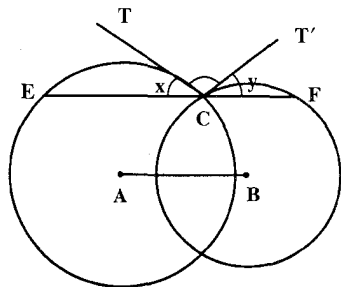
۳۰۰. چهارضلعی $OA'O'B$ لوزی است، پس دو زاویه مرکزی $AO'B$ و $AO'B$ در این دو دایره با هم برابرند، پس $\widehat{AEB} = \widehat{AE'B}$.

۳۰۱. چون کمان K' از دایره I مساحت دایره K را نصف می کند، پس کمان K' به طور کامل نمی تواند در یک طرف قطر دایره K قرار گیرد. یعنی هر قطر دلخواه از دایره K ، کمان K' را قطع می کند و نقطه O مرکز دایره K در داخل دایره I قرار می گیرد. به این ترتیب شعاع OA از دایره K ، در داخل دایره I قرار دارد و نقطه برخورد قطر AC با کمان K' ، یعنی نقطه D ، روی شعاع OC واقع است.



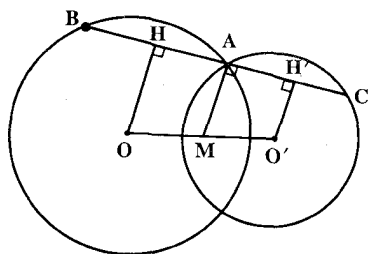
چون طول کمان K' از طول $AD+BD$ بزرگتر است، کافی است ثابت کنیم $BD > DC$ ، ولی این نابرابری درست است زیرا، دایره به مرکز D و شعاع برابر DC ، در داخل دایره K قرار دارد.

۳۰۲. نیمساز زاویه MAP عمود منصف پاره خط MP است که از وسط کمان MB می گذرد. حال در مثلث MNB نیمساز زاویه MNB و عمود منصف ضلع MB یکدیگر را بر دایره محیطی مثلث MNB قطع می کنند که وسط قوس MB است، پس عمود منصفهای دو ضلع MP و MB از مثلث MPB یکدیگر را در وسط قوس MB قطع می کنند، در نتیجه عمود منصف ضلع سوم BP نیز از این نقطه می گذرد.



۳۰۳. خطهای CT و CT' مماس بر دو دایره در نقطه C را رسم می کنیم. زاویه TCT' مقدار ثابتی دارد، پس مجموع دو زاویه x و y ثابت است و در نتیجه $\widehat{CE} + \widehat{CF}$ مقدار ثابتی است.

۵.۴.۳. وتر



۳۰۴. اگر از O و O'، بترتیب، عمودهای OH و O'H' را بر قاطع BAC فرود آوریم، چهار ضلعی OHH'O' دوزنقه قائم الزاویه ای است که نقطه M وسط ساق مایل آن و MA موازی دو قاعده است، پس نقطه A وسط HH' است، یعنی

$$AH = AH' \text{ اما } AH = \frac{AB}{2} \text{ و } AH' = \frac{AC}{2} \text{ پس } AB = AC \text{ می باشد.}$$

۳۰۵. ثابت کنید: $\hat{D} = \hat{C}$.

۶.۴.۳. قطر

۳۰۶. این برابری روشن است:

$$\hat{MAB} + \hat{MBA} = \frac{1}{2} \hat{AO'B}$$

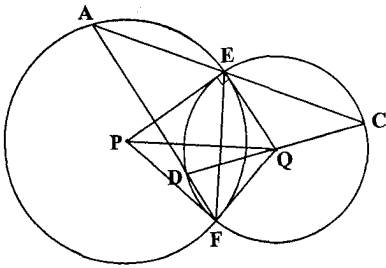
چون OA بر O'A و OB بر O'B عمود است، پس

$$\hat{AO'B} = 180^\circ - \hat{AOB}$$

(در این جا، O و O' مرکزهای دو دایره اند)، یعنی

$$\hat{XAB} + \hat{YBA} + \frac{1}{2} \hat{AOB} = 90^\circ$$

بنابراین کمان XBAY برابر 180° و پاره خط راست XY، قطر دایره است.



۳۰۷. فرض کنید، خطهای EA و FA خطهایی باشند که از E و F، نقطه های برخورد دو دایرة متعامد (P) و (Q)، به نقطه A از (P) رسم شده اند و (Q) را مجدداً در C و D قطع کنند (شکل)؛ داریم:

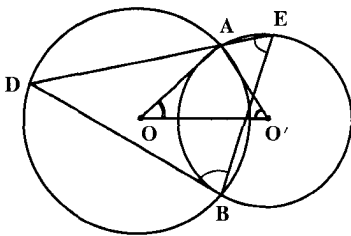
$$\widehat{EAF} = \frac{1}{2} \widehat{EPF} = \widehat{EPQ} \text{ و } \widehat{ECF} = \frac{1}{2} \widehat{EQF} = \widehat{EQP}$$

۷.۴.۳. زاویه

۱.۷.۴.۳. اندازه زاویه

۳۰۸. اگر M نقطه برخورد CD و C'D' باشد و از نقطه A دو مماس AT و AT' را برداریم، رسم کنیم، $\widehat{DMD'} = \widehat{TAT'}$ است.

۳۰۹. از تساویهای $\widehat{PMB} = \widehat{TBM}$ ، $\widehat{PM'B} = \widehat{T'B'M'}$ و این ویژگی که مجموع زاویه های مثلث PMM' برابر 180° و زاویه نیم صفحه است، استفاده کنید.



۳۱۰. دو دایرة O و O' متقاطع در نقطه های A و B را در نظر گرفته، قاطع DAE را رسم می کنیم و از B به D و E وصل می کنیم.

زاویه DBE مقدار ثابتی دارد. زیرا به دلیل

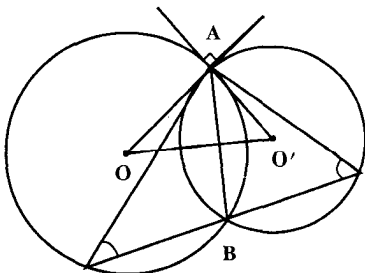
برابری دو زاویه $\widehat{O} = \widehat{D}$ و $\widehat{O'} = \widehat{E}$ زاویه

سوم دو مثلث OAO' و DBE برابرند، یعنی

$$\widehat{DBE} = \widehat{OAO'} = C^{te}$$

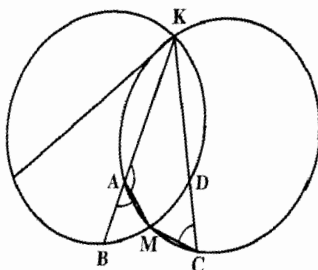
۳۱۱. زاویه بین مماسهای بر دو دایره در هر نقطه

برخورد 90° است. پس دو دایره بر هم عمودند.



۲.۷.۴.۳. رابطه بین زاویه‌ها

۳۱۲. چون چهارضلعی $AKCM$ ، محاطی است، پس $\hat{KAM} = 180^\circ - \hat{MCD}$ ولی چون $\hat{MAB} = \hat{MCD}$ ، بنابراین $\hat{MAB} = 180^\circ - \hat{KAM}$.



۳۱۳. وتر مشترک دو دایره را رسم کنید. مجموع زاویه‌های مثلث CAM برابر 180° است. اما...

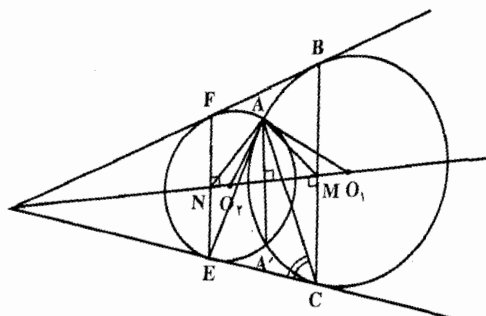
۳۱۴. نقطه دیگر برخورد دو

دایره را A' می‌نامیم.

خط‌المركزين O_1O_2

عمود منصف پاره‌خطهای

EF و AA' ، BC است.



۸.۴.۳. پاره خط

۱.۸.۴.۳. اندازه پاره خط

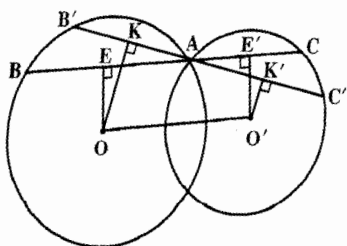
۳۱۵. از نقطه‌های O و O' مرکزهای دو دایره

عمودهای OE و $O'E'$ را بر وتر BC که

موازی OO' است، فرود می‌آوریم.

چهارضلعی $OO'E'E$ مستطیل است،

پس $OO' = EE' = \frac{BC}{2}$. اگر $B'C'$



قاطع دلخواه دیگری باشد که از نقطه A در دو دایره رسم شده باشد و از نقطه‌های O و

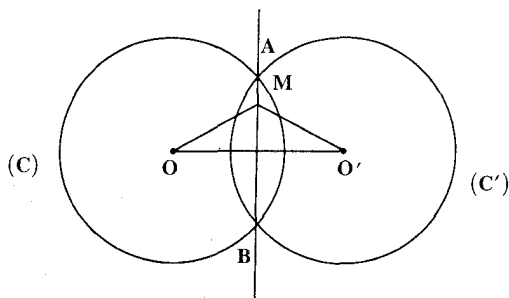
O' عمودهای OK و $O'K'$ را بر $B'C'$ فرود آوریم، چهارضلعی $OKK'O'$ دوزنقه

قائم الزاویه است، یعنی $\frac{B'C'}{p} = OO' > KK'$ ، پس $EE' > KK'$ و در نتیجه $BC > B'C'$ است.

۳.۸.۴.۳. رابطه بین پاره خطها

۳۱۶. راه اوّل. نقطه C مرکز تقارن شکل حاصل از دو دایره است.

راه دوم. چون AB عمود منصف OO' و دو دایره برابرند. دو مثلث OCM و O'CM' همنهشتند.



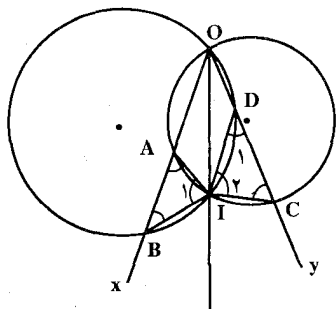
۳۱۷. وتر مشترک دو دایره متساوی، عمود منصف خط المرکزین آن دو دایره است و هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

۳۱۸. از D به F وصل کنید و برابری $E\hat{F}D = E\hat{D}F$ را ثابت کنید.

۳۱۹. چهار ضلعی MBDC متوازی الاضلاع است.

۳۲۰. از B به A وصل کنید، $A\hat{B}D = A\hat{B}C = 90^\circ$ است، پس $C\hat{B}D = 18^\circ$ یعنی CD از B می گذرد و در مثلث ACD، O و O' وسطهای دو ضلع AC و AD می باشند.

۳۲۱. فرض کنید. خط راست AM، دایره ای را که از B، C و M می گذرد، برای بار دوم، در نقطه ای مانند D قطع کند. در این صورت، $M\hat{D}B = M\hat{B}A = M\hat{A}C$ و $M\hat{D}C = M\hat{B}C = M\hat{A}B$ در نتیجه، ABCD متوازی الاضلاع است.



۳۲۲. چون I وسط کمانهای $\widehat{AIC}$ و $\widehat{DIB}$ است، پس $IA=IC$ و $DI=IB$ چون ODIB محاطی است، پس $\hat{B} = \hat{D}_1$ و به همین علت $\hat{C} = \hat{A}_1$ ، پس $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ و بنابراین دو مثلث AIB و DIC بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین با یکدیگر برابرند، پس: $AB=CD$.

۳۲۴. دایره به قطر AB را رسم کنید و نقطه تقاطع آن با

دو ضلع را F و G بنامید، داریم: $AF=AG$. ثابت کنید که $AC+AD=2AF$.
قرینه C نسبت به نیمساز را E بنامید. حال کافی است، ثابت کنید که $AE=FD$ است.

۳.۴.۹. خطهای: موازی، عمود بر هم، ...

۳.۴.۹.۱. خطها موازی اند

۳۲۵. ثابت کنید: $\hat{TBC} = \hat{BCP}$.

۳۲۶. امتداد CC' را $C'x$ بنامید و به کمک ویژگی چهارضلعیهای محاطی ثابت کنید که

$$\hat{DCC'} = \hat{D'C'x}$$

۳۲۷. اگر از A به B وصل کنیم چهارضلعیهای ABPM و ABQN دوزنقه متساوی الساقین می باشند.

۳.۴.۹.۲. خطها بر هم عمودند

۳۲۸. از نقطه O خطی موازی MM' رسم کنید تا $M'C$ را در نقطه H قطع کند. دو مثلث OHC و $M'AC$ همنهشتند.

۳.۴.۹.۳. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۳۲۹. از A به نقطه های B و C وصل می کنیم. در دایره O'

دو زاویه محاطی $\hat{ABE}$ و $\hat{ACE}$ با هم برابرند که

چون $\hat{ABE} = \alpha$ زاویه ثابتی است، پس زاویه $\hat{ACE}$

نیز مقدار ثابتی دارد. اما رأس این زاویه روی دایره

ثابت O واقع است و یک ضلع آن نیز از نقطه ثابت A

می گذرد، پس ضلع دیگرش یعنی CE نیز از نقطه ثابت

K واقع بر دایره ثابت O می گذرد.

۳۳۰. از P به Q وصل می کنیم. چهارضلعی PQSR محاطی

است، پس $\hat{TRP} = \hat{PQS} = \alpha = C^{te}$ ، زیرا زاویه PQS مقدار ثابتی دارد. در نتیجه

کمان $PT = 2\alpha$ از دایره O مقدار ثابتی خواهد داشت و چون نقطه P ثابت است، نقطه

T نیز ثابت می باشد، یعنی خط RS همواره از نقطه ثابت T واقع بر دایره O می گذرد.

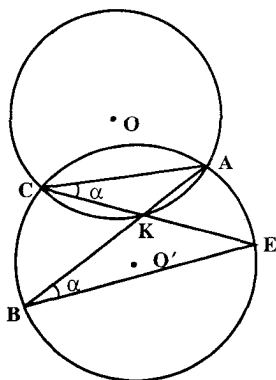
۳.۴.۹.۴. خط مماس بر دایره است

۳۳۱. فرض کنید، O معرف نقطه برخورد AM و DC باشد (شکل). از نقطه B،

مماسی بر دایره دوم رسم می کنیم و نقطه برخورد آن با AC را به K نشان

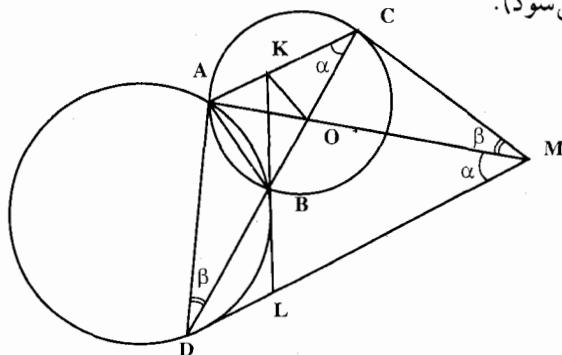
می دهیم (مثل فرض مسأله). به روشنی، حکم مسأله معادل این ادعاست که

KO با CM موازی است. فرض کنید، زاویه مقابل به کمان AB، در دایره اول برابر با α و



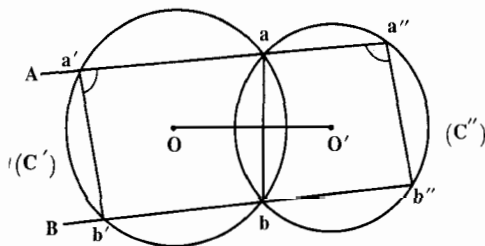
در دایره دوم برابر با β باشد، در این صورت $\hat{BDM} = \hat{BAD}$ ، $\hat{BCM} = \hat{BAC}$ و
 $\hat{DMC} = 180^\circ - \hat{BDM} - \hat{BCM} = 180^\circ - \hat{BAD} - \hat{BAC} = 180^\circ - \hat{DAC}$

در نتیجه، ADMC چهارضلعی محاطی است و $\hat{AMC} = \beta$ ؛ علاوه، اگر مماس BK،
 DM را در نقطه L قطع کند، آن وقت $\hat{KBO} = \hat{LBD} = \hat{BDL} = \hat{CAM}$ ؛ بنابراین
 KABO هم، چهارضلعی محاطی است، و $\hat{KOA} = \hat{KBA} = \beta$ ، یعنی KO با CM موازی است (حالت‌های دیگر جای نقطه‌های D، B و C نسبت به هم، به روش مشابه بررسی می‌شود).



۱۰.۴.۳. شکل‌های ایجاد شده

۳۳۲. وتر مشترک ab را رسم کنید و از ویژگی چهارضلعی‌های محاطی استفاده کنید و ثابت کنید که $\hat{a'} + \hat{a''} = 180^\circ$ است.



۳۳۳. خط‌المركزین، عمود منصف وتر مشترک دو دایره است و BAD متساوی‌الساقین در رأس A است.

۳۳۴. با فرض $\hat{BCE} = \alpha$ ، ثابت کنید: $\hat{EDB} = 180^\circ - \alpha$.

۱۱.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۳۵. گزینه‌های (ب) و (د) درست است.

۳۳۶. وتر MD موازی با AB را رسم کرده، از

تساوی دو مثلث MAD و AMB نتیجه

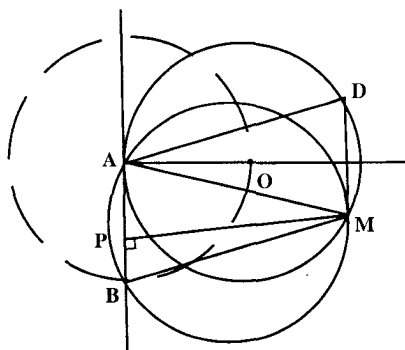
بگیرید که دایره محیطی مزبور با دایره O

مساوی است و مکان هندسی مرکز آن

دایره‌ای است به مرکز A و به شعاع OA.

این دایره همواره با دایره ثابتی که مرکزش

A و شعاعش ۲OA می‌باشد مماس است.



۱۲.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۳۷. ۱. دو دایره شعاعهای برابر دارند.

۲. دو زاویه C و C' برابرند.

۳۳۸. الف. خط‌المرکزین دو دایره عمودمنصف وتر مشترک آن دو دایره است.

ب. مثلثهای ACD و BCD در رأسهای A و B متساوی‌الساقین هستند.

۵.۳. دو دایره مماس درون

۲.۵.۳. زاویه

۱.۲.۵.۳. اندازه زاویه

۳۳۹. اگر O_1 مرکز دایره کوچکتر باشد و $\hat{BOA} = \varphi$ ، آن گاه $\hat{BAO} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ ،

$\hat{CO_1A} = 90^\circ + \varphi$ و $\hat{CAO_1} = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$. بنابراین

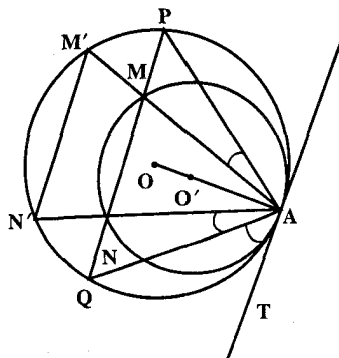
$$\hat{BAC} = \hat{BAO} - \hat{CAO_1} = 45^\circ$$

۲.۲.۵.۳. رابطه بین زاویه‌ها

۳۴۰. مماس مشترک دو دایره را رسم کنید.

۱.۳۴۱. اگر خطهای AM و AN دایره O را در نقطه‌های M' و N' قطع کنند،

است. زیرا اگر AT مماس مشترک دو دایره O و O' را رسم کنیم، داریم:



$$\widehat{NMA} = \frac{\widehat{NA}}{2} = \widehat{NAT} \text{ و } \widehat{N'M'A} = \frac{\widehat{N'A}}{2} = \widehat{N'AT} = \widehat{NAT}$$

$$\text{پس } \widehat{M'P} = \widehat{N'Q} \text{ و در نتیجه } \widehat{PAM} = \frac{\widehat{PM'}}{2} = \widehat{NAQ} = \frac{\widehat{N'Q}}{2}$$

۲. اگر زاویه $\widehat{MAN}$ را به زاویه های متساوی $\widehat{PAM}$ و $\widehat{NAQ}$ اضافه کنیم، داریم:

$$\widehat{PAN} = \widehat{MAQ}$$

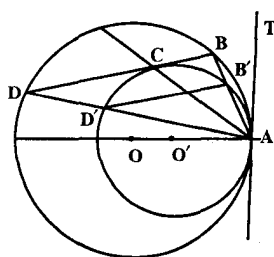
۳.۵.۳. پاره خط

۳۴۲. از نقطه O به نقطه های C و C' وصل کنید و از ویژگی مثلث متساوی الساقین استفاده کنید.

۴.۵.۳. مسأله های ترکیبی

۱.۳۴۳. خط AT مماس مشترک دو دایره را رسم می کنیم. داریم:

$$\widehat{TAB'} = \widehat{B'O'A} = \widehat{TAB} = \widehat{BDA} \Rightarrow B'D' \parallel BD$$



۲. چون مماس BD با وتر B'D' از دایره O موازی

است، پس $\widehat{D'C} = \widehat{CB'}$ ، بنابراین

$\widehat{CAD} = \widehat{CAB}$ ، یعنی AC نیمساز زاویه BAD است.

۳۴۴. اگر از نقطه N به نقطه C وصل کنیم، دو مثلث قائم الزاویه ONC و OMH همنهشتند.

۶.۳. دو دایرهٔ یکی درون دیگری

۲.۶.۳. شعاع

۳۴۵. اگر نقطه را دایره به شعاع صفر فرض کنیم و شعاع دایره‌های مورد نظر را R' بنامیم، $0 \leq R' < 2$ است.

۳۴۶. گزینه (هـ) درست است. چون A_1, A_2 و $A_1 + A_2$ یک تصاعد حسابی است، پس:

$$A_2 - A_1 = (A_1 + A_2) - A_2; 2A_1 = A_2$$

اگر r شعاع دایره کوچکتر باشد، آن گاه،

$$9\pi = A_1 + A_2 = 3A_1 = 3\pi r^2; r = \sqrt{3}$$

۳.۶.۳. خط و دایره

۳۴۷. برای روشنی وضع، فرض کنید B_1 روی کمان A_1A_2 ، که دور قطعه‌ای است که دایره

β را دربر ندارد، قرار دارد. فرض کنید $C_1, C_2, \dots$ به ترتیب، نقطه‌های تماس A_1A_2 ،

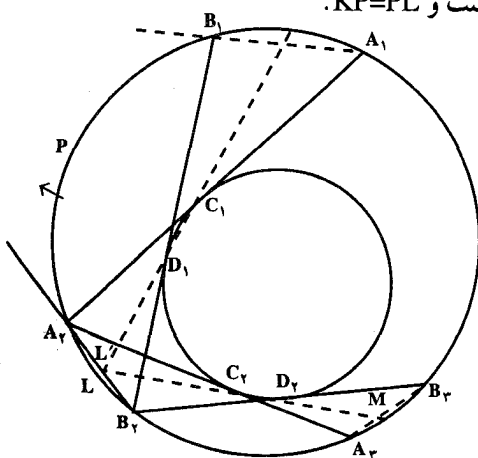
$A_2A_3, \dots$ با دایره β و $D_1, D_2, \dots$ نقطه‌های تماس $B_1B_2, B_2B_3, \dots$ با همین دایره

باشند (شکل): L, K, P نقطه‌های برخورد D_1C_1 و A_1B_1 ، A_2B_2 و D_2C_2 باشند

و A_2B_2 هستند. در مثلث‌های A_1KC_1 و D_1LB_2 داریم: $\hat{K}C_1A_1 = \hat{L}D_1B_2$

$C_1\hat{A}_1K = D_1\hat{B}_2L$. به این ترتیب، $C_1\hat{K}A_1 = D_1\hat{L}B_2$ ، یعنی، KPL مثلثی

متساوی الساقین است و $KP=PL$.



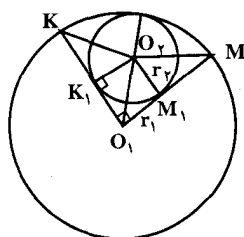
دایره γ ، مماس بر KP و PL ، بترتیب، در نقطه‌های K و L ، را در نظر بگیرید. مرکز این دایره روی خط راستی قرار دارد که از مرکز دایره‌های α و β می‌گذرد. فرض کنید خط D_1C_1 و A_2B_2 ، A_3B_3 و A_2B_2 را، بترتیب، در نقطه‌های L' و M قطع کند. مثل حالت قبل، ثابت می‌کنیم که دایره‌ای مانند γ' با مرکز واقع بر خط راست گذرنده از مرکز دایره‌های α و β و مماس بر A_2B_2 و A_3B_3 ، بترتیب، در نقطه‌های L' و M ، وجود دارد. ثابت می‌کنیم که γ' و γ برهم منطبقند. برای این کار، کافی است ثابت کنیم که L و L' برهم منطبقند. داریم:

$$\frac{A_2L}{LB_2} = \frac{S_{A_2C_1D_1}}{S_{B_2C_1D_1}} = \frac{\frac{1}{2} D_1C_1 \cdot A_2C_1 \cdot \sin A_2 \hat{C}_1 D_1}{\frac{1}{2} D_1C_1 \cdot B_2D_1 \cdot \sin B_2 \hat{D}_1 C_1} = \frac{A_2C_1}{B_2D_1}$$

به همین ترتیب، $\frac{A_2L'}{L'B_2} = \frac{A_2C_1}{B_2D_1} = \frac{A_2C_1}{B_2D_1}$ ، یعنی L و L' برهم منطبقند. تبصره. از نحوه استدلال معلوم می‌شود که در حالت ما، نقطه‌های تماس γ با خطهای راست A_1B_1 ، A_2B_2 ، ... در درون پاره خطهای A_1B_1 ، A_2B_2 ، ... واقعند.

۴.۶.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

$$S_{MO_1KO_2} = 2S_{O_1O_2M} = 2\left(\frac{1}{2} r_1 r_2\right) = r_1 r_2$$



۳۴۸

۷.۳. دو دایره هم مرکز

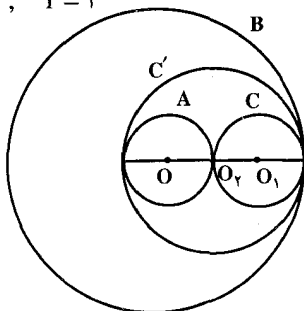
۲.۷.۳. شعاع

۳۴۹. اگر دایره C با دایره B مماس درون و با دایره A مماس برون باشد و شعاع دایره C را r و فاصله مرکز آن از نقطه O مرکز مشترک دو دایره را d بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} d = 3 - r \\ d = 1 + r \end{cases} \Rightarrow d = 2, \quad r = 1$$

و در صورتی که دایره C با دایره B مماس درون و با دایره A نیز مماس درون باشد، داریم:

$$\begin{cases} d = 3 - r \\ d = r - 1 \end{cases} \Rightarrow d = 1, \quad r = 2$$



۳.۷.۳. وتر

۳۵۰. این وترها از مرکز مشترک دو دایره به یک فاصله اند.

۳۵۱. این وترها از مرکز مشترک دو دایره به یک فاصله اند.

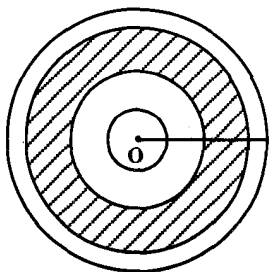
۴.۷.۳. پاره خط

۳۵۲. اگر از O مرکز مشترک دو دایره عمود OH را بر وتر AD فرود آوریم، نقطه H وسط پاره خطهای AD و BC است، پس $AB = CD$.

۵.۷.۳. وضع نسبی دو دایره

۳۵۳. اگر خط المکزین دایره (C) با دایره های A و B را d بنامیم، شرط آن که دو دایره C و A متقاطع باشند آن است که:

$$2 - 1 < d < 2 + 1 \Rightarrow 1 < d < 3$$



راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴. سه دایره و بیشتر

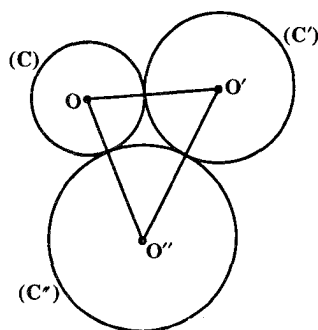
۱.۴. سه دایره

۲.۱.۴. شعاع

۳۵۴. نقطه‌های تماس دایره‌ها، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۲ سانتیمتر را می‌سازند

و شعاع دایره محیطی این مثلث برابر $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ است.

۳۵۵. ۲۴ سانتیمتر.



۳۵۶. اگر O, O', O'' و مرکزهای سه دایره باشند،

مثلث $OO'O''$ مثلث قائم‌الزاویه با ضلعهای ۳،

۴ و ۵ است. نقطه‌های تماس دایره‌ها، مثلثی با

ضلعهای مشخص می‌سازند و دایره محیطی آن

قابل رسم و شعاع آن قابل محاسبه است.

۳.۱.۴. نقطه و دایره

۳۵۷. اگر از نقطه B به نقطه‌های M و M' وصل کنیم، $\widehat{ABM'} = \widehat{ABM}$ است.

۳۵۹. نقطه برخورد AB' و BA' را M بنامید و وتر مشترکهای PA' و PB' و PC' را

رسم کنید. با توجه به محاطی بودن چهارضلعیهای $PA'BC'$ و $PB'AC'$ ، ثابت کنید،

چهارضلعی $PA'MB'$ محاطی است.

۴.۱.۴. کمان

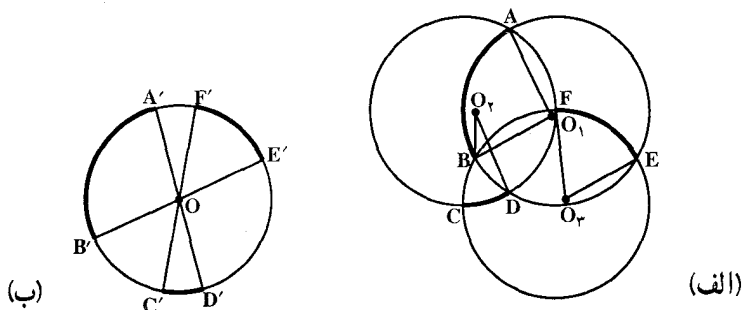
۳۶۰. مسأله (a) حالت خاصی از مسأله (b) است و شبیه آن حل می‌شود، پس اندیشه مسأله (b)

را می‌دهیم:

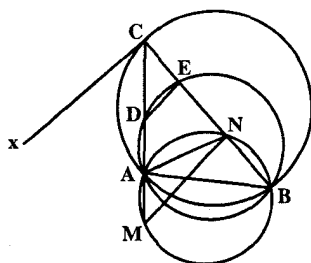
O_1, O_2 و O_3 را مرکزهای دایره‌هایی می‌گیریم که به ترتیب شامل کمانهای AB ، CD و EF هستند (شکل الف). در این صورت داریم:

$$\overline{O_1A} = -\overline{O_1D}, \quad \overline{O_1B} = -\overline{O_1E}, \quad \overline{O_2F} = -\overline{O_2C}$$

(به عنوان ضلعهای روبه روی لوزیها). بنابراین اگر قطاعهای O_1AB ، O_3EF و O_2CD را به مرکز مشترک O منتقل کنیم، سه قطاع به دست می آید که، همراه با قرینه های آنها نسبت به O ، دایره را به طور کامل پر می کنند (شکل ب).



۵.۱.۴. وتر



$$\widehat{xCA} = \widehat{CDE} = \widehat{CMN}$$

۳۶۱. دو دایره دلخواه رسم می کنیم که دایره اول CA و CB را بترتیب در M و N و دایره دوم این دو ضلع را در D و E قطع کند. $MN \parallel DE$ است، برای اثبات مماس بر دایره محیطی مثلث ABC در رأس C را رسم کنید و ثابت کنید:

۶.۱.۴. قطر

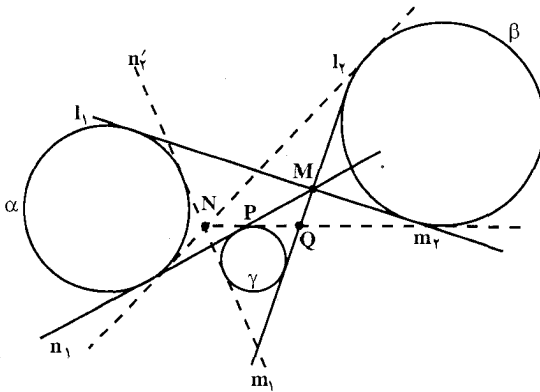
۳۶۲. اگر از O_1 مرکز دایره A به نقطه های H و G وصل کنیم، $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ ، $\widehat{HO_1F} = \widehat{O_2}$ و $\widehat{GO_1E} = \widehat{O_3}$ است.

۷.۱.۴. پاره خط

۳۶۳. گزینه (الف) درست است.

۸.۱.۴. خط و دایره

۳۶۴. فرض کنید، M نقطه برخورد مماسهای l_1 ، m_1 و n_1 ، و N نقطه برخورد l_2 و m_2 باشد (شکل از N ، خط راست n_2 را، مماس بر α و متمایز از l_2 ، رسم می‌کنیم. می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای n_1 ، m_1 و n_2 بر یک دایره مماس‌اند. این دایره، در مثلث PMQ محاطی خارجی است (این دایره بر ضلع PQ مماس است)، یعنی بر γ منطبق است.



نکته. شکل متناظر با حالت کلی ترتیب دایره‌هایی است که در شرطهای مسأله صادقند.

۳۶۵. مرکزهای دو دایره به قطرهای AM و BM را به ترتیب O و O' بنامید. از Q و R به M وصل کنید. ثابت کنید، OQ و $O'R$ بر QR عمودند.

۳۶۶. گزینه (د) درست است.

۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

$$2r^2(2\sqrt{3}+3) \quad ۳۶۷$$

۱۰.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۶۸. ۱. چون خط‌المركزین دو دایره به مرکزهای D و J مساوی تفاضل شعاع این دو دایره است، پس این دو دایره مماس درونی می‌باشند. یعنی کمان EF با کمان FB مماس

است و به همین دلیل کمان $\widehat{EA}$ با کمان $\widehat{EF}$ مماس می باشد.

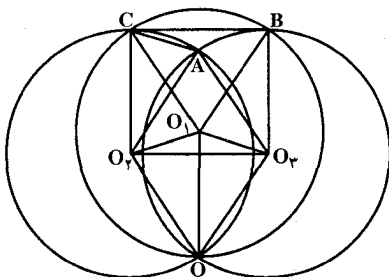
۲. اگر فقط $AC=CD$ باشد، E و F روی یک قوس دایره به مرکز I قرار نمی گیرند و خاصیت بالا برقرار نیست. ولی اگر تنها $AC=DB$ باشد، باز هم این خاصیت برقرار است.

۲.۴. چهار دایره

۲.۲.۴. شعاع

۳۷۰. گزینه (ج) درست است.

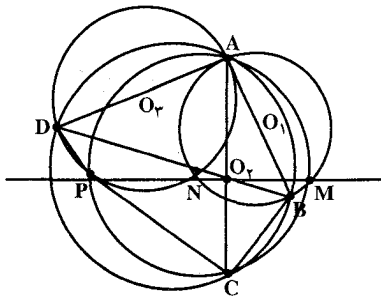
۳۷۱. دایره های داده شده، دایره های محیطی مثلثهای OAB و OCA ، OBC ، بنابراین نقطه های O_1 ، O_2 و O_3 مرکزهای این دایره ها از نقطه O به فاصله R می باشند، یعنی $OO_1 = OO_2 = OO_3 = R$ است. لذا دایره محیطی مثلث $O_1O_2O_3$ شعاعش مساوی R می باشد. حال ثابت می کنیم که مثلث ABC با مثلث $O_1O_2O_3$ برابر است. چهار ضلعهای BO_3OO_1 و CO_3OO_1 لوزی می باشند. زیرا چهار ضلعشان مساوی R است. بنابراین O_2B و O_2C با O_1O_2 موازی و مساویند. پس چهار ضلعی BCO_2O_3 متوازی الاضلاع است و $BC = O_2O_3$ می باشد. به همین ترتیب با استفاده از لوزیهای AO_3OO_2 و BO_3OO_3 ثابت می شود که $AB = O_1O_2$ و $AC = O_1O_3$ است. در نتیجه مثلث $O_1O_2O_3$ مساوی با مثلث ABC است. در نتیجه شعاع دایره محیطی مثلث ABC برابر R است.



۳.۲.۴. نقطه و دایره

۳۷۲. اگر AB ، AC و AD سه وتر از دایره O باشند، دایره هایی که این سه وتر قطره های آنها هستند، از پای عمودهایی که از نقطه A بر BC ، CD و DB فرود می آیند می گذرند. لذا بنا به قضیه خط ممسمن بر سه نقطه واقع بر یک استقامت متقاطع می شوند. بعکس اگر

سه دایرة دو به دو متقاطع که سه وتر AB ، AC و AD قطرهای آنها هستند، در سه نقطه واقع بر یک استقامت متقاطع باشند، نقطه A روی دایره ای است که از سه نقطه B ، C و D می گذرد. زیرا این سه دایره دو به دو



از پای عمودهایی که از A بر خطهای BC ، CD و DB فرود می آیند می گذرند و چون این سه نقطه بر یک استقامت می باشند، بنا به عکس قضیه خط ممسّن، چهار نقطه A ، B ، C و D روی یک دایره قرار دارند.

۳۷۳. اثبات شبیه قضیه سالمون است.

۳۷۴. حکم از نتیجه کلی تری به دست می آید: اگر روی ضلعهای مثلث، دایره هایی رسم شوند، به طوری که، کمانهای آنها که بیرون مثلث قرار گرفته اند جمعاً برابر با 4π یا 2π باشند، آن وقت این دایره ها در یک نقطه مشترکند (در حالت ما، برای مثلثی مناسب، می توانیم مثلث با رأسهای وسط ضلعهای مثلث ABC را بگیریم، و ثابت کنیم که سه دایره که از وسطهای AB ، AC و AD ؛ BA ؛ BC و BD ؛ CA ؛ CB و CD می گذرند، در یک نقطه مشترکند).

۳۷۵. فرض کنید، A ، B ، C و D نقطه های داده شده باشند و D_1 نقطه برخورد خطهای راست قرینه با AD ، BD و CD ، نسبت به نیمسازهای متناظر از مثلث ABC باشد. می دانیم که دایره های پایی نقطه های D و D_1 نسبت به مثلث ABC ، بر هم منطبقند. فرض کنید خطهای راست قرینه با BA ، CA و DA ، نسبت به نیمسازهای متناظر از مثلث BCD ، در نقطه ای مانند A_1 متقاطع باشند. بسادگی می توان ثابت کرد که نقطه های A_1 و D_1 ، نسبت به خط راست CB قرینه اند. در نتیجه، دایره های پایی نقطه D (یا D_1) نسبت به مثلث ABC و نیز نقطه A (یا A_1) نسبت به مثلث BCD ، از وسط A_1D_1 می گذرند. با پیدا کردن نقطه های B_1 و C_1 به روش مشابه، مشاهده می کنیم که هر یک از دایره های پایی مورد بحث، از وسط پاره خطهایی که نقطه های A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 را به هم وصل می کنند، متناظر با آن، می گذرد.

۴.۲.۴. خط و دایره

۳۷۶. ثابت کنید که هر دو پاره خط را نقطه برخوردشان نصف می کند.

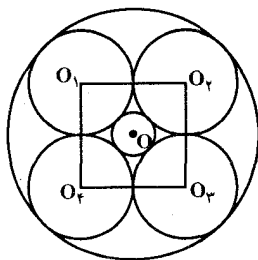
۵.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۷۷. ۱. خط AB عمود منصف پاره خط OO' و نقطه M وسط پاره خط OO' است.
 ۲. داریم : $AO = AO' = BO' = BO$.

۳.۴. پنج دایره و بیشتر

۲.۳.۴. شعاع

۳۷۸. دو دایره جواب مسأله است. یکی به شعاع $4 - 4\sqrt{2}$ سانتیمتر و دیگری به شعاع $4 + 4\sqrt{2}$ سانتیمتر.



۳.۳.۴. نقطه و دایره

۳۷۹. نقطه برخورد دایره‌های اول، دوم، چهارم و پنجم را A ، نقطه برخورد دایره‌های اول، سوم، چهارم و پنجم را B و نقطه برخورد دایره‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم را C می‌نامیم. هر سه نقطه A ، B و C نمی‌توانند جدا از هم باشند. زیرا این سه نقطه بر محیط دایره‌های چهارم و پنجم قرار دارند و دو دایره نمی‌توانند بیش از دو نقطه برخورد داشته باشند. بنابراین از سه نقطه A ، B و C دو تا بر هم منطبقند. مثلاً فرض کنید $A=B$ ، در این صورت، همه دایره‌ها، از نقطه A می‌گذرند.

۳۸۱. فرض کنید، برخلاف حکم مسأله، نقطه‌ای مانند O ، متعلق به هر شش دایره وجود داشته باشد، مرکز دایره‌ها را بترتیب و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به دور نقطه O ، با O_1 ، O_2 ، O_3 ، O_4 ، O_5 ، O_6 نشان می‌دهیم. (شکل را ببینید؛ بنابر شرط مسأله، نقطه O نمی‌تواند مرکز هیچ کدام از دایره‌ها باشد.) چون مجموع زاویه‌های O_1OO_2 ، O_2OO_3 ، O_3OO_4 ، O_4OO_5 ، O_5OO_6 ، O_6OO_1 برابر است با 360° درجه، دست کم یکی از آنها، از 60° درجه تجاوز نمی‌کند. مثلاً،

فرض کنید: $\angle O_1 \hat{O} O_2 \leq 60^\circ$ ؛ و از بین دو زاویه باقی مانده در مثلث $O_1 O_2 O_3$ ، زاویه $O_1 O_2 O_3$ بزرگتر باشد (اگر زاویه $O_1 O_2 O_3$ برابر صفر باشد، بلافاصله نتیجه می شود:

$O_2 O_3 \geq O_2 O_1$). در این صورت داریم: $\angle O_1 \hat{O} O_2 \geq 60^\circ \geq \angle O_1 \hat{O} O_3$. از آن جا $O_2 O_3 \geq O_2 O_1$. به این ترتیب، دایره به مرکز O_2 ، که شامل نقطه O است، شامل نقطه O_1 ، مرکز دایره دیگر هم می شود، که شرط مسأله را نقض می کند.

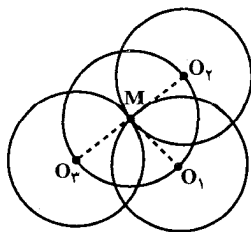
۳۸۳. خیر، درست نیست. دسته ای از دایره ها را در نظر بگیرید که مرکز آنها، همه گره های

شبکه های با گام $\frac{1}{100}$ در درون مربع 10×10 باشد.

۳۸۴. مجموعه دایره ها را متناهی فرض می کنیم. در این صورت، دایره به مرکز O با کمترین شعاع r ، بر شش دایره به مرکزهای $O_1, \dots, O_6$ (که دور نقطه O ، به همین ردیف و در جهت حرکت عقربه های ساعت قرار دارند؛ شکل را ببینید) و شعاعهای $r_1, \dots, r_6$ مماس است. در مثلث $O_1 O_2 O_3$ ، ضلع $O_1 O_2 = r_1 + r_2$ ، بزرگترین ضلع است، از آن جا زاویه $O_1 O_2 O_3$ از 60° درجه کمتر نیست. به همین ترتیب، به دست می آید:

$\angle O_1 \hat{O} O_2 \geq 60^\circ, \dots, \angle O_5 \hat{O} O_6 \geq 60^\circ$. ولی مجموع این شش زاویه غیر متقاطع، برابر 360° درجه است، بنابراین، هر یک از آنها برابر 60° درجه و هر یک از زاویه های دیگر مثلثهای $O_1 O_2 O_3, \dots, O_5 O_6 O_1$ (که از 60° درجه تجاوز نمی کنند)، برابر 60° درجه می شود، یعنی همه این مثلثها متساوی الاضلاعند و: $r = r_1 = \dots = r_6$. چون دایره به مرکز O_1 ؛ مثلاً کوچکترین شعاع را دارد، اگر همین استدلال را در مورد آن به کار ببریم، نتیجه می شود که بر دایره ای به همین شعاع و مرکز $O_7 \neq O$ مماس است، که بر خط راست $O O_1$ قرار دارد. به همین ترتیب دایره اخیر هم، بر دایره ای به همین شعاع و به مرکز $O_8 \neq O_1$ مماس می شود که بر همان خط راست قرار دارد و غیره. بنابراین مجموعه دایره ها، نامتناهی، و حکم مسأله درست است.

۳۸۵. دایره ای است به مرکز نقطه ثابت داده شده و به شعاع عدد ثابت داده شده در مسأله.



۴.۳.۴. کمان

۳۸۶. به ازای $n=1$ ، محیط دایره به شعاع واحد، طولی برابر $2\pi \geq 2n$ دارد، یعنی حکم

مسأله، برای $n=1$ ، درست است. اکنون $n \geq 2$ می گیریم. ابتدا فرض می کنیم، مرکزهای

همه دایره ها روی یک خط راست

باشند. مرکزی را در نظر می گیریم

که، همه مرکزهای دیگر، نسبت به

آن روی یک نیمخط راست واقع

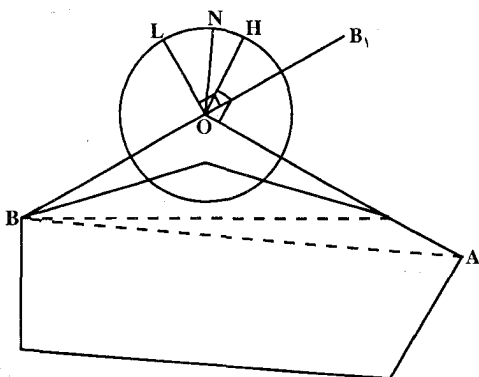
باشند. در این صورت، عمودی که

از این مرکز انتخابی، بر خط

راست داده شده رسم کنیم، کمانی

از دایره متناظر را جدا می کند که،

برای طول آن داریم: $n \geq \frac{2\pi}{n}$ و



روشن است که، این کمان با هیچ کدام از دایره های دیگر، برخوردی ندارد.

اکنون به حالتی می پردازیم که مرکزهای دایره ها روی یک خط راست نباشند. از بین

همه چندضلعیهای محدبی که رأسهای آن بر مرکزهای دایره ها منطبق باشند (مجموعه

این گونه چندضلعیها، تهی نیست، زیرا دست کم می توان یک مثلث پیدا کرد)، آن را

در نظر می گیریم که در خارج آن، حداقل تعداد این نقطه ها، واقع باشند. ثابت می کنیم

که، در بیرون این چندضلعی، هیچ نقطه ای وجود ندارد. در واقع، اگر نقطه ای مثل D،

در خارج این چندضلعی باشد، از این نقطه، خط راستی می گذرانیم که چندضلعی را

قطع نکند و آن را، دور نقطه O دوران می دهیم تا ابتدا از رأس اول A و سپس از رأس

آخر B (از چندضلعی) بگذرد (شکل). سرانجام، همه رأسهای از چندضلعی را که در

مثلث AOB قرار دارند، تنها با سه رأس A، O و B عوض می کنیم. در این صورت،

چندضلعی جدیدی به دست می آید که، در بیرون آن، تعداد کمتری نقطه، نسبت به

چندضلعی انتخابی، واقع شده اند. تناقض حاصل نشان می دهد که می توان k ضلعی

محدبی پیدا کرد، که رأسهای آن بر مرکزها منطبق باشد و در ضمن همه مرکزها

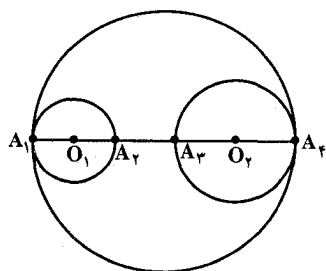
را دربر گرفته باشد. چون مجموع زاویه های خارجی k ضلعی، برابر 360° درجه است،

بنابراین دست کم یکی از زاویه های خارجی، اندازه ای دارد که از $\frac{360^\circ}{n} \geq \frac{360^\circ}{k}$ کمتر

نیست. این زاویه را زاویه B_1OA از زاویه O مربوط به k ضلعی فرض می کنیم (شکل را ببینید). در این صورت، اگر عمودهای OL و OM را بترتیب بر ضلعهای OB و OA رسم کنیم، کمان $\widehat{LM}$ را از دایره به مرکز O جدا می کنند که طول آن کمتر از $\frac{2\pi}{n}$ نیست، زیرا زاویه LOM با زاویه B_1OA برابر است. ثابت می کنیم، این کمان، با دایره های دیگر، برخوردی ندارد. N را نقطه دلخواهی از کمان $\widehat{LM}$ می گیریم: چون $\angle NOB > 90^\circ$ و $\angle NOA > 90^\circ$ ، بنابراین، دایره به مرکز N و شعاع واحد با k ضلعی، تنها در نقطه O مشترک است. و این، به معنای آن است که، مرکز هر دایره ای که از نقطه N گذشته باشد، باید بر نقطه O منطبق باشد. حکم ثابت شد.

۵.۳.۴. قطر

۳۸۷. فرایند زیر را که شامل چند گام است، در نظر می گیریم. در گام اول هر یک از نقطه های داده شده را با دایره ای به قطر $\frac{1}{p}$ می پوشانیم. فرض کنید، بعد از k امین گام ($k \in N$)



دو دایره وجود داشته باشد که فاصله بین آنها، بیشتر از واحد نباشد. O_1 و O_2 را مرکزهای این دو دایره و A_1, A_2, A_3, A_4 را، نقطه های برخورد خط راست O_1O_2 با محیط این دایره ها می گیریم. (نقطه های A_2 و A_3 ، بین دو نقطه A_1 و A_4 قرار دارند و، در ضمن $A_2A_3 \leq 1$ ؛ شکل). در این صورت گام $(k+1)$ ام را به این

ترتیب برمی داریم که، به جای دو دایره داده شده، دایره به قطر A_1A_4 را در نظر می گیریم و این روند را تا آن جا که ممکن است، یعنی تا آن جا که شرط ۲ بطور کامل برقرار شود، ادامه می دهیم. چون بعد از نخستین گام، تعداد دایره ها برابر 100 بود و در هر گام از تعداد دایره ها، یکی کم می شود، بنابراین، تعداد گامها از 100 تجاوز نمی کند. بنابراین، روند کار در جایی به پایان می رسد و با شرط (۱)، که در هر گام برقرار شده است، در پایان روند هم برقرار خواهد بود. از طرف دیگر، با برداشتن گام نخست، مجموع قطر دایره ها برابر $\frac{1}{p}$ یعنی $\frac{1}{p}$ می شود و با برداشتن هر گام بعدی، این مجموع به اندازه ای

که بیشتر از واحد نیست، بزرگ می شود. بنابراین مجموع قطرهای در پایان همه گامها از $\frac{1}{4} + 99$ تجاوز نمی کند، یعنی از 100 کوچکتر است؛ به این ترتیب شرط (۳) هم برقرار است.

۳۸۸. هر یک از نقطه های داده شده را به وسیله دایره ای به شعاع $\frac{1}{4}$ دور می زنیم. مجموع قطرهای این دایره ها برابر است با 100 .

هر جا دو دایره با هم متقاطع درآیند، به جای آنها، دایره ای قرار می دهیم که شامل این دو دایره شود و کوچکترین قطر ممکن را داشته باشد. به این ترتیب مقدار مجموع قطرهای افزایش پیدا نمی کند ولی تعداد دایره ها کمتر می شود.

اگر این روند را ادامه دهیم، سرانجام به دستگاهی از دایره ها می رسیم که دو به دو نسبت به هم غیر متقاطعند و مجموع قطرهای آنها از 100 تجاوز نمی کند. یادآوری می کنیم که فاصله هر نقطه تا محیط دایره از $\frac{1}{4}$ کمتر نیست.

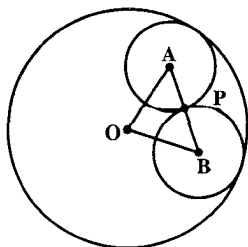
r را کوچکترین فاصله بین دایره ها می گیریم. اگر $r > 1$ ، چیزی برای اثبات باقی نمی ماند. اگر $r \leq 1$ ، آن وقت هر دایره را با دایره ای هم مرکز آن عوض می کنیم، به نحوی که شعاع آن به اندازه $\frac{1}{4} - \frac{r}{3}$ کمتر باشد. دستگاه دایره هایی که به این ترتیب به دست می آید، با شرطهای مسأله سازگار است.

۶.۳.۴. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۳۸۹. دایره ای را از نقطه های تماس این جفت دایره ها بگذرانید. اول و دوم، سوم و چهارم، پنجم و ششم.

۳۹۰. اگر A و B مرکز دو تا از این دیسکها باشند، مثلث OAB متساوی الاضلاع خواهد بود. زیرا: $AB = OA = OB = \frac{2R}{3}$ ، پس $\hat{AOB} = 60^\circ$ است. در نتیجه تعداد دیسکهای

مورد نظر $6 = \frac{360}{60}$ خواهد بود.



۳۹۱. برای این که سطح دایره به شعاع ۲ را بپوشانیم، محیط آن را به شش کمان برابر تقسیم می کنیم و نقطه های تقسیم را A, B, C, D, E و F می نامیم. شش دایره به شعاع واحد و بترتیب به قطرهای AB, BC, CD, DE, EF و FA رسم می کنیم. اکنون، اگر دایره هفتم را، به مرکز نقطه مرکز دایره بزرگتر رسم کنیم، تمامی سطح دایره به شعاع ۲، با هفت دایره به شعاع واحد پوشیده می شود.

دایره ای به شعاع بزرگتر از ۲ را نمی توان پوشاند، زیرا یکی از دایره ها، باید مرکز دایره بزرگتر را دربر گرفته باشد و بنابراین نمی تواند محیط دایره بزرگتر را قطع کند. دایره به شعاع بزرگتر از ۲، به وسیله شش دایره پوشانده شده است که هر کدام از آنها، کمائی کوچکتر از $\frac{1}{6}$ محیط دایره بزرگتر را جدا می کنند و این به معنای آن است که بخشی از محیط دایره بزرگتر (هر قدر هم که کوچک باشد)، زیر پوشش قرار نمی گیرد.

۳۹۳. ابتدا ثابت می کنیم که برای هر نقطه مانند A حداکثر شش نقطه وجود دارد که فاصله آنها با d مساوی یک باشد. زیرا تمام نقطه هایی که فاصله آنها با A مساوی یک باشد روی دایره ای به مرکز A و به شعاع یک واقع هستند و هر دو نقطه روی این دایره که فاصله شان حداقل یک باشد باید در دو سر کمائی به اندازه حداقل 60° درجه واقع باشند. در نتیجه بیشتر از ۶ نقطه ممکن نیست.

به این ترتیب برای هر نقطه بیش از شش جفت که دارای خاصیت بالا باشند، نمی توان تشکیل داد و چون تعداد این نقطه ها n است، پس کلاً $6n$ جفت به دست می آید. اما جفت $(A$ و $B)$ با جفت $(A$ و $B)$ فرقی ندارد. پس $\frac{6n}{2} = 3n$ جفت به دست می آید، یعنی بیش از $3n$ جفت با این خاصیت نخواهیم داشت.

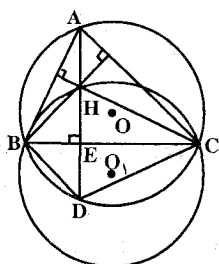
راهنمایی و حل قضیه ها و مسأله های بخش ۵. دایره و مثلث

۱.۵. دایره محیطی مثلث

۲.۱.۵. شعاع

۳۹۴. ثابت کنید که $DE = AO$ است.

۳۹۵. اگر H نقطه برخورد ارتفاعها و O مرکز دایره محیطی مثلث ABC و O_1 مرکز دایره گذرنده بر رأسهای مثلث HBC باشد، ارتفاع AH را امتداد می دهیم تا دایره O را در



نقطه D قطع کند. می دانیم که نقطه D قرینه نقطه H نسبت به ضلع BC است، پس اگر از D به B و C وصل کنیم، دو مثلث HBC و DBC برابرند. لذا دایره های محیطی این دو مثلث برابرند، یعنی دایره گذرنده بر سه نقطه H ، B و C با دایره محیطی مثلث مساوی است. به همین ترتیب می توان ثابت کرد که دایره های محیطی مثلثهای ABH و ACH نیز با دایره محیطی مثلث ABC برابرند.

۳۹۶. مرکزهای دایره های متساوی PBC ،

PCA و PAB را به ترتیب O_a ، O_b و

O_c می نامیم. هریک از

چهار ضلعیهای PO_bAO_c و

PO_aCO_b لوزی است.

خط AP بر O_bO_c که با خط BC

موازی است، عمود است و

$BR \perp O_aO_c$ و $CP \perp O_aO_b$.

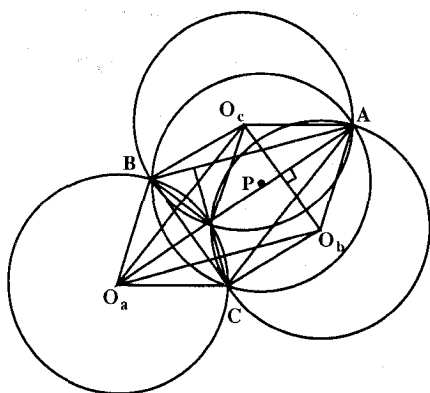
پس AP ، BP و CP ارتفاعهای مثلث

ABC می باشند و P همان نقطه H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است.

۳۹۷. نقطه برخورد عمود منصفهای ضلعهای مثلث ABC را O می نامیم (مرکز دایره محیطی

مثلث ABC). چهار ضلعیهای $OA'CB'$ ، $OB'AC'$ و $OC'BA'$ محاطی اند و قطر

دایره های محیطی این چهار ضلعیها $OC = OA = OB$ است، پس این دایره ها مساوی اند



و نقطه برخورد آنها نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC است.

۳.۱.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۱.۵. نقطه درون دایره

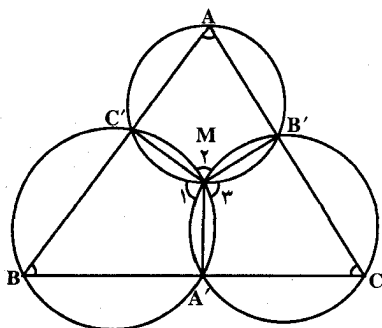
۳۹۸. فرض کنید، K نقطه برخورد AA_1 و BB_1 و H نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. نقطه های A, K, H و B بر یک دایره واقعند (زاویه های AKB و AHB یا با یکدیگر برابرند و یا مجموعشان برابر 180° درجه است، برحسب آن که نقطه های K و H در یک طرف یا دو طرف خط راست AB واقع باشند). شعاع این دایره برابر است با R، شعاع دایره محیطی مثلث ABC. اگر ϕ زاویه بین AA_1 و AH باشد، آن وقت $KH = 2R \sin \phi$.

۲.۳.۱.۵. نقطه روی دایره

۴۰۱. اگر A_1 نقطه برخورد AH با دایره محیطی مثلث باشد، از A_1 به C وصل کنید و ثابت کنید که $CH = CA_1$ است.

۴۰۲. زاویه های $\hat{B}ED = \hat{A}BC$ و $\hat{D}EC = \hat{A}CB$ است.

۴۰۳. نقطه تقاطع دایره های محیطی مثلثهای $AB'C'$ و $BA'C'$ را M می نامیم. چهارضلعیهای $MC'AB'$ و $MC'BA'$ محاطی اند، پس: $\hat{M}_1 + \hat{B} = 180^\circ$ و $\hat{M}_2 + \hat{A} = 180^\circ$. از طرفی داریم: $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 + \hat{M}_3 + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 540^\circ$. در نتیجه $\hat{M}_3 + \hat{C} = 180^\circ$ ، یعنی چهارضلعی $CA'MB'$ نیز محاطی است و دایره محیطی مثلث $CA'B'$ نیز از نقطه M می گذرد.



۴۰۴. فرض کنید p, q, r و s چهار خط راست داده شده باشند. دایره‌های محیطی (pqr) و (pqs) مربوط به دو مثلث pqr و pqs در نقطه تلافی P و Q اشتراک دارند؛ پس در نقطه دیگری، مانند M ، هم یکدیگر را قطع می‌کنند. اگر p, q, r و s تصویهای M بترتیب بر روی خطهای p, q, r و s باشند، نقطه‌های P, Q, R باهم و نقطه‌های P, Q, S باهم هم‌خطند. پس چهار نقطه P, Q, R و S هم‌خطند.

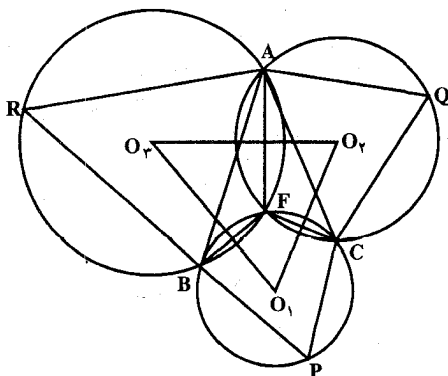
پس تصویهای نقطه M روی ضلعهای مثلث qrs نیز هم‌خطند، یعنی M روی دایره محیطی این مثلث، و به دلیلی مشابه روی دایره محیطی prs نیز قرار دارد. تعریف. نقطه M را نقطه میکل برای چهار خط p, q, r و s می‌نامند.

ملاحظه. چهار خط (که هیچ دوتایی از آنها موازی و هیچ سه تایی از آنها هم‌رس نیستند) مفروضند. یک و تنها یک نقطه وجود دارد که تصویهایش بر این خطها هم‌خط باشند. نتیجه. مرکزهای دایره (pqr) ، (qrs) ، (rsp) و (spq) و نقطه M روی یک دایره قرار دارند. در واقع چهار نقطه P, Q, R و S هم‌خطند و نقطه M با هر سه تایی از این چهار مرکز هم‌دایره است، پس این پنج نقطه هم‌دایره‌اند.

۴۰۵. روی ضلعهای مثلث ABC و در بیرون آنها سه مثلث CBP ، ABR و ACQ را چنان

رسم کرده‌ایم که: $\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180^\circ$ است. دایره‌های محیطی دو مثلث CBP و ACQ که در نقطه C مشترکند، در نقطه دیگری مانند F نیز متقاطعند. از F به نقطه‌های A, B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعیهای $FBPC$ و $FAQC$ محاطی‌اند. پس داریم:

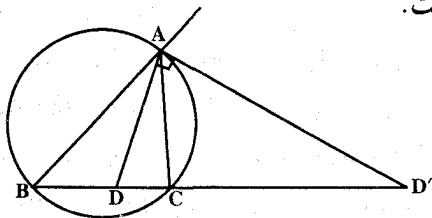
$$\begin{aligned}\hat{AFB} &= 360^\circ - (\hat{BFC} + \hat{CFA}) = 360^\circ - [(\hat{180^\circ} - \hat{P}) + (\hat{180^\circ} - \hat{Q})] \\ &= \hat{P} + \hat{Q} = 180^\circ - \hat{R}\end{aligned}$$



پس چهار ضلعی ARBF نیز محاطی است و دایره محیطی مثلث ABR از نقطه P می‌گذرد.

۱.۵.۳. نقطه برون دایره

۴۰۹. نقطه D' پای نیمساز زاویه برونی A روی امتداد پاره خط BC است، پس این نقطه در برون دایره محیطی مثلث واقع است.



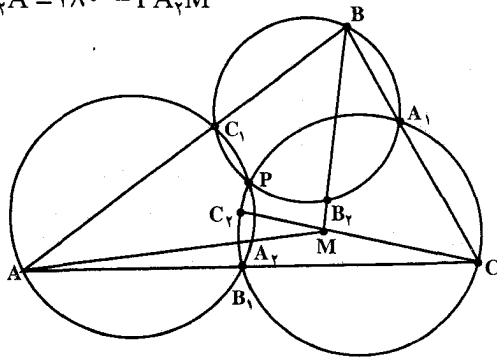
۴.۳.۱.۵. نقطه های همدايره

۴۱۰. ثابت کنید، چهارضلعیهای BPCQ و BPOC محاطی اند.

۴۱۱. ثابت کنید، چهارضلعیهای $AHB'B$ و $AHC'C$ محاطی اند.

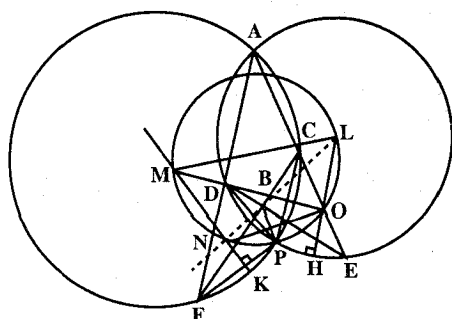
۴۱۲. بسادگی می‌توان ثابت کرد که دایره‌های مورد بحث، در یک نقطه متقاطعند. این نقطه را با P نشان می‌دهیم. اگر نقطه‌ها مطابق شکل قرار گرفته باشند، آن وقت:

$$\begin{aligned} \hat{P}\hat{B}_1\hat{M} &= \hat{1}\wedge^\circ - \hat{B}\hat{B}_1\hat{P} = \hat{P}\hat{C}_1\hat{B} = \hat{1}\wedge^\circ - \hat{P}\hat{C}_1\hat{A} = \hat{P}\hat{B}_1\hat{A} \\ &= \hat{P}\hat{A}_1\hat{A} = \hat{1}\wedge^\circ - \hat{P}\hat{A}_1\hat{M} \end{aligned}$$



یعنی نقطه‌های P, B_2, M و A_2 بر یک دایره واقعند. به طریق مشابه، ثابت می‌کنیم

و C_7 بر یک دایره واقعند.



۴۱۳. چهارضلعی حاصل از برخورد چهار خط را ACBD و نقطه برخورد ضلعهای روبه روی این چهارضلعی را E و F می نامیم. می دانیم که چهار دایره محیطی چهار مثلث حاصل، در یک نقطه متقاطعند. چهارضلعیهای BDFP و BCEP، ADPE، ACPF محاطی می باشند و دو به دو یک وتر

مشترک دارند. برای تعیین مرکز دایره های محیطی این چهارضلعیها، عمود منصف وتر مشترکها را رسم می کنیم.

برای چهارضلعیهای ADPE، BCEP، مرکزها روی خط HOL قرار دارند. برای چهارضلعیهای ADPE و DBPF مرکزهای L و N روی عمود منصف DP می باشند و اما کمانهای $\widehat{DPE}$ و $\widehat{CPF}$ برابرند، زیرا مقابل به زاویه A می باشند و اما:

$$\widehat{NLO} = \frac{1}{4} \widehat{DPE}, \quad \widehat{OMN} = \frac{1}{4} \widehat{CPF} \Rightarrow \widehat{NLO} = \widehat{OMN}$$

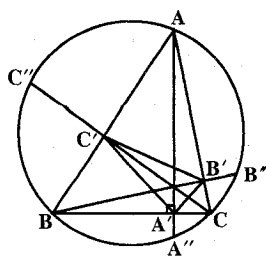
پس چهارضلعی LMNO که از مرکزهای ۴ دایره به دست آمده است، محاطی است.

۵.۳.۱.۵. نقطه های همخط

۴۱۴. چهارضلعی BDCH متوازی الاضلاع است.

۴.۱.۵. کمان

۴۲۰. نقطه های برخورد ارتفاعهای AA'، BB' و CC' از مثلث ABC با دایره محیطی آن



را به ترتیب A''، B'' و C'' می نامیم. رأس A از مثلث ABC وسط کمان B''C'' است، زیرا دو زاویه ACC'' و ABB'' که ضلعهایشان دو به دو برهم عمودند، با هم برابرند. از طرفی $\widehat{ACC''} = \frac{AC''}{2}$ و $\widehat{ABB''} = \frac{AB''}{2}$. بنابراین $\widehat{AB''} = \widehat{AC''}$. به همین ترتیب ثابت می شود که

رأس B وسط کمان $\widehat{A''C''}$ و رأس C وسط کمان $\widehat{A''B''}$ است.

۵.۱.۵. وتر

۴۲۱. کمانهای $\widehat{FB}$ و $\widehat{FC}$ برابرند و مثلث FBI در رأس F متساوی الساقین است.

۴۲۲. زاویه های محاطی A و A' برابرند، پس کمانهای روبه روی آنها و در نتیجه وترهای نظیر این کمانها برابرند.

۴۲۳. فرض کنید، H نقطه برخورد ارتفاعها، مرکز O دایره محیطی و B_1 وسط CA باشد. خط راست MN از K، وسط BH، می گذرد و $BK = B_1O$. ثابت کنید که خط MN با OB موازی است (اگر $\hat{C} > \hat{A}$ ، آن وقت $\hat{C} - \hat{A} = \hat{OBH} = \hat{MBN} = \hat{MKN}$).

۵.۱.۶. قطر

۴۲۴. اگر AU نیمساز داخلی زاویه A باشد و آن را ادامه دهیم BC را در L که، وسط آن است قطع می کند. OL در A' بر BC عمود است و دایره را در L' قطع می کند. AL' بر AL عمود است (زیرا $\hat{LAL'} = 90^\circ$ در نتیجه AL' نیمساز خارجی زاویه A می باشد).

تبصره. زاویه ای که نیمساز خارجی یک زاویه با ضلع مقابلش می سازد، مساوی نصف تفاضل دو زاویه مجاور به این ضلع از مثلث است.

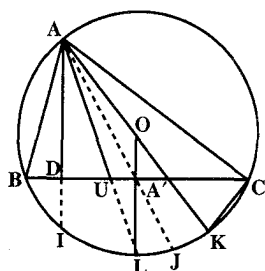
زاویه $\widehat{A'B}$ ، ضلعهای عمود بر ضلعهای زاویه $\widehat{DAU}$ می باشد و قبلاً ثابت کردیم: زاویه ای که ارتفاع A و قطر گذرنده از A می سازند، برابر $\hat{B} - \hat{C}$ و نیمساز زاویه A نیمساز این زاویه نیز هست، پس زاویه نیمساز و ارتفاع برابر $\frac{\hat{B} - \hat{C}}{2}$ است.

۵.۱.۷. زاویه

۵.۱.۷.۱. اندازه زاویه

۴۲۷. ثابت کنید، مثلث، حاده، قائمه یا منفرجه است. برحسب آن که فاصله میان مرکز دایره محیطی و نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث، کمتر از، برابر با و یا بیشتر از نصف طول بزرگترین ضلع آن باشد.

جواب: 90° ، 60° و 30° .



۴۲۸. (الف) فرض کنید، AD ارتفاع و AK قطری از دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشند که از رأس A می‌گذرند. زاویه‌های B و K برابرند. زیرا هر دو روبه روی یک کمان دایرهٔ محیطی هستند؛ پس در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABD و ACK داریم:

$$\hat{BAD} = \hat{KAC} = 90^\circ - \hat{B},$$

$$\hat{DAK} = \hat{A} - 2(90^\circ - \hat{B}) = \hat{A} + 2\hat{B} - 180^\circ = \hat{A} + 2\hat{B} - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C} = \hat{B} - \hat{C}$$

خواننده می‌تواند تحقیق کند که در صورت منفرجه بودن یکی از زاویه‌های B یا C نیز قضیه صادق است.

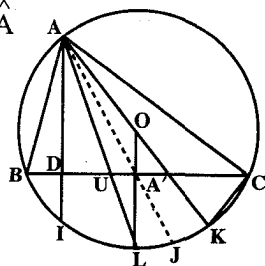
(ب) AU را نیمساز زاویهٔ A فرض کنید. چون $\hat{BAD} = \hat{CAO}$ ، داریم $\hat{DAU} = \hat{OAU}$.

نتیجه. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADU داریم: $AD = h_a$ ، $AU = t_a$ و $\hat{DAU} = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$ پس $\hat{B} - \hat{C}$ و t_a و h_a یک دسته معلومات مثلث است.

۴۲۹. با توجه به دو مثلث AUB و AUC داریم:

$$\hat{AUC} = \hat{B} + \frac{1}{2}\hat{A}, \quad \hat{AUB} = \hat{C} + \frac{1}{2}\hat{A}$$

$$\hat{AUC} - \hat{AUB} = \hat{B} - \hat{C}$$



پس:

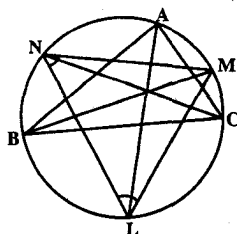
۴۳۰. نیمساز هر زاویهٔ داخلی کمان مقابل به آن زاویه از دایره محیطی مثلث را نصف می‌کند،

پس داریم:

$$\hat{MLN} = \hat{MLA} + \hat{ALN} = \hat{MBA} + \hat{ACN} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\hat{NML} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$$

$$\hat{LNM} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

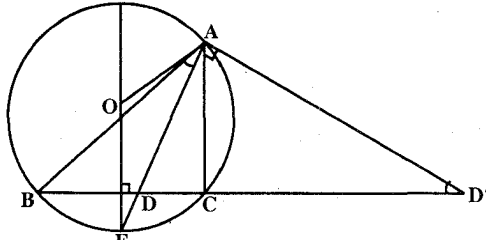


۴۳۱. از M' به N' وصل کنید.

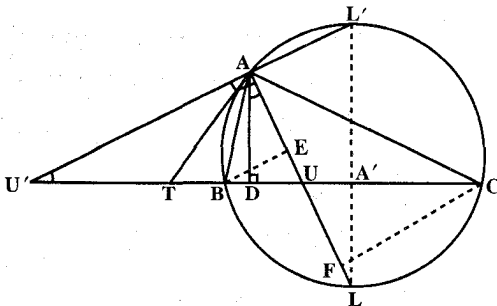
۲.۷.۱.۵. رابطه بین زاویه ها

۴۳۲. چهار ضلعیهای $OMAN$ و $HC'AB'$ محاطی اند.

۴۳۳. امتداد نیمساز AD از نقطه E وسط کمان BC می گذرد، و OE عمود منصف BC است.



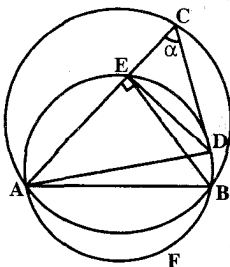
۴۳۴. دو ضلع زاویه ای که نیمساز خارجی AU' (شکل) با قاعده BC می سازد، بترتیب بر نیمساز داخلی AU و ارتفاع AD عمودند. بنابراین اثبات قضیه کامل است.



۴۳۷. خط مرکزین دو دایره عمود منصف وتر مشترک آن دو دایره است، و قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان مقابلش را نصف می کند.

۸.۱.۵. پاره خط

۱.۸.۱.۵. اندازه پاره خط

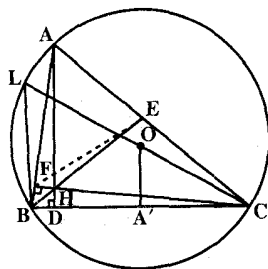


۴۳۸. رأس زاویه ثابت $\hat{C} = \alpha$ روی کمان درخور زاویه α روبه رو به پاره خط AB واقع است. یکی از این مثلثها را در نظر می گیریم و ارتفاعهای AD و BE را رسم می کنیم، چهار ضلعی $AEDB$ محاطی است و AB قطر دایره محیطی آن است.

برای زاویه C از مثلث ABC داریم: $\hat{C} = \frac{\widehat{AFB} - \widehat{DE}}{2}$. اما اندازه زاویه C ثابت است و $\widehat{AFB} = 180^\circ$ است، پس کمان DE و در نتیجه وتر DE طول ثابتی دارند.

۲.۸.۱.۵. رابطه بین پاره خطها

۴۴۰. فرض کنید، L انتهای دیگر قطری از دایره محیطی باشد که از رأس C می گذرد (شکل). در این صورت می گوئیم L رویه روی قطری C در دایره محیطی است. پاره خط OA' وسط دو ضلع مثلث قائم الزاویه BCL را به هم وصل می کند؛ پس $OA' = \frac{1}{2}BL$. از طرف دیگر هر جفت از ضلعهای رویه روی هم در چهارضلعی ALBH بترتیب بر خطهای AC و BC عمودند، پس ALBH، متوازی الاضلاع است و $BL = AH$ ؛ و قضیه ثابت می شود.



۴۴۶. زاویه DAD' قائمه و محاطی است، پس DD' قطر دایره است که چون D وسط کمان BC است، پس DD' عمود منصف ضلع BC است.

۴۴۷. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد و پای عمودهای مرسوم از نقطه های B و D بر عمود منصف AC را به ترتیب B_۱ و D_۱ بنامیم، دو مثلث قائم الزاویه OBB_۱ و ODD_۱ با هم برابرند.

$$\hat{TUA} = \hat{UCA} + \hat{UAC}, \quad \hat{TAU} = \hat{TAB} + \hat{BAU} \quad \text{۴۴۸. داریم:}$$

$$\hat{BAU} = \hat{UAC}, \quad \hat{TAB} = \hat{UCA} \quad \text{ولی:}$$

(محاطی و رویه روی دو کمان مساوی) در نتیجه مثلث TUA متساوی الساقین است و $TA = TU$. دایره ای به مرکز T و شعاع TA از U می گذرد. (زیرا $TA = TU$ است) و چون مثلث UAU' قائم الزاویه است، پس این دایره از U' نیز می گذرد و در نتیجه $TA = TU'$.

۹.۱.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۱.۹.۱.۵. خطها موازی اند

۴۴۹. چهارضلعی AFOE محاطی است و زاویه های AOF و FEA با زاویه C برابرند.

۴۵۰. زاویه $\hat{DBA} = 90^\circ$ است.

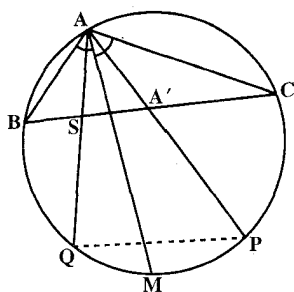
۴۵۱. از A به A'' وصل کنید و ثابت کنید: $\hat{A''AC} = \hat{A''AB}$.

۴۵۲. وسط کمان PQ (شکل) که توسط میانه AP و میانه متقارن AQ روی دایرة محیطی مثلث

ABC جدا می شود، بر وسط کمان BC از این دایره منطبق است؛ پس دو وتر BC و

QP موازی اند. این گزاره راه ساده ای برای رسم میانه های متقارن یک مثلث در اختیارمان

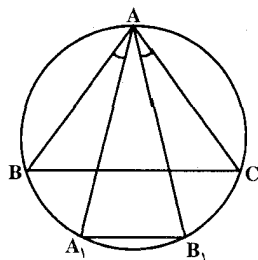
می گذارد.



۴۵۳. دایرة محیطی مثلث ABC و دو خط همزاویه AA_1 و BB_1 که این دایره را در A_1 و

B_1 قطع کرده اند، در نظر می گیریم. چون $\hat{CAB_1} = \hat{BAA_1}$ است، پس $\hat{BA_1} = \hat{B_1C}$

در نتیجه $A_1B_1 \parallel BC$ است.



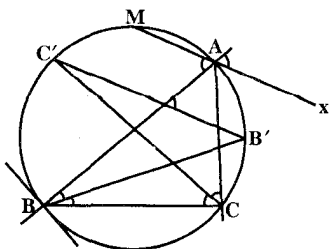
۴۵۵. نقطه برخورد نیمسازهای زاویه های درونی B و

C از مثلث ABC با دایرة محیطی مثلث را

بترتیب B' و C' و نقطه برخورد نیمساز زاویه

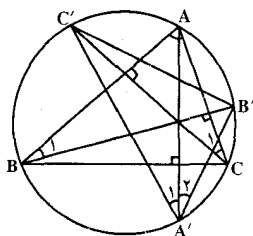
برونی A با این دایره را M می نامیم. ثابت

کنید $AM \parallel B'C'$ است.



۳.۹.۱.۵. خط نیمساز است

۴۶۰. زاویه های C_1 و B_1 که هر دو متمم زاویه BAC می باشند، با هم برابرند. در نتیجه $\widehat{AB'} = \widehat{AC'}$ است. از آن جا $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ یعنی AA' نیمساز زاویه $B'A'C'$ از مثلث $A'B'C'$ می باشد. به همین ترتیب ثابت می شود که BB' و CC' ، بترتیب، نیمساز زاویه های B' و C' از مثلث $A'B'C'$ می باشند.



۴۶۱. اگر H نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، نقطه D قرینه نقطه H نسبت به ضلع BC است.

۴.۹.۱.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۴۶۲. این نقطه ثابت، نقطه E وسط کمان $\widehat{AB}$ است.

۴۶۳. به دلیل ثابت بودن پاره خط BC و زاویه BAC ، مکان هندسی رأس A از مثلث ABC کمان درخور زاویه معلوم A مقابل به پاره خط BC است و چون وتر BC ثابت است، کمان BC ثابت می باشد و در نتیجه نقطه E وسط آن نیز نقطه ثابتی است و نیمساز زاویه A همواره از نقطه ثابت E می گذرد.

۴۶۴. دو نقطه را نسبت به یک ضلع مثلث همنا می نامند، در صورتی که از وسط آن ضلع به یک فاصله باشند. بنابراین $P_1P_2 = Q_1Q_2$ است.

۵.۹.۱.۵. خطها همرسند

۴۶۵. چهار ضلعیهای $BCB'C'$ و $ACA'C'$ و $ABA'B'$ متوازی الاضلاعند.

۴۶۷. از رأسهای A و C دو خط موازی خط مماس بر دایره در رأس B رسم کنید و نقطه های برخورد آنها با AB و AC را B' و B'' بنامید. نقطه برخورد $B'B''$ با AC نقطه V است. خط AV را رسم کنید. سپس به روش مشابه خط CW را رسم نمایید. آن گاه همرس بودن AU ، BV و CW را ثابت کنید.

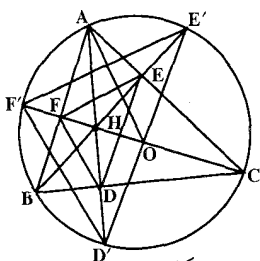
۴۶۸. H را نقطه برخورد دو ارتفاع BE و CF از مثلث ABC فرض کنید (شکل)، و فرض کنید خط AH ضلع BC را در D قطع کند. نقطه های E و F روی دایره ای قرار دارند

که BC قطر آن است و در چهارضلعی محاطی $BCEF$ داریم: $\hat{FCB} = \hat{FEB}$. به طور مشابه، در چهارضلعی محاطی $AEHF$ داریم $\hat{FEH} = \hat{FAH}$ ؛ بنابراین،
 $\hat{BAD} = \hat{FAH} = \hat{FEH} = \hat{FEB} = \hat{FCB}$

پس دو مثلث ABD و BCF که در زاویه B مشترکند و دو زاویه دیگرشان هم دو به دو برابرند، همنهشتند و داریم:

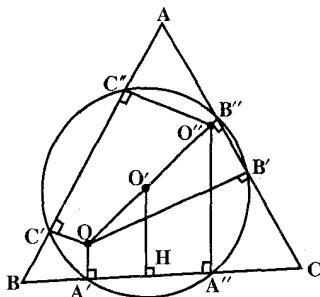
$$\hat{ADB} = \hat{BFC} = 90^\circ$$

یعنی AHD ارتفاع سوم مثلث ABC است.



۴۶۹. همه این عمودها از مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌گذرند.

۴۷۳. از نقطه O به نقطه O' مرکز دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ وصل می‌کنیم و نقطه تقاطع عمود مرسوم بر BC در نقطه A'' با OO' را نقطه O'' می‌نامیم. چهارضلعی



$OA'A''O''$ دوزنقه است ($OA \parallel O''A''$). از

O' مرکز دایره عمود $O'H$ را بر وتر $A'A''$ فرود

می‌آوریم، $O'H$ عمود منصف $A'A''$ است، پس

نقطه O' وسط OO'' می‌باشد، یعنی نقطه O''

قرینه نقطه O نسبت به نقطه O' مرکز دایره محیطی

مثلث $A'B'C'$ می‌باشد، لذا نقطه‌ای است ثابت،

یعنی عمودی که در نقطه A'' بر ضلع BC اخراج

می‌شود از نقطه ثابت O'' می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمودهای رسم

شده از B'' و C'' بر ضلعهای مثلث نیز از نقطه O'' می‌گذرند. بنابراین عمودهای رسم

شده بر ضلعهای مثلث ABC در نقطه‌های A'' ، B'' و C'' هم‌رسند.

۵.۹.۶. خط مماس بر دایره است

۴۷۶. ضلع روبه‌رو به زاویه ثابت، اندازه ثابتی دارد و وترهای به طول ثابت در یک دایره از

مرکز دایره به یک فاصله‌اند. بنابراین بردایره ثابتی هم مرکز با دایره داده شده و به شعاع

فاصله مرکز دایره از ضلع ثابت، مماس است.

۴۷۷. ثابت کنید، زاویه EKH با زاویه KGH برابر است.

۱۰.۱.۵. خط سیمسون

۱۰.۱.۵. تعریف و قضیه

۴۷۸. فرض کنید، P نقطه‌ای داخل زاویه ABC از مثلث ABC باشد و L، M و N تصویرهای نقطه P بر ضلعهای BC، CA و AB باشند (شکل). دایره‌های (PA) و (PC) که PA و PC قطر آنها هستند، بترتیب از نقطه‌های M و N، و M و L می‌گذرند، و داریم:

$$\hat{APN} = \hat{AMN}, \quad \hat{CPL} = \hat{CML}, \quad \hat{B} + \hat{NPL} = 180^\circ \quad (۱)$$

حال فرض کنید که P روی دایره ABC قرار داشته باشد. در این صورت، $\hat{APC}$ مکمل زاویه B است و داریم:

$$\hat{APC} = \hat{NPL} \quad (۲)$$

با کم کردن این دو زاویه مساوی از زاویه NPC خواهیم داشت:

$$\hat{APN} = \hat{CPL} \quad (۳)$$

با توجه به (۱)،

$$\hat{AMN} = \hat{CML} \quad (۴)$$

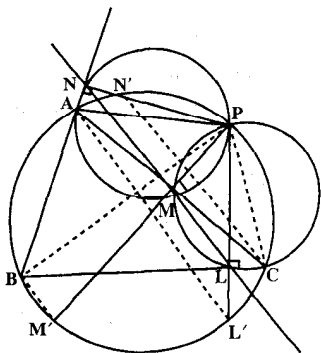
پس سه نقطه L، M و N همخطند.

برعکس، اگر L، M و N همخط باشند، (۴) برقرار است، و از (۴) و (۱) معادله (۳)، و در نتیجه (۲) را به دست می‌آوریم، یعنی $\hat{NPL}$ مکمل زاویه B است و P با نقطه‌های A، B و C هم‌دایره است.

نکته. نقطه P چه آن‌طور که فرض کردیم داخل زاویه B باشد، و چه داخل هریک از دو زاویه دیگر مثلث ABC باشد، اثبات حکم مستقیم قضیه معتبر خواهد بود. اثبات

عکس قضیه نیز در این حالتها معتبر است. ولی در مورد عکس قضیه، اگر فرض شود که P داخل زاویه متقابل به رأس یکی از زاویه‌های مثلث ABC است، واضح است که نقطه‌های L، M و N نمی‌توانند همخط باشند.

می‌توان ملاحظه کرد که خط LMN دایره محیطی را قطع می‌کند، زیرا از نقطه M که داخل دایره محیطی است می‌گذرد.



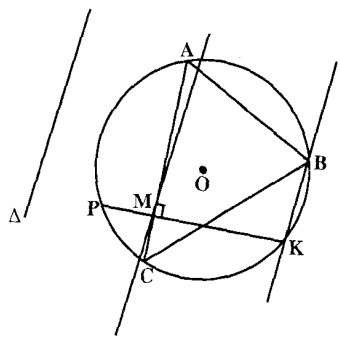
۲.۱۰.۱.۵. نقطه و دایره

۴۷۹. نقطه‌ای که در سر دیگر قطر رسم شده از رأس B واقع است.

۴۸۰. از یک رأس دلخواه مثلث مفروض ABC

مثلاً رأس B خطی در راستای مفروض رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی (O) را مجدداً در K قطع کند (شکل). عمود KM که از K بر ضلع روبه‌روی رأس B، یعنی AC، رسم می‌شود، دایرهٔ (O) را در نقطهٔ مطلوب P قطع می‌کند و خطی که از M به موازات KB رسم شود، خط سیمسون نقطهٔ P است.

۴۸۱. ثابت کنید که ضلعهای مثلثهای $A_1B_1C_1$ ، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ متنازراً موازی اند.



۵.۱.۱۰.۳ زاویه

۴۸۴. خط سمن خاصیت‌های جالب بسیار

دارد که برخی از آنها شایسته بررسی است، مطابق با شکل (الف)، که در آن عمود PA_1 را امتداد داده ایم تا با دایره محیطی مثلث در U برخورد کرده است و AU را رسم کرده ایم. در چهارضلعیهای محاطی $PAUC$ و PBA_1C داریم:

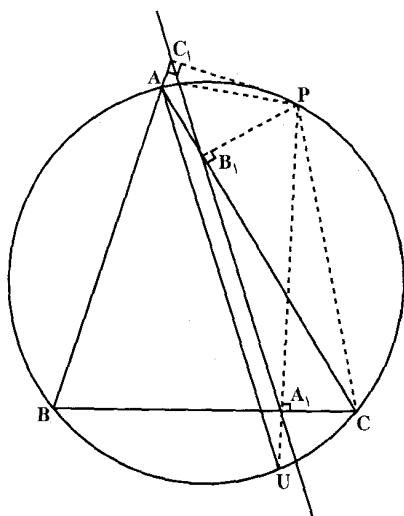
$$\hat{P}UA = \hat{P}CA = \hat{P}CB_1 = \hat{P}A_1B_1$$

بنابراین خط AU با خط ممسّن $A_1B_1C_1$ موازی است.

اکنون علاوه بر نقطه P ، نقطه دیگر P'

از دایره محیطی مثلث ABC را در نظر

می‌گیریم و خطهای سمس‌نظیر آنها را با هم مقایسه می‌کنیم. با توجه به این که خطهای سمس‌نظیر نقطه‌های P و P' برتریب با خطهای AU و AU' موازی‌اند. پس زاویه بین این خطهای سمس‌نظیر UAU' برابر است، اما کمان UU' با کمان PP' برابر



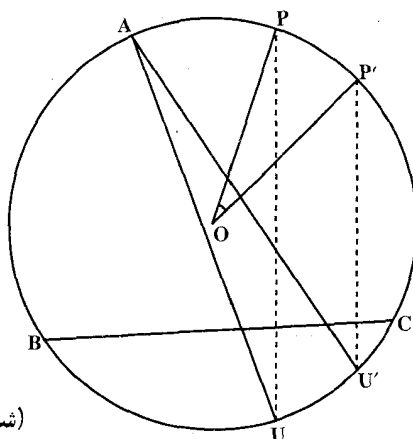
(شكل الف)

است زیرا دو وتر PU و $P'U'$ با هم موازی اند، (شکل ب) بنابراین:

$$\widehat{UAU'} = \frac{1}{2}\widehat{UU'} = \frac{1}{2}\widehat{PP'} = \frac{1}{2}\widehat{POP'}$$

و هرگاه صفحه را جهت دار گرفته و اندازه جبری زاویه ها را به کار ببریم:

$$\widehat{UAU'} = \frac{1}{2}\widehat{UU'} = -\frac{1}{2}\widehat{PP'} = -\frac{1}{2}\widehat{POP'} = \text{مقدار ثابت}$$



(شکل ب)

هرگاه P دایرة محیطی مثلث را با سرعتی ثابت بپیمايد، در این صورت خط AU حول نقطه A با سرعت زاویه ای ثابت می چرخد به قسمی که U دایره را در جهت عکس حرکت P می پیماید، و وقتی که P یک دور کامل محیط دایره را بپیمايد، خط AU در امتداد نخستین خود اما در جهت عکس قرار خواهد گرفت. در این ضمن خط ممسّن نیز حول مرکزی متغیر دوران می کند و پوش آن منحنی متقارنی است که دلتوئید یا هیپوسیکلوئید اشتینر نام دارد. بسادگی و به گونه نقاشیهای متحرک که به فیلم تبدیل می شوند می توان این تغییر مکانها را دنبال کرد.

۴.۱۰.۱.۵. پاره خط

۴۸۵. اگر نقطه E قرینه نقطه P از دایرة محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BC و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، خط ممسّن نظیر نقطه $(A'B')P$ با خط EH موازی است، پس B' وسط PH است.

۴۸۶. فاصله میان تصویرهای M روی AC و BC ، برابر $CM \sin \hat{C}$ است. اگر K و L تصویرهای M روی AB و BC باشند، آن وقت تصویر AB روی خط راست KL (این

همان خط سیمسون است)، برابر است با:

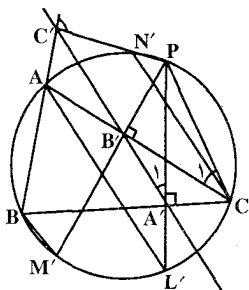
$$AB \cdot |\cos \hat{BKL}| = AB \cdot |\cos \hat{BML}| = AB \sin \hat{CBM} = CM \sin \hat{C}$$

۵.۱۰.۱.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۱.۵.۱۰.۱.۵. خطها موازی اند

۴۸۸. چهارضلعی $PCA'B'$ محاطی است، پس $\hat{A}_1' = \hat{C}_1$

است. از طرفی $\hat{L}' = \hat{C}_1 = \frac{\widehat{AP}}{2}$ ، در نتیجه $\hat{L}' = \hat{A}_1'$ است. پس خط AL' موازی خط $A'B'C'$ است. به همین ترتیب ثابت می شود که خطهای BM' و CN' نیز موازی خط ممسّن نظیر نقطه P می باشند.



۲.۵.۱۰.۱.۵. خطها بر هم عمودند

۴۹۰. قطر DE از دایره محیطی مثلث ABC را در نظر

می گیریم و تصویرهای نقطه های D و E روی ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث ABC را G, F, M ، H, L, K می نامیم. چهارضلعی $GDCM$ محاطی است. چون دایره به قطر DC ، هم از M می گذرد و هم از C ، پس $\hat{GMD} = \hat{C}_1 = \hat{E}_1$ ، چون ضلعهایشان دو به دو بر هم عمودند. در نتیجه

$\hat{GMD} = \hat{E}_1$. چهارضلعی $LHCE$ نیز محاطی

می باشد، پس $\hat{L}_1 = \hat{E}_1$ ، لذا $\hat{L}_1 = \hat{GMD}$. چون

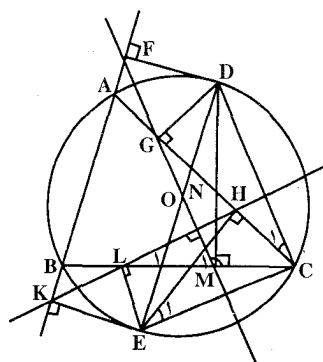
$\hat{GMD} + \hat{M}_1 = 90^\circ$ پس $\hat{L}_1 + \hat{M}_1 = 90^\circ$ ، بنابراین در مثلث NLM که مجموع دو زاویه 90° است، زاویه سومش برابر 90° می باشد، یعنی $FM \perp NL$ است.

۴۹۱. مسأله را در مورد یکی از خطها ثابت کنید.

۳.۵.۱۰.۱.۵. خط نیمساز است

۴۹۳. وسطهای ضلعهای BC, AC و AB از مثلث ABC را A_1, B_1 و C_1 بنامید. خط

سیمسن نظیر نقطه P را نسبت به دایره رسم کنید و ثابت کنید که این خط نیمساز یکی از زاویه های خارجی مثلث $A_1B_1C_1$ است. به همین ترتیب مسأله برای نقطه های Q و R برقرار است. مسأله را برای خطهای سیمسن نظیر نقطه های P', Q', R' بررسی کنید.



۴.۵.۱۰.۱.۵. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۴۹۴. اگر M نقطه برخورد ارتفاع AA' با دایره محیطی مثلث ABC باشد، نقطه A' تصویر M روی ضلع BC ، پای ارتفاع رأس A است. که خط سیمسون نظیر نقطه M از A' می‌گذرد و

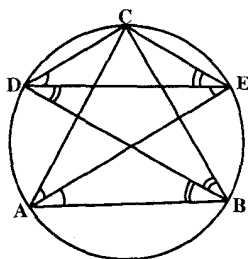
۵.۵.۱۰.۱.۵. خطها هم‌رند

۴۹۸. ثابت کنید که خط سیمسون نظیر A_1 ، بر B_1C_1 عمود است (همین‌طور برای نقطه‌های دیگر). بعلاوه، می‌توان ثابت کرد که خط سیمسون نظیر A_1 ، از وسط A_1H می‌گذرد، که در آن H نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است. در نتیجه، خطهای سیمسون، ارتفاعهای مثلثی‌اند که رأسهایش وسط پاره‌های A_1H ، B_1H و C_1H هستند.

۶.۱۰.۱.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

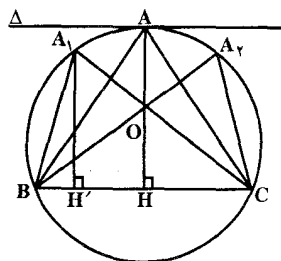
۵۰۱. رأسهای مثلث، ارتفاعهای مثلث

۱۱.۱.۵. شکل‌های ایجاد شده



۵۰۴. از زاویه‌های برابر (شکل)، نتیجه می‌شود که، نقطه A ، روی محیط دایره‌ای است که از نقطه‌های C ، D و E گذشته است؛ نقطه B هم روی محیط همین دایره قرار دارد و در ضمن $DE \parallel AB$.

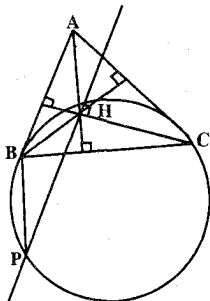
۵۰۵. چون BC و زاویه مقابل به آن همواره ثابت هستند، بنابراین رأس A روی کمان درخور زاویه ثابت A مقابل به پاره خط BC واقع است. بنابراین بین مثلث‌های بالا مساحت مثلثی بیشتر است که ارتفاع آن بیشتر باشد. اما بین تمام این ارتفاعها، بزرگترین ارتفاع مربوط به مثلثی است که مماس در رأس A آن بر دایره، موازی ضلع BC باشد، پس اگر خط Δ را مماس بر دایره به موازات BC رسم کنیم و نقطه تماس آن با دایره را A بنامیم، مثلث ABC جواب مسأله است.



۵۰۷. در مثلث ABC میانه نظیر ضلع BC نصف این ضلع است. پس، این مثلث قائم‌الزاویه است.

۵۰۸. PN و OQ هر دو موازی ارتفاع BH ، OP و QN موازی ارتفاع CH می‌باشند.

۵۰۹. چون $AB \parallel HP$ است، پس کافی است، ثابت کنید که $AB = HP$ نیز هست.



۵۱۰. عمود منصف هر ضلع از مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند.

۱۲.۱.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۵۱۱. اندازه ضلعهای مثلث اولر نظیر مثلث

$$B_1C_1 = \frac{a}{4} \text{ و } A_1C_1 = \frac{b}{4}, A_1B_1 = \frac{c}{4}, ABC$$

است. در این مسأله نقطه های B' و C' ، بترتیب،

وسطهای ضلعهای AC و AB می باشند. پس

$$B'C' = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

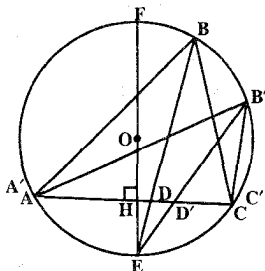
قائم الزاویه ADB و ADC پاره خطهای DB' و DC'

میانه وارد بر وترند، پس $DC' = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$ و $DB' = \frac{AC}{2} = \frac{b}{2}$ می باشند. بنابراین

مثلث $DB'C'$ با مثلث اولر نظیر مثلث ABC به حالت تساوی سه ضلع همنهشت است.

۵۱۳. دایره محیطی مثلث ABC را رسم می کنیم. قطر EF از دایره که عمود منصف ضلع AC

است در نقطه H بر AC عمود است. مثلث $A'B'C'$ را روی مثلث ABC قرار می دهیم



که $A'C'$ بر مساویش AC منطبق گردد و دو نقطه B

و B' در یک طرف ضلع AC واقع شوند. چون $\hat{B} = \hat{B}'$

است پس B' روی کمان درخور زاویه B مقابل به

AC ، یعنی روی دایره محیطی مثلث قرار دارد و

نیمسازهای زاویه های B و B' از نقطه E وسط کمان

AC می گذرند. حال ثابت می کنیم که B' بر B منطبق

است. اگر B' بر B منطبق نباشد، فرض می کنیم

این خلاف فرض است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $EB' > EB$ نیست، پس $EB' = EB$ و در نتیجه نقطه B' بر نقطه B منطبق است.

لذا دو مثلث $A'B'C'$ و ABC همنهشتند.

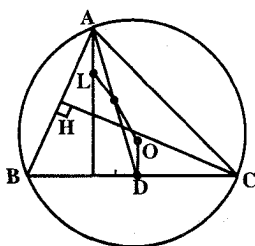
۵۱۴. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث ABC ، D وسط CB ،

H نقطه برخورد ارتفاعها و L وسط AH باشد، آن وقت،

AL = OD و چون AL یا OD موازی است، OL،

AD را نصف می‌کند، یعنی، L قرینه O نسبت به وسط

AD است.



٥١٥. مثلث متساوی الساقین ABC به قاعدهٔ ثابت AB و زاویهٔ رأس ثابت $\angle BCA = \alpha$. زیرا

اگر مثلث نامتساوی الساقین ADB را رسم کنیم، نقطه‌های D و C روی کمان درخور

زاویه α رویه رویه باره خط ثابت BC قرار دارند. AC را به اندازه $CE = CB$ و AD

را به اندازه $DF = DB$ امتداد می‌دهیم و از E و F به B وصل می‌کنیم. در دو مثلث

متساوی الساقین CBE و DBF داریم :

$$\hat{E} = \frac{\hat{A}CB}{\gamma}, \hat{F} = \frac{\hat{A}DB}{\gamma}, \hat{A}DB = \hat{A}CB = \alpha \Rightarrow \hat{E} = \hat{F} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

بنابراین نقطه‌های E و F به کمان درخور زاویه $\frac{\alpha}{4}$ روبه‌رو به

پاره خط ثابت BC تعلق دارند. اما مرکز دایره مربوط به این

کمان در خور نقطه C است، زیرا $CA = CB = CE$ است.

بنابراین قطر ACE از وتر ADF در این دایره، بزرگتر است.

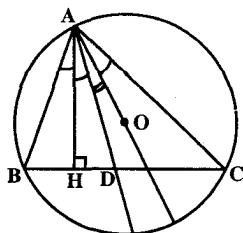
در نتیجه محیط مثلث متساوی الساقین ABC از محیط هر

مثلث نامتساوی الساقین به قاعدهٔ ثابت AB و زاویهٔ رأس ثابت $\hat{ACB} = \alpha$ بزرگتر می باشد.

۵۱۷. اگر AD نیمساز زاویه BAC باشد، می‌دانیم که $\hat{BAH} = \hat{OAC}$ است. بنابراین

$\hat{O}\hat{A}\hat{D} = \hat{H}\hat{A}\hat{D}$ ، یعنی AD نیمساز زاویه

HAO نیز هست.



۱.۵.۱۳. مسأله‌های ترکیبی

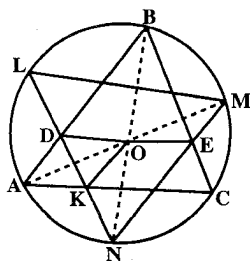
۵۲۰. اگر X, Y, Z تصاویر M بر روی ضلعهای ABC باشند، مزدوجهای همزاویه AM ، BM ، و CM یعنی خطهای p, q, r بر خطهای YZ, ZX, XY عمودند. اگر M روی دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC باشد، نقطه‌های X, Y, Z همخطند، پس p, q, r موازی‌اند. بر عکس، اگر p, q, r موازی باشند، YZ, ZX, XY نیز موازی‌اند، یعنی نقطه‌های X, Y, Z همخطند و M روی (O) قرار دارد.

۵۲۱. حکم مسأله از این حقیقت نتیجه می‌شود که: اگر بر هر ضلع مثلث یک دایره طوری رسم شود که مجموع مقادیرهای زاویه‌ای کمانهای آنها (واقع در یک طرف با مثلث) برابر با 2π باشد، آن وقت این دایره‌ها در یک نقطه مشترکند.

۵۲۳. ۱. دو مثلث OAB و OBB' متساوی‌اند.

$$2. \quad \widehat{OB'B} = \widehat{BAO} \quad \text{و} \quad \widehat{OC'C} = \widehat{CAO}$$

۵۲۴. L, M, N را، رأسهای مثلث T_1 ، وسط ضلعهای AB, BC, CA از مثلث T_2 و O را مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC ، D و K را نقطه‌های برخورد LN با ضلعهای AB و AC می‌گیریم. ثابت می‌کنیم که چهار ضلعی $ADOK$ لوزی است. در واقع $AM \perp LN$ زیرا $\widehat{LB} + \widehat{BM} + \widehat{AN} = 180^\circ$ ، بنابراین نقطه‌های D و K نسبت به خط راست AM قرینه یکدیگرند (AM نیمساز زاویهٔ BAC است). همچنین نقطه‌های A و O نسبت به خط راست LN قرینه یکدیگرند (LN نیمساز زاویهٔ ANB است). از این جا نتیجه می‌شود که $DO \parallel AC$. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد $EO \parallel AC$ که در آن E را نقطه برخورد پاره خط راست MN با ضلع BC گرفته‌ایم. به این ترتیب نقطه‌های D, O, E روی خط راستی قرار دارند که با AC موازی است، یعنی DE موازی AC است. برای بقیهٔ نقطه‌های متناظر نیز مطلب به روش مشابه ثابت می‌شود. هر دو حکم a و b را شامل می‌شود.

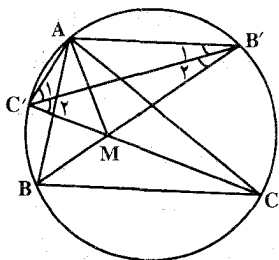


۵۲۵. گزینهٔ (د) درست است.

۵۲۶. دو مثلث $AB'C'$ و $MB'C'$ به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین همنهشت می‌باشند.

زیرا :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{B}'_1 = \hat{B}'_2 = \frac{\widehat{AC'}}{2} = \frac{\widehat{BC'}}{2} \\ \hat{C}'_1 = \hat{C}'_2 = \frac{\widehat{AB'}}{2} = \frac{\widehat{B'C}}{2} \\ B'C' = B'C' \end{array} \right.$$



از برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود که $AB' = MB'$ و $AC' = MC'$. پس $B'C'$ عمود منصف AM است.

۲.۵. دایره‌های محاطی مثلث

۱.۲.۵. تعریف و قضیه

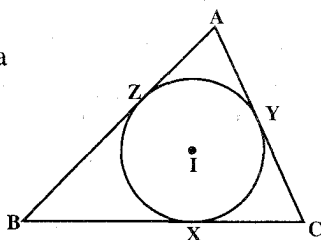
۵۲۷. داریم :

$$AZ = AY, \quad BZ = BX, \quad CX = CY$$

$$AZ + AY = AB + AC - BZ - CY$$

$$= AB + AC - BX - CX$$

$$= AB + AC - BC = 2p - 2a$$



$$AZ = AY = p - a$$

پس،

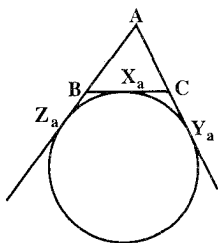
$$BZ = BX = p - b, \quad CX = CY = p - c$$

به طور مشابه،

$$AZ_a = AY_a, \quad BX_a = BZ_a, \quad CX_a = CY_a$$

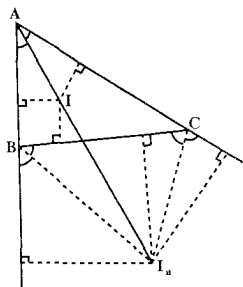
۵۲۸. داریم :

$$\begin{aligned} AZ_a + AY_a &= AB + AC + BZ_a + CY_a \\ &= AB + AC + BX_a + CX_a \\ &= AB + AC + BC = 2p \end{aligned}$$



۵۲۹. اگر S مساحت مثلث ABC باشد، داریم (شکل):

$$S = \text{مساحت } CAI + \text{مساحت } BCI + \text{مساحت } ABI$$



$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}rc + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = \frac{1}{2}r(a + b + c) = pr \\ \Rightarrow r &= \frac{S}{p} \end{aligned}$$

۵۳۰. داریم: (شکل)

$$S = \text{مساحت } ABI_a - \text{مساحت } BCI_a + \text{مساحت } ACI_a$$

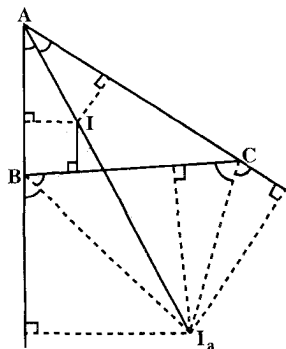
$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}r_a(b + c - a) = r_a(p - a)$$

نتیجه ۱. حاصلضرب چهار شعاع سه مماس مثلث، با مربع مساحت آن مثلث برابر است.

$$r_a r_b r_c = S^2 : p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2 : S^2 = S^2$$

نتیجه ۲. معکوس شعاع داخلی برابر است با مجموع معکوس شعاعهای سه دایره محاطی خارجی مثلث.

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$



۲.۲.۵ شعاع

۱.۲.۲.۵ اندازه شعاع

۵۳۱. با توجه به این که $r = \frac{S}{p}$ ، $S = 2\sqrt{14}$ و $p = 14$ است، داریم:

$$p = 14 \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{14}}{14}$$

۲.۲.۲.۵ رابطه بین شعاعها

۵۳۲. داریم:

$$2S = 2pr = ah_a = bh_b = ch_c$$

$$\begin{aligned} 2p: \frac{1}{r} &= a: \frac{1}{h_a} = b: \frac{1}{h_b} = c: \frac{1}{h_c} \\ &= (a+b+c): \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \end{aligned}$$

و چون $2p = a+b+c$ ، قضیه اثبات می شود.

نتیجه. مجموع معکوسهای شعاعهای خارجی مثلث برابر است با مجموع معکوسهای ارتفاعهای مثلث.

۵۳۳. چون $\hat{AIC} = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}$ است، پس $90^\circ + \frac{\hat{B}}{2} = 120^\circ$ و از آن جا $\hat{B} = 60^\circ$ می باشد.

با توجه به این که $IB = 6\text{cm}$ و $\hat{IBD} = 30^\circ$ است، اگر نقطه تماس دایره محاطی درونی مثلث با ضلع BC را D بنامیم، $ID = r = 3\text{cm}$ است. (ضلع روبه رو به زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است).

۳.۲.۵ نقطه و دایره

۱.۳.۲.۵ نقطه روی دایره

۵۳۴. اگر I نقطه برخورد OA با دایره باشد، IA، IB و IC نیمسازهای زاویه های درونی مثلث ABC می باشند.

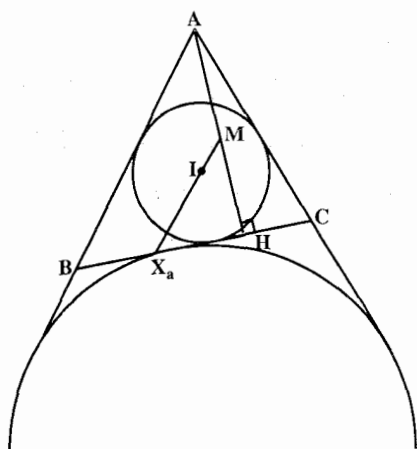
۲.۳.۲.۵. نقطه‌های همخط

۵۳۵. ثابت کنید، نقطه M وسط ارتفاع AH ،

نقطه I مرکز دایره محاطی درونی و X_a

نقطه تماس دایره محاطی برونی مماس بر

ضلع a همخطند.



۳.۳.۲.۵. نقطه‌های همدایره

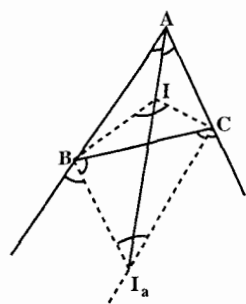
۵۳۶. اگر I مرکز دایره محاطی درونی مثلث و I_a مرکز دایره

محاطی برونی مثلث مماس بر ضلع a باشد، چهار ضلعی

$BICI_a$ محاطی است، زیرا $\hat{BIC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ و

$\hat{BI_aC} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ است، پس $\hat{BIC} + \hat{BI_aC} = 180^\circ$

در نتیجه نقطه‌های I, I_a, B و C روی یک دایره واقعند.



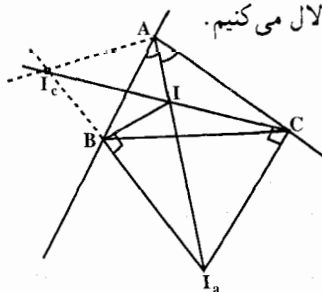
۴.۲.۵. قطر

۵۳۷. اگر I_a و I_c ، ترتیب، مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی نظیر دو ضلع BC و AB از

مثلث ABC باشند، واضح است که زاویه‌های I_cAI_a و I_cCI_a قائمه‌اند. در نتیجه

دایره‌ای به قطر I_cI_a از این دو نقطه می‌گذرد. برای مرکزهای دایره‌های دیگر

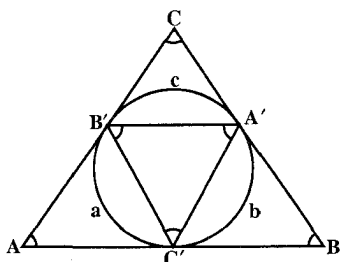
نیز، به همین ترتیب استدلال می‌کنیم.



۵.۲.۵. زاویه

۱.۵.۲.۵. اندازه زاویه

۵۳۸. گزینه (د) درست است. زیرا اگر نقطه های تماس دایره محاطی درونی با ضلعهای BC، CA و AB، به ترتیب، A' ، B' و C' بنامیم، با فرض $B'C' = a$ ، $C'A' = b$ و $A'B' = c$ داریم:



$$\hat{A}' = \frac{a}{2}, \quad \hat{A} = 18^\circ - a \Rightarrow a = 18^\circ - \hat{A}$$

$$\Rightarrow \hat{A}' = \frac{a}{2} = 9^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \hat{A}' < 9^\circ$$

به همین روش: $\hat{B}' < 9^\circ$ و $\hat{C}' < 9^\circ$ است.

۵۳۹. $9^\circ + \frac{\alpha}{2}$

۶.۲.۵. پاره خط

۱.۶.۲.۵. اندازه پاره خط

۵۴۱. الف. $x = 22$ ، زیرا:

$$AR = y = 9 \Rightarrow RC = 19 - 9 = 10 = QC, \quad QB = BP = 12$$

$$\Rightarrow x = BQ + QC = 12 + 10 = 22$$

ب. $y = 6$ ، زیرا:

$$BQ = BP = 12 \Rightarrow QC = 25 - 12 = 13$$

$$\Rightarrow RC = 13 \Rightarrow AR = 19 - 13 = 6 \Rightarrow y = AP = AR = 6$$

۵۴۲. ثابت کنید مثلث AHF در رأس A متساوی الساقین است.

۲.۶.۲.۵. رابطه بین پاره خطها

۵۴۴. فرض کنید O مرکز دایره محاطی باشد، و K و L نقطه‌های تماس این دایره با

ضلعهای AC و AB باشند. خط راستی که از N به موازات BC می‌گذرد، ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های R و M قطع می‌کند. چهار ضلعی OKMN چهار ضلعی

محاطی است. ($\angle ONM = \angle OKM = 90^\circ$)؛ در نتیجه، $\angle OMN = \angle OKN$ ، به همین

ترتیب، $\angle ORN = \angle OLN$ ، اما $\angle OLN = \angle OKN$ ، بنابراین، $\angle ORN = \angle OMN$ ، مثلث

ORM متساوی الساقین است و ON ارتفاع آن است؛ بنابراین $RN = NM$.

۵۴۵. اگر H نقطه اولر نظیر ارتفاع AH، O مرکز دایره محاطی مثلث ABC و D و E به ترتیب

وسط ضلعهای AB و AC باشند، چهار ضلعی

ODLF متوازی الاضلاع است، زیرا $FL \parallel HC$

و $FL = \frac{HC}{2}$ همچنین $OD \parallel HC$ و

$OD = \frac{HC}{2}$ است. بنابراین OF و DL موازی و

مساوی‌اند.

۵۴۶. محل تماس دایره محاطی خارجی با امتداد ضلعهای AB و AC را، M و N نامیده و

محیط مثلث را با ۲P نشان می‌دهیم. داریم:

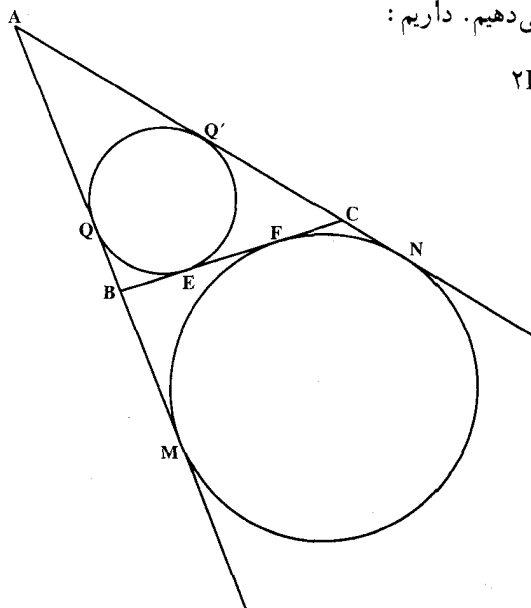
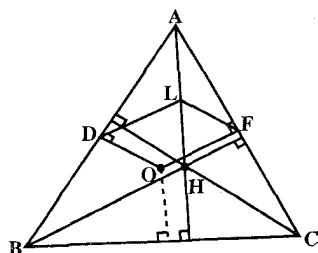
$$2P = AB + BC + AC$$

$$= AB + BF + FC + AC$$

$$= AB + BM + CN + AC$$

$$= AM + AN = 2AM$$

$$\Rightarrow AM = AN = P$$



از طرفی داریم :

$$FC = CN = AN - AC = p - b$$

$$BE + BQ + EC + CQ' + AQ' + AQ = 2P$$

$$\Rightarrow 2BE + 2CQ' + 2AQ' = 2P \Rightarrow BE + AC = P \Rightarrow BE = p - b$$

بنابراین $CF = BE$. پس وسط EF بر وسط BC منطبق است.

۵۴۸. در واقع، داریم :

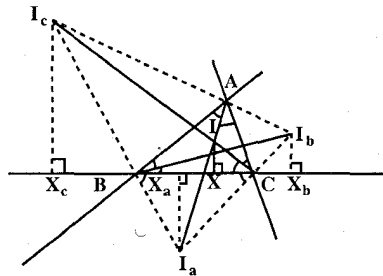
$$BX = p - b, \quad CX_a = p - b$$

نتیجه. داریم :

$$XX_a = BC - BX - CX_a = a - 2(p - b) = b - c$$

$$YY_b = a - c, \quad ZZ_c = a - b$$

به طور مشابه،



۵۴۹. داریم (شکل):

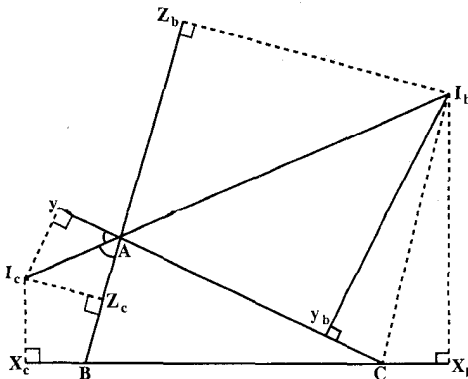
$$BX_c = CX_c - CB = p - a,$$

$$CX_b = BX_b - BC = p - a$$

پس نقطه های X_c و X_b همنا هستند.

$$X_b X_c = X_b C + BC + BX_c = (p - a) + a + (p - a) = b + c$$

که اثبات بخش دوم قضیه به حساب می آید. برای دو ضلع دیگر مثلث ABC نیز نتیجه مشابهی صادق است.



۷.۲.۵. خطهای: موازی، عمود بر هم، نیمساز، ...

۱.۷.۲.۵. خط نیمساز است

۵۵۱. با توجه به شرطهای داده شده در مسأله و این که IC نیمساز زاویه ACB است، نقطه برخورد IC با دایره O' را C' بنامید و ثابت کنید که $C'K = C'H$ است.

۲.۷.۲.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۵۵۲. مسأله کلی (b) را حل می کنیم. فرض کنید، خط راست l محیط چند ضلعی محیطی را در دو نقطه R و Q قطع و این محیط را به دو بخش برابر تقسیم کند. در این صورت، اگر O را مرکز دایره محاطی چند ضلعی بگیریم، خط شکسته شامل پاره خطهای راست OR و OQ، مساحت چند ضلعی را به دو بخش برابر تقسیم خواهد کرد (این مطلب، شبیه دستور $S = \frac{1}{4} Pr$ برای مساحت یک چند ضلعی محیطی به محیط P ثابت می شود).

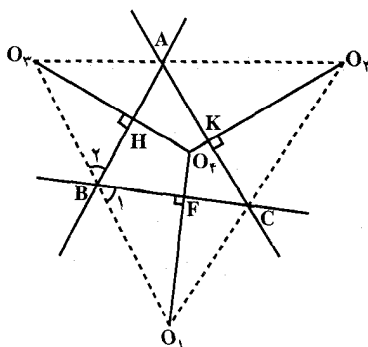
ولی می دانیم، خط راست PQ، مساحت چند ضلعی را نصف می کند، بنابراین نقطه O بر خط راست PQ واقع است.

∇ حل این مسأله جالب است که: برای مثلث و برای n ضلعی محیطی، چند خط راست از این گونه وجود دارد؟

۳.۷.۲.۵. خطها همرسند

۵۵۴. نقطه برخورد O_۱F و O_۳H را O_۴ می نامیم. در مثلثهای قائم الزاویه O_۱BF و O_۳BH داریم:

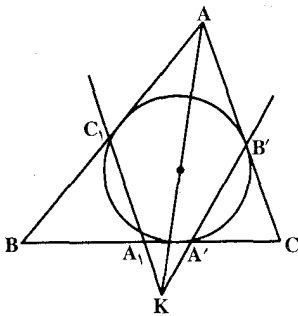
$$\hat{O}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ, \hat{O}_3 + \hat{B}_2 = 90^\circ, \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$



بنابراین $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$ است. یعنی نقطه O_۴ روی عمود منصف O_۱O_۳ است. به همین ترتیب ثابت می شود که نقطه برخورد O_۱F و O_۳H روی عمود منصف O_۱O_۳ و نقطه برخورد O_۲K و O_۴F روی عمود منصف O_۲O_۴ قرار دارند. چون عمود منصفهای ضلعهای هر مثلث همرسند، پس خطهای O_۱F، O_۲K و O_۳H از یک نقطه می گذرند.

۵۵۷. A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 ، نیمسازهای زاویه های مثلث $A_1B_1C_1$ هستند.

۵۵۸. وسطهای AB و BC را با C_1 و A_1 و نقطه های



تماس دایره محاطی مثلث با AC و BC را با B' و

A' نشان دهید. برای روشنی وضع، فرض کنید

$c \geq b$ (c و b طول ضلعهای مثلثند)، در این

صورت، نیمساز زاویه A ، امتداد C_1A_1 را در

نقطه ای مانند K طوری قطع می کند که

$A_1K = \frac{c-b}{2}$. خط راست $B'A'$ باید از همین

نقطه K بگذرد، زیرا مثلثهای KA_1A' و $A'B'C'$

متساوی الساقینند $A'C = B'C$ ، $A_1K = A_1A'$ و $\hat{A_1A'K} = \hat{A_1CB'}$.

۴.۷.۲. خط مماس بر دایره است

۵۵۹. اگر نقطه تماس دایره محاطی داخلی مثلث

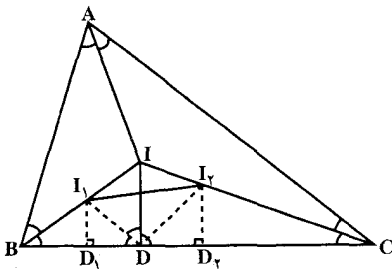
ABC با ضلع BC باشد، خط AD را رسم

می کنیم و نقطه های I_1 و I_2 مرکزهای

دایره های محاطی دو مثلث ADB و ADC

را مشخص می سازیم. کافی است ثابت کنیم

I_1I_2 بر AD عمود است.



۵.۲.۸. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

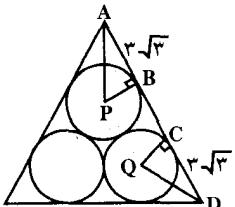
۵۶۰. (د) مطابق با شکل، PB و QC شعاعهایی هستند که بر مماس مشترک دایره های P و Q

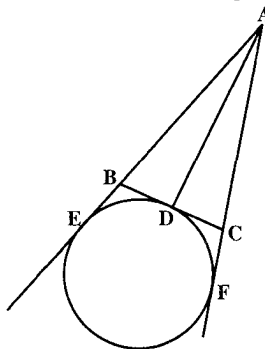
فرود آمده اند. چون $\hat{PAB} = \hat{QDC} = 30^\circ$ ،

$AB = CD = 3\sqrt{3}$ ، از طرف دیگر $BC = PQ = 6$ ،

بنابراین $AD = 6 + 6\sqrt{3}$ و در نتیجه محیط مثلث برابر

$18 + 18\sqrt{3}$ است.





۵۶۱. نقطه‌های تماس ضلع BC و امتداد ضلعهای AB و AC با دایرهٔ محاطی برونی واقع در درون زاویهٔ A را به ترتیب D, E و F می‌نامیم. با فرض $\angle P = 120^\circ$ محیط مثلث، می‌دانیم که $AE = AF = P$ است اما $BD = BE$ و $CF = CD$ است، پس $AB + BD = AC + CD = P$ یعنی خط محیط مثلث ABC را نصف کرده است.

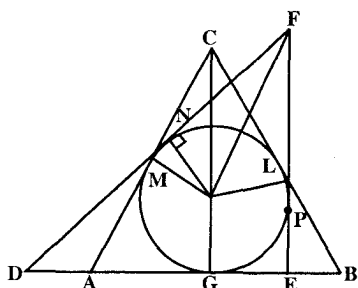
۵۶۲. از O مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث به رأسهای A, B و C وصل می‌کنیم. داریم:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAB}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r + \frac{1}{2} AB \cdot r$$

$$S = \frac{1}{2} r (BC + AC + AB) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 2(2P) \Rightarrow S = 2P$$

۵۶۳. اگر قاعدهٔ BC از مثلث ABC و شعاع دایرهٔ محاطی آن ثابت باشد، مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ BC کمترین محیط را دارد، زیرا $\hat{C} > \hat{F}$ است.

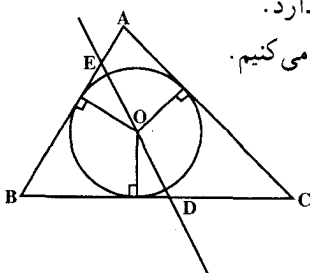


مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OMC و ONF یک ضلع مساوی دارند. از آن جا که، به زاویهٔ NFO که کوچکتر از زاویهٔ MCO است، مایل OF

را که از مایل OC بزرگتر است نظیر می‌کند. در نتیجه فاصلهٔ NF از پای عمود بیشتر از MC است. همچنین $MC + CL < FN + FP$ اما $DN + EP = DE$ ؛ و $AM + BL = AB = DE$ بنابراین تغییرات محیط تنها به تغییرات MC و NF وابسته است، پس مثلث متساوی‌الساقین کمترین محیط را دارد.

۵۶۴. از O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، قاطع DOE را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$S_{BDE} : S_{ACDE} = (BE + BD) : (EA + AC + CD)$$



۳.۵. دایره‌های محیطی و محاطی مثلث

۲.۳.۵. شعاع

۱.۲.۳.۵. اندازه شعاع

۵۷۱. با معلوم بودن دو زاویه و یک ضلع، مثلث ABC را رسم می‌کنیم. آن گاه با رسم دایره‌های محیطی و محاطی آن، شعاعهای این دایره‌ها مشخص می‌شود. اگر تنها ضلع BC و زاویه A معلوم باشند، شعاع دایره محیطی مثلث مشخص می‌شود ولی شعاع دایره محاطی آن مشخص نیست.

۲.۲.۳.۵. رابطه بین شعاعها

$$r_a - r = \angle KA' = \angle (KO - OA')$$

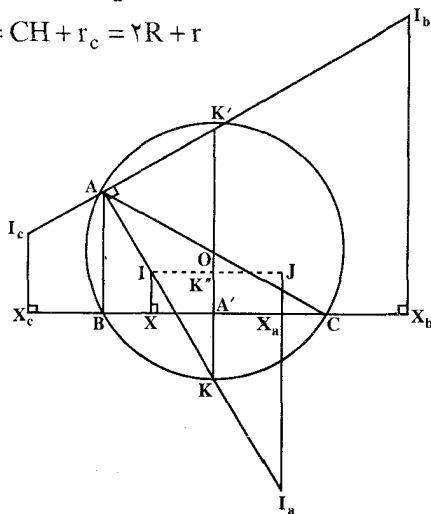
۵۷۲. داریم:

$$\angle OA' + r_a = AH + r_a = \angle KO + r = \angle R + r$$

پس

$$BH + r_b = CH + r_c = \angle R + r$$

و به طور مشابه،



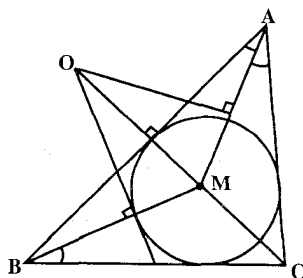
۳.۳.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۵. نقطه درون دایره

۵۷۳. اگر O مرکز دایره محیطی مثلث AMB باشد، آن وقت

$$\angle MAB = 90^\circ - \angle OMB = \angle BMC - 18^\circ$$

زاویه MAC به همین اندازه است.



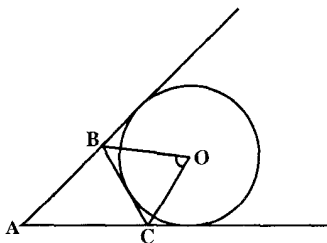
۲.۳.۳.۵. نقطه روی دایره

۵۷۴. دایره محیطی مثلث را رسم می کنیم و وسطهای کمانهای $\widehat{AB}$ ، $\widehat{AC}$ و $\widehat{BC}$ را بترتیب M، L و K می نامیم. اگر از رأسهای مثلث به نقطه ای از این نقطه ها که مقابلشان می باشد وصل کنیم، خطهای حاصل نیمسازهای داخلی زاویه ها هستند و در نتیجه در نقطه ای مانند I هم رسند. اگر به مرکز M و شعاع MI دایره ای رسم کنیم تا امتداد MI را در I_c قطع کند، زاویه $\angle IBI_c$ محاطی و روبه رو به قطر است، پس $\angle BI_c$ نیمساز خارجی زاویه B و در نتیجه I_c مرکز دایره محاطی خارجی نظیر ضلع AB است.

۳.۳.۳.۵. نقطه برون دایره

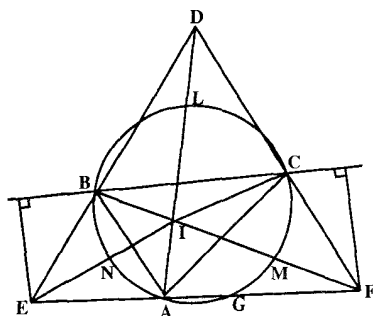
۵۷۵. اگر دایره محاطی خارجی، بر امتداد ضلعهای AB و AC ی مثلث مماس و O مرکز آن باشد، آن وقت بسادگی معلوم می شود که

$$\angle BOC + \angle A = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A \neq 180^\circ.$$



۴.۳.۳.۵. نقطه های همدايره

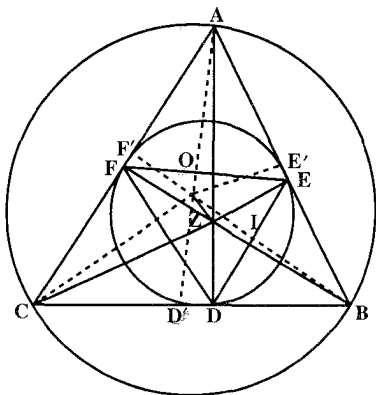
۵۷۶. مثلث ABC را در نظر می گیریم و مرکز دایره های محاطی آن را I، D، E و F می نامیم.



نیمسازهای زاویه های درونی AD، BE و CF بر نیمسازهای زاویه های برونی عمودند و این نیمسازها ارتفاعهای مثلث ارتفاعی می باشند. در نتیجه دایره محاطی مثلث ABC دایره نه نقطه مثلث DEF است و این دایره از نقطه L وسط ID، و از نقطه M وسط ME و از نقطه N وسط NF و ...

۵.۳.۳.۵. نقطه های همخط

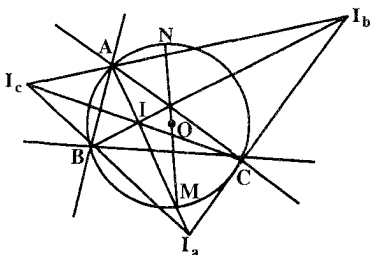
۵۷۷. مثلث داده شده را DEF فرض می کنیم و نقطه برخورد نیمسازهای آن را I می نامیم. در این صورت نیمسازهای خارجی مثلث ABC را خواهند ساخت، یعنی A، B و C



مرکزهای دایره‌های محاطی برونی مثلث خواهند بود. می‌دانیم که عمودهای رسم شده از A، B و C بر ضلعهای مثلث DEF در یک نقطه مانند O هم‌رسند و این نقطه مرکز دایره محیطی مثلث ABC است. زیرا این عمودها عمود منصفهای ضلعهای این مثلثند. نقطه I مرکز دایره محاطی مثلث DEF است. چون دایره محیطی همین مثلث DEF، در ضمن دایره نه نقطه مثلث ABC خواهد

بود، زیرا می‌دانیم که AD، BF و CE ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند و نقطه I محل برخورد آنهاست. از آن جا نقطه Z مرکز دایره نه نقطه مثلث ABC روی IO واقع است و به فاصله مساوی از I نقطه برخورد ارتفاعها و از O مرکز دایره محیطی قرار دارد.

۴.۳.۵. قطر



۵۷۹. اگر BC ضلع ثابت مثلث ABC و I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی آن باشند، II_a و I_bI_c قطرهای دایره‌هایی هستند که از دو رأس B و C می‌گذرند. نقطه M وسط پاره خط II_a وسط کمان ثابت BC و نقطه N وسط پاره خط I_bI_c

وسط کمان CAB است، پس خط MN قطر دایره محیطی مثلث ABC و بر وتر BC عمود است. لذا مرکزهای دو دایره، انتهای دو قطری هستند که بر BC عمود می‌باشد. ۵۸۰. اگر E' نقطه برخورد EO با دایره محیطی مثلث ABC باشد، ثابت کنید، مثلث $E'I_a$ متساوی الساقین است.

۵.۳.۵. زاویه

۵۸۱. فرض کنید، خطی که از I_c به موازات BC رسم می‌شود، I_bX_b را در J' قطع کند

$$I_b\hat{I}_cJ' = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$$

(شکل). داریم :

۵.۳.۶. پاره خط

۵.۳.۶.۱. رابطه بین پاره خطها

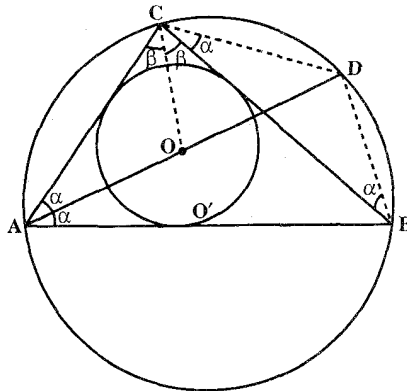
۵۸۲. (د) چون AB و AC بر دایره کوچک مماسند و AD از مرکز آن می گذرد، داریم:

$$\hat{C\hat{A}D} = \hat{B\hat{A}D} = \alpha$$

(شکل را ملاحظه کنید)

$$\hat{A\hat{C}Q} = \hat{B\hat{C}O} = \beta$$

همچنین



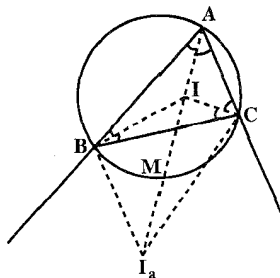
بنابراین کمانهای $\widehat{CD}$ و $\widehat{BD}$ مساوی و در نتیجه وترهای آنها نیز برابرند: $CD = BD$.

حال با اثبات $\hat{O\hat{C}D} = \hat{C\hat{O}D}$ نشان می دهیم که $CD = OD$ زیرا:

$$\hat{O\hat{C}D} = \hat{O\hat{C}B} + \hat{B\hat{C}D} = \beta + \alpha$$

و زاویه COD یک زاویه خارجی مثلث AOC و برابر مجموع زاویه های داخلی غیرمجاورش یعنی $\alpha + \beta$ است. بنابراین $CD = OD$ و (د) گزینه درست است.

۵۸۳. اگر I و I_a بترتیب مرکز دایره محاطی درونی و دایره برونی مماس بر ضلع a و M نقطه برخورد دایره محیطی مثلث ABC با Π_a باشد، باید ثابت کنید که $MI = MI_a$ است.



۵.۳.۷. خطهای : موازی، عمود بر هم، نیمساز، هم‌رس، ...

۵.۳.۷.۱. خطها هم‌رسند

۵۸۴. ثابت کنید که ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ با ضلعهای متناظر از مثلث ABC موازی‌اند.

۵.۳.۷.۲. خط مماس بر دایره است

۵۸۵. ثابت کنید که با AD ، L همان زاویه‌هایی را تشکیل می‌دهد که خط راست BC مماس

بر دایرهٔ محاطی مثلث. بنابراین، نتیجه می‌شود که مماس دیگر بر دایرهٔ محاطی که از D

می‌گذرد، با L موازی است.

۵.۳.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۶. زیرا مثلث اصلی، مثلث T (مثلث حاصل از برخورد مماسهایی که بر دایرهٔ محیطی مثلث

در رأسهای مثلث رسم می‌شوند) برای مثلث دوم خواهد بود و حکم ثابت است. حکم

برای دایره‌های محاطی خارجی نیز صادق است.

۵.۳.۹. مسأله‌های ترکیبی

۵۸۷. الف) $\hat{BAC} = \alpha$ ، $\hat{ABC} = \beta$ و $\hat{BCA} = \gamma$ می‌نامیم (شکل)، در این صورت، داریم :

$$\hat{DAB} = \hat{DAC} = \frac{\alpha}{2} \text{ که از آن جا، به دست می‌آید: } BD = DC.$$

$$\text{چون } \hat{ODC} = \hat{ABC} = \beta$$

$$\hat{COD} = \hat{OCB} + \hat{BCD} = \frac{1}{2} \hat{ACB} + \hat{BAD} = \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

$$\text{بنابراین: } \hat{COD} = 180^\circ - \beta - \frac{\alpha + \gamma}{2} = \alpha + \gamma - \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \hat{OCD}$$

به نحوی که $DO = DC$.

ب) $\widehat{AD} = 2\alpha$ ، $\widehat{AB} = 2\beta$ ، $\widehat{BC} = 2\gamma$ و $\widehat{CD} = 2\delta$ می‌نامیم و وسط کمانهای BC

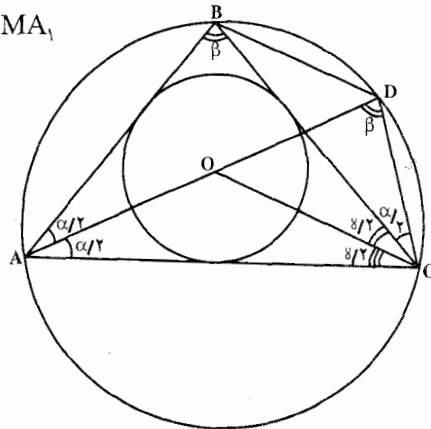
و CD را به ترتیب، M و N می‌گذاریم (شکل). در این صورت، نقطه‌های D_1 و B_1 ،

بترتیب، بر پاره‌خطهای راست AM و AN ، و A_1 در نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای BN و

DM واقع می شوند.

با توجه به بخش الف) داریم :

$$MD_1 = MB = MC = MA_1$$



بنابراین، مثلث D_1MA_1 متساوی الساقین است و

$$\widehat{D_1A_1M} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AMD}) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

$$\widehat{B_1A_1N} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

$$\widehat{DA_1N} = \widehat{BA_1M} = \frac{\gamma + \delta}{2}$$

به همین ترتیب، به دست می آید :

از آن جا که

$$\widehat{D_1A_1B_1} = 180^\circ - \widehat{D_1A_1M} - (\widehat{B_1A_1N} - \widehat{DA_1N})$$

بنابراین

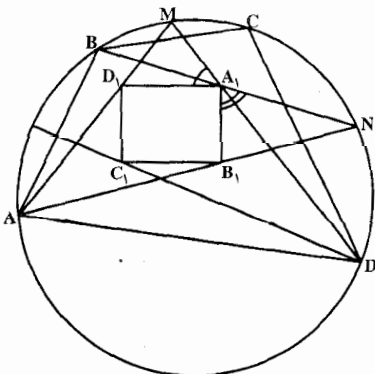
$$= 180^\circ - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) - (90^\circ - \frac{\beta}{2}) + \frac{\gamma + \delta}{2}$$

$$= \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} = 90^\circ$$

به همین ترتیب، می توان ثابت کرد که،

سه زاویه دیگر چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$

هم، قائمه اند.



۴.۵. دایره‌های نه نقطه، پروکارد، لوموان، ...

۱.۴.۵. دایره نه نقطه

۱.۱.۴.۵. تعریف و قضیه

۵۹۰. اولاً. از A' به C' وصل می‌کنیم. دو مثلث $OC'A'$ و $HA''C''$ به حالت برابری دو

زاویه و ضلع بین همنهشتند. چون در مثلث

AHC داریم: $A''C'' \parallel AC$ و

$A''C'' = \frac{AC}{2}$. از طرفی در مثلث ABC چون A' و B' وسطهای BC و AC هستند

$A'C' \parallel AC$ و $A'C' = \frac{AC}{2}$ ، پس

$A''C'' \parallel A'C'$ و $A''C'' = A'C'$ است.

از طرفی چون ضلعهای دو زاویه $\hat{C}_1'$ و

$\hat{C}_1''$ ، همین طور ضلعهای زاویه‌های $\hat{A}_1'$ و $\hat{A}_1''$ با یکدیگر موازی‌اند، این چهار زاویه

نیز دو به دو با هم مساوی‌اند و بنابراین دو مثلث $OC'A'$ و $HC''A''$ همنهشتند. از

برابری این دو مثلث نتیجه می‌شود که $A'O = A''H$ و $OC' = C''H$ اما

$OA' = \frac{AH}{2}$ و $OC' = \frac{CH}{2}$ پس $C''H = \frac{CH}{2}$ و $A''H = \frac{AH}{2}$

ثابت می‌شود که $OB' = \frac{BH}{2}$.

ثانیاً. دو مثلث OMA' و $A''HM$

بنا به حالت دو زاویه و ضلع بین

همنهشتند چون $\hat{A}_1' = \hat{A}_1''$ زیرا

$AK \parallel OA'$ و $A'A''$ قاطع از

طرفی $OA' = A''H$ چون

$\hat{MHA}'' = \hat{MOA}'$ ، لذا نتیجه

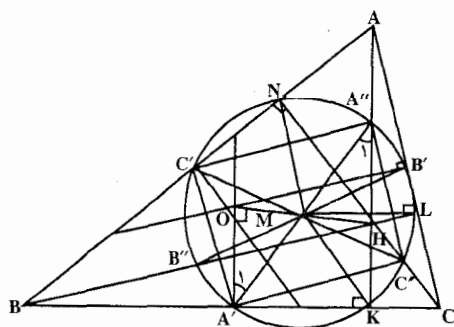
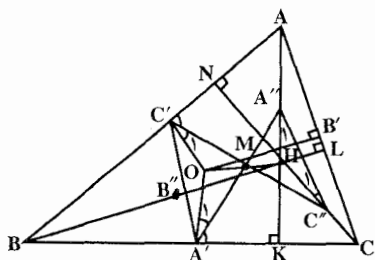
می‌شود که $MO = MH$

می‌شود که $MO = MH$

می‌شود که $MO = MH$

می‌شود که $MO = MH$

می‌شود که $MO = MH$



و $MA'' = MA'$ یعنی $A'A''$ از نقطه M وسط OH می‌گذرد. حال از C' به C'' وصل می‌کنیم تا خط OH را در نقطه F قطع کند. دو مثلث $C'FO$ و $C''HF$ همنهشتند. یعنی $FO = FH$ و $FC' = FC''$ است. یعنی F وسط OH است در نتیجه F بر M منطبق است، پس $MC' = MC''$ است، پس $C'C''$ از نقطه M وسط OH می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $B''B'$ نیز از M وسط OH می‌گذرد. پس چهار پاره خط $A'A''$ ، $B'B''$ ، $C'C''$ و OH از یک نقطه مانند M ، که وسط هر یک از آنهاست می‌گذرند.

ثالثاً. چهار ضلعی $C'A''C''A'$ مستطیل است، زیرا $AC \parallel A'C' \parallel A''C''$ و $BL \parallel A'C'' \parallel A''C'$ و $BC \perp AC$ است. پس دو قطر آن با هم برابرند. لذا $MC'' = MC' = MA'' = MA'$ در مثلث $C'A'C''$ چون $A'M$ میانه است، پس $MA' = MC' = MC''$ به همین ترتیب ثابت می‌شود که $MA'' = MC' = MC''$ و $MB' = MB'' = ML$ ، پس:

$$MK = MB' = MB'' = ML = MN = MC' = MC'' = MA'' = MA'$$

بنابراین نقطه M از نه نقطه A' ، B' ، C' ، A'' ، B'' ، C'' ، L و N به یک فاصله است. دایره به مرکز M و به شعاع یکی از پاره خطهای بالا، دایره اولر یا دایره نه نقطه یا دایره فوئرбах نامیده می‌شود.

دایره نه نقطه، در هر مثلث، وسطهای سه ضلع، پاهای ارتفاعها و وسطهای پاره خطهایی که رأسها را به مرکز ارتفاعی مثلث وصل می‌کنند نه نقطه اند واقع بر یک دایره، که شعاع این دایره که همان شعاع دایره محیطی مثلث میانه‌ای است (مثلی که رأسهای آن وسطهای ضلعهای مثلث است). نصف شعاع دایره محیطی مثلث یعنی برابر $\frac{R}{2}$ است و مرکز آن روی خط اولر واقع است و از مرکز ارتفاعی و مرکز دایره محیطی مثلث به یک فاصله است.

این مسأله را اغلب اروپاییان به اولر نسبت می‌دهند، زیرا اولر در سال ۱۷۶۵ ثابت کرده است که دایره محیطی مثلث ارتفاعیه بر دایره محیطی مثلث میانه‌ای منطبق است اما اثبات کامل قضیه برای نخستین بار در سال ۱۸۲۱ توسط ژان ویکتور پونسله Jean Victor Poncelet (۱۸۰۰ - ۱۸۳۴) منتشر شده است. خیلی دیرتر از آن فوئرباح K. Feuerbach (۱۸۰۰ - ۱۸۳۴) همان استنباط جزئی اولر را از نو به دست آورد و علاوه بر آن این خاصیت مهم را که دایره نه نقطه بر دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث مماس است نیز ثابت نمود. از این رو بسیاری از نویسندگان دایره نه نقطه را دایره فوئرباح می‌نامند.

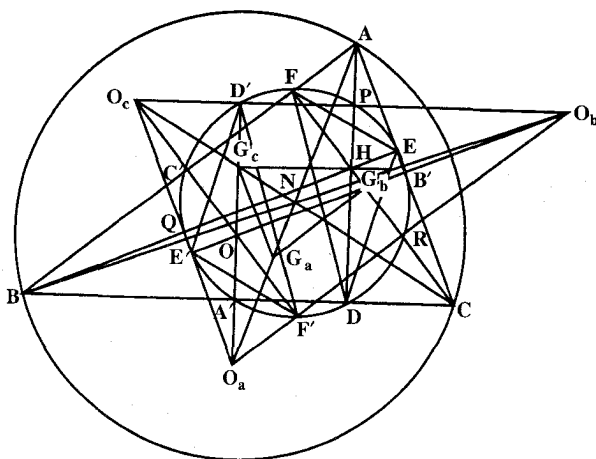
۵.۴.۱.۲. شعاع

۵۹۱. مثلث ABC ، مثلث ارتفاعیه مثلث $I_a I_b I_c$ است.

۵۹۳. در واقع، این دایره، دایرهٔ محیطی مثلث پادک (ارتفاعی) مشترک آنهاست.

۵۹۴. در واقع، شعاع دایره‌های محیطی این مثلثها با قطر دایرهٔ محیطی دایرهٔ نه نقطهٔ مشترک آنها برابرند.

۵۹۵. O_c و O_b ، O_a ، O مرکزهای دایره‌های محیطی چهار مثلث ABC ، BCH ، ACH و HAB از یک گروه مرکز ارتفاعی (شکل)، نقطه‌های متقارن A ، H ، B و C یعنی مرکزهای ارتفاعی این مثلثها، نسبت به N ، مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مشترک آنها هستند؛ پس قضیه ثابت می‌شود.



۵۹۶. دو چهارضلعی مرکز ارتفاعی $HABC$ و $OO_a O_b O_c$ نسبت به N مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ گروه $HABC$ متقارنند. پس دایرهٔ نه نقطهٔ $OO_a O_b O_c$ نسبت به (N) ، یعنی دایرهٔ نه نقطهٔ $HABC$ متقارن است. چون متقارن هر دایره نسبت به مرکز آن دایره خود آن دایره است، قضیه ثابت می‌شود.

۵۹۷. در واقع، دو گروه $HABC$ و $OO_a O_b O_c$ نسبت به (N) ، یعنی مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مشترکشان متقارنند؛ پس گروه اول را می‌توان از گروه دوم، دقیقاً به همان صورتی که گروه دوم از گروه اول به دست آمده است، به دست آورد.

۳.۱.۴.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۱.۴.۵. نقطه روی دایره

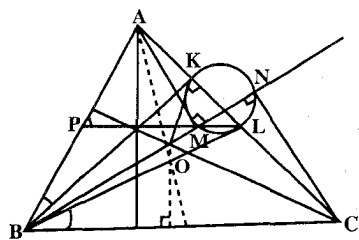
۶.۵۹۹. نقطه.

۶۰۰. بیشترین تعداد نقطه برخورد، ۶ نقطه و کمترین تعداد نقطه برخورد ۳ نقطه است.

۶۰۳. وتر مشترک دایره‌های نه نقطه مثلثهای OHA و OHB را تعیین کنید و ثابت کنید که دایره نه نقطه مثلث OHC نیز از دو سر این وتر مشترک می‌گذرد.

۲.۳.۱.۴.۵. نقطه‌های همدایره

۶۰۴. ثابت می‌کنیم که M و N روی میانخطهای مثلث ABC، متناظر با آنها، واقعند. اگر P

وسط AB باشد، آن وقت $\hat{MPA} = \hat{ABM} = \hat{ABC} = \hat{APL}$. برای روشنی وضع،فرض کنید، ABC مثلثی حاده باشد و $\hat{C} \geq \hat{A}$ ، در این صورت،(از) $\hat{MNK} = 180^\circ - \hat{KNB} = \hat{KCB} = \hat{MLK}$

این حقیقت استفاده کرده‌ایم که نقطه‌های K، N،

B و C بر روی یک دایره واقعند و ML با

BC موازی است). بنابراین، نقطه‌های L، M،

N و K بر روی یک دایره واقعند. بعلاوه

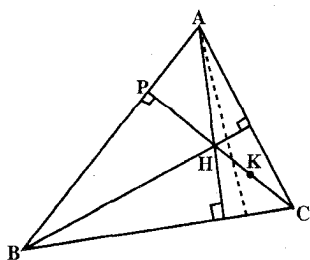
$$\hat{LMK} = \hat{PMB} + \hat{NMK} = \frac{1}{2}\hat{B} + \hat{BMK} = \frac{1}{2}\hat{B} + \hat{A}$$

اگر O مرکز دایره محیطی مثلث LMK باشد، آن وقت

$$\hat{LOK} = 2\hat{LMK} = \hat{B} + 2\hat{A} = 180^\circ - \hat{C} + \hat{A} = 180^\circ - \hat{LPK}$$

یعنی، O بر دایره‌ای واقع است ($\hat{LPK} = \hat{APK} - \hat{APL} = 180^\circ - 2\hat{A} - \hat{B} = \hat{C} - \hat{A}$)

که از نقطه‌های L، P و K می‌گذرد، و این درست همان دایره نه نقطه مثلث است.



۶۰۵. اگر H نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد،

مثلثهای ABC و AHB، AHC و BHC یک دایره نه

نقطه دارند و هر یک از ۴ مثلث بالا شش دایره از

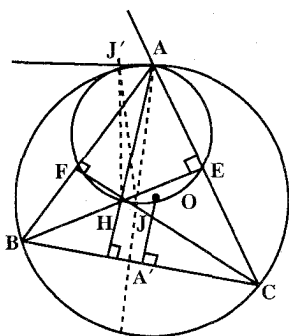
دایره‌های جواب مسأله را مشخص می‌کند. به عنوان

مثال نیمساز زاویه CAH دو دایره O و O' را مشخص

می‌کند. دایره O از نقطه K وسط CH و از پای عمود AP

که از A بر CH رسم شده و از L و M تصویرهای رأسهای C و H روی نیمساز AML می‌گذرد.

۳.۳.۱.۴.۵. نقطه‌های همخط



۶۰۶. اگر J و J' پای عمودهایی باشند که از نقطه H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC بر نیمسازهای زاویه داخلی و خارجی A فرود آمده‌اند، این دو نقطه روی دایره‌ای به قطر AH قرار دارند. همچنین این نقطه‌ها از دو انتهای قطری از دایره محیطی مثلث AFE که بر ضلع EF عمود است واقعند. دایره‌ای به قطر BC از نقطه‌های E و F می‌گذرد. همچنین دایره نه نقطه، از این دو نقطه می‌گذرد. پس مرکزهای A' و N از این دایره‌ها روی عمود بر EF یعنی JJ' قرار دارند.

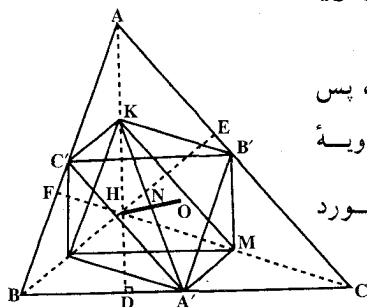
۴.۱.۴.۵. کمان

۶۰۸. EF بر OA و بر موازی آن A'K عمود است. بنابراین قطر A'K وتر EF و کمان EF را در وسط آنها قطع می‌کند.

۵.۱.۴.۵. پاره خط

۶۰۹. اگر H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث باشد وسط HP روی دایره نه نقطه مثلث است.

۶.۱.۴.۵. زاویه



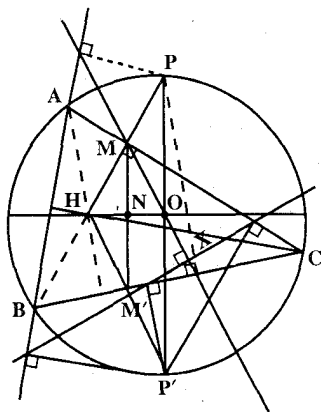
۶۱۲. $KD \perp BC$ و KA' قطر دایره نه نقطه است، پس این دایره با ضلع BC تحت زاویه $\widehat{DKA'} = \widehat{HKN} = \widehat{HAO} = |\widehat{B} - \widehat{C}|$ برخورد می‌کند.

۷.۱.۴.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۱.۷.۱.۴.۵. خطها برهم عمودند

۶۱۳. اگر خط اولر نظیر مثلث ABC و PP'

قطری از دایرة محیطی این مثلث باشد، خط
سیمسن نقطه های P و P' با HP و HP' در
 M و M' وسطهای آنها برخورد می کند.
نقطه های O ، M ، M' و N وسطهای PP' ،
 HP ، HP' و OH می باشند. نقطه N همچنین
وسط MM' است. همچنین شعاع دایرة نه
نقطه برابر است با:



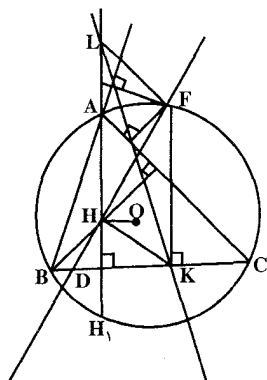
$$NM = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2} R$$

پس $M'M$ قطری از دایرة نه نقطه است. هرگاه X نقطه برخورد خطهای سیمسون
باشد، زاویه MXM' قائمه است و بنابراین X روی دایرة نه نقطه واقع است.

۲.۷.۱.۴.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد

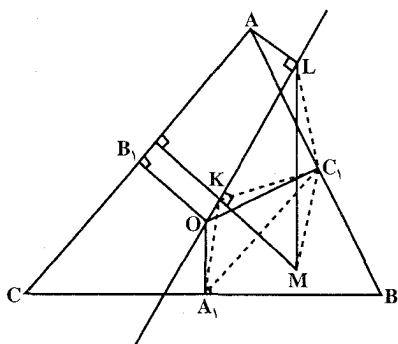
۶۱۴. چون وسط FH بر دایرة نه نقطه قرار دارد، کافی است

نشان دهیم که خط سیمسون نظیر نقطه F هم، FH را
نصف می کند. فرض کنید K تصویر F بر یک ضلع
مثلث، D پای ارتفاع وارد بر همین ضلع و H_1 نقطه
برخورد این ارتفاع و دایرة محیطی مثلث باشد،
 L نقطه برخورد خط سیمسون با همین
ارتفاع باشد، و بالاخره، M نقطه ای روی خط راست
 HH_1 باشد که برای آن $FM \parallel KD$ ؛ در این صورت،
 $(FM = KD) \Delta FMH_1 = \Delta KDL = \Delta KDL$ ، هر دو



آنها قائم الزاویه اند و $\hat{DLK} = \hat{MH_1F}$ ، زیرا ارتفاع مثلث، خط سیمسون نظیر رأسی
است که از آن خارج می شود. همچنین، بسادگی می توان نشان داد که جهتهای $\vec{H_1M}$ و
 $\vec{DL}$ یکی اند، یعنی، $FKHL$ متوازی الاضلاع است، که از آن جا حکم ما نتیجه می شود.

۳.۷.۱.۴.۵. خطها همرسند



۶۱۵. در شکل، O مرکز دایرهٔ محیطی است، A_1 ، B_1 و C_1 وسط ضلعها و L و K ، بترتیب، تصویر A و B روی L هستند، M نقطهٔ برخورد خطهای راستی است که از نقطه‌های L و K عمود بر BC و CA می‌گذرند. برای روشنی وضع، فرض کنید، مثلث ABC بازوهای حاده باشد. نخست، ثابت می‌کنیم که C_1 ، مرکز دایرهٔ

محیطی مثلث KLM است. نقطه‌های A_1 ، O ، K ، C_1 و B بر یک دایره واقعند. در نتیجه $\hat{C} - 90^\circ = \hat{C}_1\hat{K}L = \hat{C}_1\hat{O}A_1$ ؛ به روش مشابه، $\hat{C} - 90^\circ = \hat{C}_1\hat{L}K$. بنابراین $|\hat{C}_1\hat{L}K| = |\hat{C}_1\hat{K}L|$ و چون $\hat{KML} = \hat{C}$ ، حکم ما اثبات شده است. بعلاوه، KM بر A_1C_1 عمود است و $KC_1 = C_1M$ ، بنابراین $\hat{B} - 180^\circ = \hat{C}_1\hat{M}A_1 = \hat{C}_1\hat{K}A_1$ ، یعنی M بر دایرهٔ محیطی مثلث $A_1B_1C_1$ واقع است. ۶۱۸. این مسأله حالت خاصی از این مسأله است. خطهای سیمسون نظیر دو سر قطر دایرهٔ محیطی یک مثلث برهم عمودند. حال باید ثابت کنید که این نقطهٔ برخورد نقطهٔ فوئرباخ است.

۴.۷.۱.۴.۵. خطها پاد موازی اند

۶۱۹. ثابت کنید، چهار ضلعی حاصل بین خط مماس، آن ضلع و دو ضلع دیگر محاطی است.

۵.۴.۱.۸. شکل‌های ایجاد شده

۶۲۰. در واقع ارتفاعهای مثلث $I_aI_bI_c$ که از نیمسازهای خارجی مثلث ABC تشکیل شده است، نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC هستند، پس I ، مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC ، مرکز ارتفاعی مثلث $I_aI_bI_c$ است.

۶۲۱. در واقع، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای گروه مرکز ارتفاعی $II_aI_bI_c$ حتماً متقارن این نقطه‌ها نسبت به مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ این گروه هستند، و این مرکز نه نقطه بر مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC ، نقطهٔ O ، منطبق است.

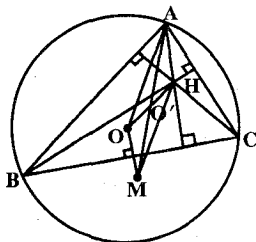
نکته. گزاره‌های بالا با در نظر گرفتن مثلث ABC به عنوان مثلث پادک مثلی که رأسهای آن مرکزهای سه مماس مثلث ABC هستند به دست آمده‌اند. حال آن که در بررسی مرکز ارتفاعی و دایرهٔ نه نقطه، مثلث ABC مثلث اصلی با مرکز ارتفاعی و دایرهٔ نه نقطهٔ مستقل

در نظر گرفته شده بود. به این ترتیب، یک مثلث می تواند نقش دو گانه ای در رابطه با مرکز ارتفاعی از یک طرف و مرکزهای سه مماس از طرف دیگر بازی کند. این نقش دو گانه «ترجمه» یا «تبدیل» ویژگیهای به دست آمده برای مرکز ارتفاعی به ویژگیهای مرکزهای سه مماس و برعکس را، بدون نیاز به اثبات مجدد ویژگیهای حاصل، امکانپذیر می سازد. مثلاً با در نظر گرفتن مثلث ABC به عنوان مثلث اصلی، متوجه شدیم که دایره ای که قطر AH آن است از نقطه های E و F می گذرد و مرکزش، P، روی دایره نه نقطه مثلث ABC قرار دارد. ولی A و H مرکزهای سه مماس مثلث پادک DEF از مثلث ABC هستند. پس اگر ABC را مثلث پادک گروه مرکزهای سه مماس آن، یعنی I_a, I_b, I_c در نظر بگیریم، می توانیم بگوییم دایره ای که II_a قطر آن است از رأسهای B و C از مثلث ABC می گذرد و مرکز آن روی دایره محیطی مثلث ABC قرار دارد. ولی این گزاره را به طور مستقل نیز اثبات کردیم. دایره ای که $I_b I_c$ قطر آن است، با دایره ای که BC قطر آن است، متناظر است. هر دو این دایره ها را قبلاً به طور مستقل در نظر گرفتیم. خواننده خود می تواند نمونه هایی دیگر از این نوع پیدا کند.

۹.۱.۴.۵. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

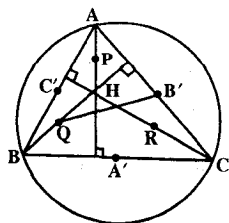
۶۲۲. a. یک b. یک c. بینهایت عدد

۶۲۹. اگر H مرکز ارتفاعی و O مرکز دایره محیطی مثلث ABC باشد نقطه O' وسط OH مرکز دایره نه نقطه این مثلث است. قرینه نقطه O نسبت به ضلع BC را M می نامیم.



چون $OM = AH$ و $OM \parallel AH$ است، چهارضلعی OAHM متوازی الاضلاع است. در نتیجه قطرهای آن یکدیگر را نصف می کنند یعنی نقطه M قرینه رأس A نسبت به مرکز دایره نه نقطه مثلث می باشد.

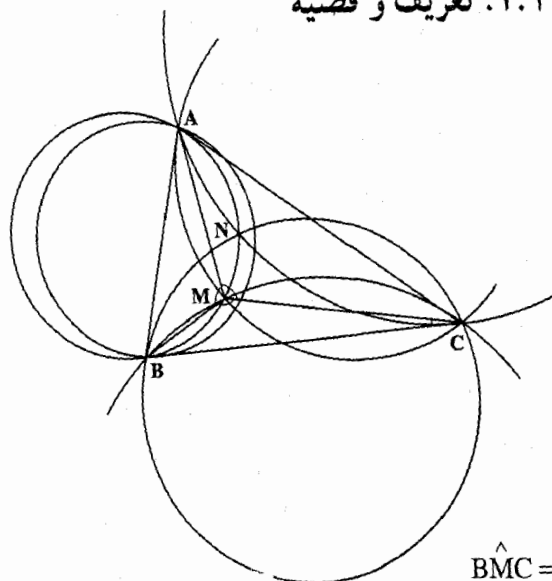
۱۰.۱.۴.۵. مسأله های ترکیبی



۶۳۰. از شکل داده شده استفاده کنید. با توجه به این که نقطه B' وسط ضلع AC و نقطه Q وسط پاره خط BH است (H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است). دایره نه نقطه مثلث ABC نیز دایره گذرنده بر سه نقطه A', B', C' است.

۲.۴.۵. دایره بروکارد

۱.۲.۴.۵. تعریف و قضیه



۶۳۳. دو دایره (AB) و (BC)

در نقطه B مشترکند

(شکل)؛ پس در نقطه

دیگری داخل مثلث

ABC نیز مشترکند که آن

را M می نامیم. دایره

(AB) در B بر BC

مماس است، پس

$$\hat{A}MB = 18^\circ - \hat{B} \text{ و}$$

همچنین؛ پس، $\hat{B}MC = 18^\circ - \hat{C}$

$$\hat{A}MC = 36^\circ - (18^\circ - \hat{B}) - (18^\circ - \hat{C}) = \hat{B} + \hat{C} = 18^\circ - \hat{A}$$

پس نقطه M روی کمائی از دایره (AC) که داخل ABC است قرار دارد؛ و اثبات

قضیه کامل می شود.

۶۳۴. اثبات، شبیه اثبات قضیه قبل است.

۶۳۵. زاویه MAB در دایره (AB)

محاط است و برابر نصف

$\widehat{BM}$ است؛ $\widehat{MBC}$ که از

وتر BM و مماس BC تشکیل

می شود نیز نصف $\widehat{BM}$ است؛

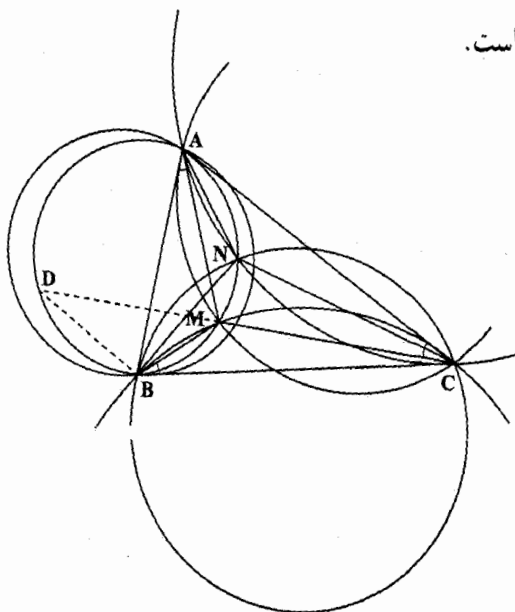
پس این دو زاویه برابرند. به

همین ترتیب $\widehat{MBC}$ با

$\widehat{MCA}$ برابر است.

حال اگر M' نقطه دیگری

باشد، به طوری که



$M'AB = M'BC$ ، آن گاه دایره ای که از A ، B می گذرد بر BC در B مماس است، یعنی نقطه ای از دایره (AB) است. به طور مشابه، برای این که داشته باشیم $M'BC = M'CA$ ، نقطه M' باید روی (BC) باشد؛ پس M بر M' منطبق است. قسمت (ب) هم به همین ترتیب ثابت می شود.

۶۳۶. اگر N' مزدوج هم زاویه نقطه بروکار M باشد (شکل)، آن گاه داریم:

$$\hat{MAB} = \hat{N'AC}, \hat{MBC} = \hat{N'BA}, \hat{MCA} = \hat{N'CB}$$

و چون

$$\hat{MAB} = \hat{MBC} = \hat{MCA}$$

پس،

$$\hat{N'AC} = \hat{N'BA} = \hat{N'CB}$$

یعنی N' بر N منطبق است.

تعریف. زاویه MAB را که برابر زاویه NAC نیز هست، زاویه بروکار مثلث می نامند و معمولاً آن را با ω نشان می دهند.

۶۳۷. فرض کنید خطهای $A\Omega$ ، $B\Omega$ و $C\Omega$ دایره محیطی (O) از مثلث ABC را در B' ، C' و A' قطع کنند. در مثلث $A'B'C'$ داریم:

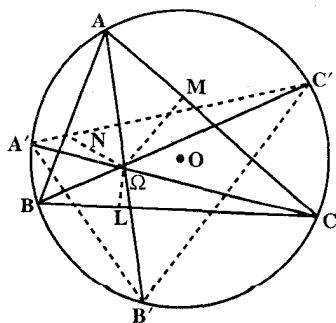
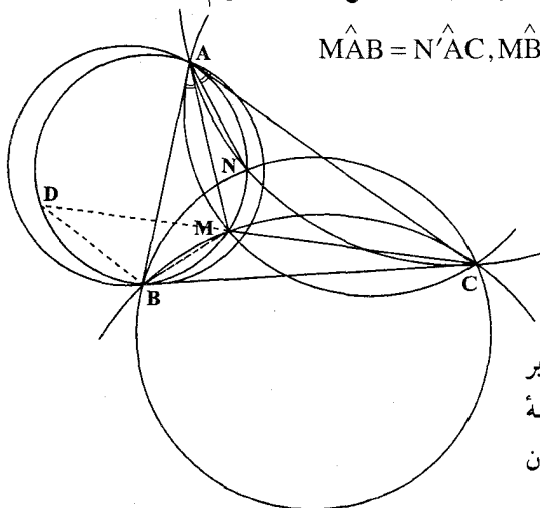
$$\hat{A'} = \hat{B'A'C'} + \hat{C'A'C} = \hat{B'AC} + \hat{C'BC} = \hat{B'AC} + \hat{B'AB'} = \hat{A}$$

برای زاویه های B' و C' نیز مطلب مشابهی صادق است، پس دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه اند و در یک دایره محاطند؛ پس با هم همنهشتند.

برای نقطه بروکار دوم نیز وضعیت مشابهی برقرار است.

توجه کنید که مثلث $A'B'C'$ را می توان از مثلث ABC با دورانی حول مرکز دایره محیطی (O) برابر زاویه 2ω در جهت پادساعتگرد به دست آورد، زیرا

$$\hat{AOA'} = 2\hat{ACA'} = 2\omega$$



تعریف. نقطه N را نقطه تارِ مثلث مفروض می‌نامند.

۶۴۱. زاویه $\angle OAK$ که در دایره (OK) محاط است، قائمه است؛ پس $OA \perp$ عمودی است که از مرکز دایره محیطی O بر میانه متقارن AK از مثلث ABC رسم شده است؛ و قضیه ثابت می‌شود.

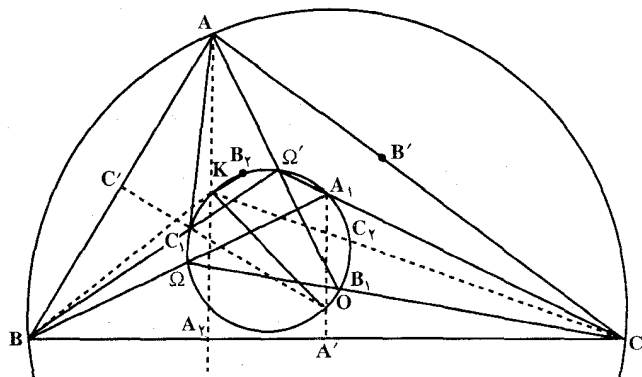
۵.۴.۲. نقطه و دایره

۶۴۲. دو نقطه بروکار، مرکز دایره محیطی مثلث و نقطه لوموان (نقطه همرسی شبه میانه‌ها) مثلث.

۳.۲.۴.۵. خط‌های: موازی، عمود برهم، ...

۱.۳.۲.۴.۵. خطها موازی اند

۶۴۳. در شکل، مثلث $A_1B_1C_1$ مثلث اول پروکار است. نیمساز زاویه بین دو ضلع متناظر از مثلث ABC و مثلث $A_1B_1C_1$ به عنوان مثال نیمساز زاویه بین دو ضلع BC و B_1C_1 را رسم کنید. سپس خط سیمسون نظیر یک نقطه برخورد OK با دایره محیطی مثلث ABC را نیز رسم کنید و ثابت کنید که این دو خط با هم موازی و یا برهم عمودند.



۲.۳.۲.۴.۵. خطها هم رسند

۶۴۴. در شکل، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ بترتیب مثلثهای اول و دوم پروکار است. ثابت کنید خطهای A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 همگی از نقطه G مرکز ثقل مثلث ABC می‌گذرند.

۴.۲.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

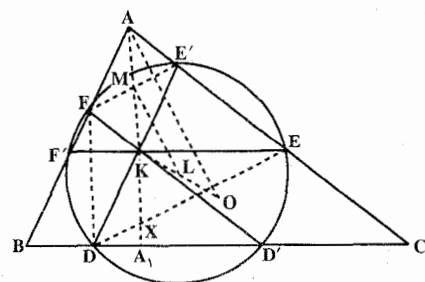
۶۴۵. بلی

۳.۴.۵. دایره لوموان

۱.۳.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۴۶. فرض کنید، نقطه K نقطه لوموان مثلث ABC باشد و خطهای رسم شده از K به موازات ضلعهای BC ، CA و AB به ترتیب $D'KF$ ، EKF و $D'KE$ باشند (شکل) که این ضلعها را در نقطه‌های D ، E ؛ D' ، E' ؛ F ، F' قطع می‌کنند. چون $AFKE'$ متوازی الاضلاع است، خط $E'F$ توسط میانه متقارن AK نصف می‌شود و بنابراین، با BC

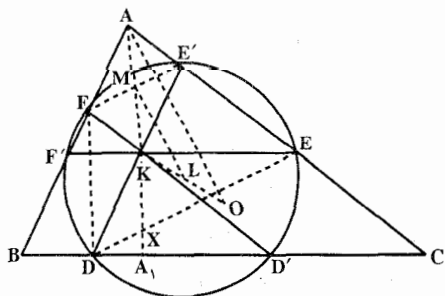
پادموازی است، پس با EF' نیز پادموازی است، یعنی چهار نقطه E ، E' ، F و F' همدایره‌اند. به دلایل مشابه، گروههای چهارتایی F ، F' ، D ، D' و E ، E' ، D و D' نیز همدایره‌اند. اگر این سه دایره متمایز باشند محورهای اصلی آنها $EE' = CA$ ، $DD' = BC$



و $FF' = AB$ باید هم‌مس باشند، و مسلماً این طور نیست. از طرف دیگر اگر دو دایره منطبق باشند، دایره سوم هم بر آنها منطبق است، پس نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های D ، D' ، E ، E' و F ، F' همدایره‌اند.

چند تعریف. دایره‌ای که از این شش نقطه می‌گذرد دایره اول لوموان نامیده می‌شود. خطهای موازی در نظر گرفته شده را غالباً موازیهای لوموان می‌خوانند و شش ضلعی $DD'EE'FF'$ شش ضلعی لوموان نامیده می‌شود.

۶۴۷. فرض کنید O مرکز دایره محیطی مثلث ABC (شکل)، L وسط OK ، و M وسط



پاره‌های AK و $E'F$ باشد. پاره خط LM نقطه‌های وسط دو ضلع مثلث KOA را به هم وصل می‌کند، پس با ضلع سوم آن، یعنی OA ، موازی است؛ شعاع OA از دایره محیطی بر EF عمود است، زیرا EF با BC پادموازی است؛

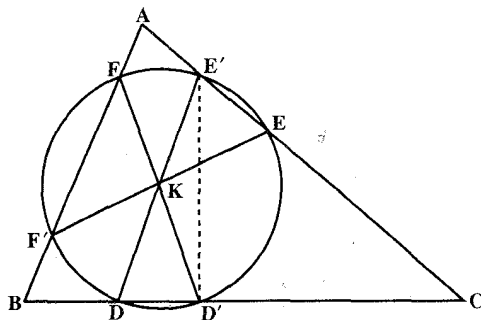
پس ML عمود منصف $E'F$ است. به طور مشابه، عمود منصفهای DF' و $D'E$ نیز از L می گذرند. پس قضیه ثابت می شود.
نکته. مثلثهای DEF و $D'E'F'$ همنهشتند.
در دایرة اول لوموان داریم:

$$\widehat{FDE} = \widehat{FF'E} = \widehat{B} \quad \text{و} \quad \widehat{DEF} = \widehat{DD'F} = \widehat{C}$$

پس مثلث DEF با مثلث ABC متشابه است، این مطلب در مورد مثلث $F'D'E'$ نیز صادق است، پس دو مثلث DEF و $D'E'F'$ متشابه اند و در یک دایره محاط شده اند؛ پس همنهشتند.

۶۴۸. سه پادموازی رسم شده برابرد و توسط نقطه لوموان K نصف می شوند؛ پس K از سرهای این سه پاره خط همفاصله است و بنابراین مرکز دایره ای است که از شش نقطه در نظر گرفته شده می گذرد (شکل).

تعریف. سه پادموازی در نظر گرفته شده را غالباً پادموازیهای لوموان می نامند.
دایره ای که از این شش نقطه می گذرد، دایره دوم لوموان، یا دایره کسینوس مثلث نام دارد. نام دوم به سبب ویژگی دیگری به آن داده شده است که در قضیه بعدی خواهیم دید.



۶۴۹. فرض کنید سه پادموازی $D'KF$ ، EKF' و DKE' (شکل بالا) که از نقطه لوموان K نسبت به ضلعهای BC ، CA و AB رسم شده اند، این ضلعها را در D ، E ؛ E' ؛ F و F' قطع کنند. پادموازی DE' قطری از دایره (K) است، پس در مثلث قائم الزاویه

$$DD' = DE' \cos \widehat{D'DE'} = DE' \cos A \quad \text{داریم:}$$

$$EE' = EF' \cos B \quad \text{و} \quad FF' = FD' \cos C$$

به طور مشابه، $DE' = EF' = FD'$ ، قضیه ثابت می شود.

۶۵۰. از نقطه لوموان K در مثلث ABC ، خط $B'C'$ را موازی با BC و خط $B''C''$ را

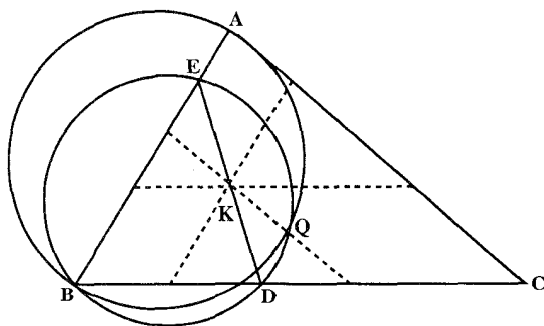
پادموازی با BC رسم می‌کنیم. چهارنقطه B', C', B'', C'' همدایره‌اند.

۶۵۱. در واقع، مرکز هر دو دایره، نقطه وسط پاره خط واصل بین مرکز دایره محیطی و نقطه لوموان مثلث است.

۲.۳.۴.۵. نقطه و دایره

۱.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همدایره

۶۵۲. با توجه به تعریف نقطه‌های بروکار دایره گذرنده بر سه نقطه را در نظر بگیرید و ثابت کنید که نقطه چهارم نیز روی این دایره است و یا از ویژگی چهارضلعی محاطی استفاده کنید.



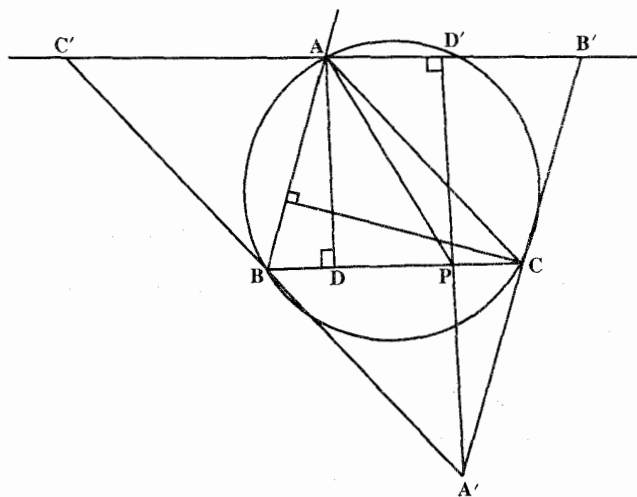
۲.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های همخط

۶۵۳. نقطه ناگل یک مثلث نقطه همرسی خطهایی است که رأسهای مثلث را به نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی برونی مثلث با ضلع روبه‌روی آن رأسها وصل می‌کنند.

۳.۲.۳.۴.۵. نقطه‌های دیگر

۶۵۴. ارتفاع $A'D'$ از مثلث پادمکمل $A'B'C'$ برای مثلث ABC ، ضلع BC را در نقطه هم‌نوا پای ارتفاع AD از مثلث ABC ، یعنی نقطه P ، قطع می‌کند و P نقطه وسط ارتفاع $A'D'$ است. از طرف دیگر، A نقطه وسط $B'C'$ است، پس در مثلث ABC خط AP خط هم‌نوا AD است، و در مثلث $A'B'C'$ خط AP نقطه وسط ضلع $B'C'$ ، یعنی نقطه A ، را به وسط ارتفاع $A'D'$ ، یعنی نقطه P ، وصل می‌کند. برای BQ و CR نیز مطلب مشابهی صادق است. بنابراین،

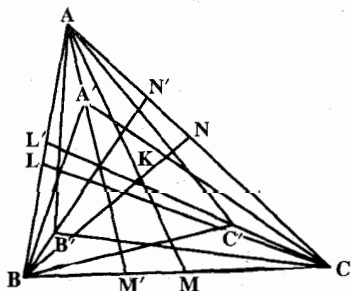
قضیه ثابت می شود.



۳.۳.۴.۵. پاره خط

۶۶۰. عمود منصفهای ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC دایره بروکار (OK) را در نقطه های A_1 ، B_1 و C_1 قطع می کنند که مثلث اول بروکار است. نقطه لوموان نیز نقطه همرسی شبه میانه های مثلث ABC است.

۴.۳.۴.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، ...



۱.۴.۳.۴.۵. خطها همرسند

۶۶۱. نقطه لوموان مثلث ABC نقطه همرسی شبه میانه های مثلث است (نقطه K در شکل).

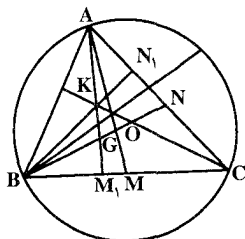
۲.۴.۳.۴.۵. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۶۶۲. نقطه مشترک سه دایره الحاقی گروه مستقیم (M) و نقطه مشترک سه دایره الحاقی گروه غیرمستقیم (N)، هر کدام یک نقطه بروکار مثلث ABC می باشند.

۵.۳.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۶۳. نقطه‌های O و K و شعاع دایره محیطی مثلث ABC ثابتند.

مکان هندسی G موردنظر است.



۶۶۵. نقطه لوموان مثلث AEF روی میانه AA' از مثلث ABC است.

۵.۳.۴.۶. مسأله‌های ترکیبی

۶۶۶. با توجه به نکته‌های زیر مسأله را حل کنید.

۱. نقطه لوموان هر مثلث نقطه همرسی شبه میانه‌های آن مثلث است.

۲. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشد، (ABCH) یک گروه مرکز ارتفاعی تشکیل

می‌دهند.

۵.۴.۴.۴. دایره تیلور

۵.۴.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۰. چهارضلعی BCGL محاطی است، پس $\hat{G}_1 = \hat{B}$ (۱) و چون $EF \parallel BC$ است (زیرا

چهارضلعی $B'C'EF$ محاطی می‌باشد در نتیجه $\hat{E}_1 = \hat{F}B'C'$ و چهارضلعی

$BCB'C'$ نیز محاطی است پس

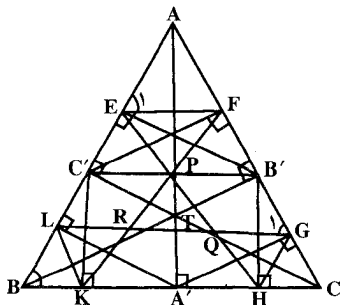
$\hat{B} = \hat{F}B'C'$ لذا $\hat{E}_1 = \hat{B}$ و از آن جا

$(EF \parallel BC)$ ، بنابراین (۲) $\hat{E}_1 = \hat{B}$ از روابط

(۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{E}_1 = \hat{G}_1$ یعنی

چهارضلعی EFGH محاطی است، همچنین

چهارضلعی ELKF نیز محاطی می‌باشد یعنی



دایره محیطی چهارضلعی EFGL از نقطه K نیز می گذرد و چهارضلعی HKLG نیز محاطی می باشد یعنی دایره بالا از نقطه H نیز مرور می کند. پس شش نقطه H, K, L, E, F, و G که تصویرهای پای ارتفاعهای مثلث ABC روی ضلعهای مثلث می باشند، روی یک دایره قرار دارند که به دایره تیلور مشهور است.

نکته ۱. قطرهای شش ضلعی محاطی EFGHKL با هم برابرند، زیرا دوزنقه EFHK محاطی و متقارن است؛ مثلث PQR مثلث میانه ای مثلث ارتفاعی A'B'C' از مثلث ABC است.

دایره محاطی مثلث PQR (مثلث حاصل از برخورد سه قطر) با دایره محاطی چهارضلعی EFGL هم مرکز است که این مرکز به T نشان داده شده است.

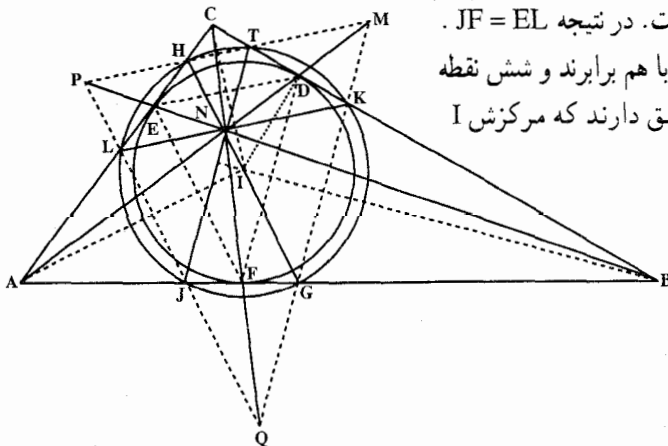
نکته ۲. دایره تیلور به گروه عمومی دایره های لوموان یا توکر تعلق دارد. زیرا شش نقطه همدایره در حقیقت به وسیله سه آنتی پارالل مساوی GL, FK و EH در مثلث ABC ایجاد شده اند.

۵.۴.۵. دایره آدامس

۱.۵.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۱. خط JT که موازی وتر DF است، روی مماسها پاره خطهای مساوی DT و FJ را به وجود می آورد. همچنین $DK = EL$ و $FG = EH$. نقطه های A, N و D روی یک خط راستند. اما NL و FJ موازی با DE و DF هستند. از آن جا نتیجه می شود که LJ

موازی EF است. در نتیجه $JF = EL$. شش پاره خط با هم برابرند و شش نقطه به دایره ای تعلق دارند که مرکزش I است.



۶.۴.۵. دایره آپولونیوس

۱.۶.۴.۵. تعریف و قضیه

۶۷۲. نقطه لوموان K مزدوج مرکز دایره محیطی O، نسبت به هر یک از دایره های آپولونیوسی مثلث است؛ پس قضیه برقرار است.

۵.۵. دایره های دیگر و مثلث

۲.۵.۵. شعاع

۶۷۴. اگر شعاع دایره ها به مرکزهای A، B و C را به ترتیب R_1 ، R_2 و R_3 بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 = 6 \\ R_3 - R_1 = 9 \\ R_3 - R_2 = 7 \end{cases}$$

و از آن جا نتیجه می شود: $R_1 = 2\text{cm}$ و $R_2 = 4\text{cm}$ ، $R_3 = 11\text{cm}$.

۶۷۵. با توجه به شکل شعاعهای سه دایره X، Y و Z است و داریم:

$$Y + Z = a \text{ و } Z + X = b \text{ و } X + Y = c$$

$$X + Y + Z = p \text{ و } \dots$$

۳.۵.۵. نقطه و دایره

۱.۳.۵.۵. نقطه درون دایره

۶۷۸. اگر زاویه های مثلث ABC حاده باشند،

ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه های

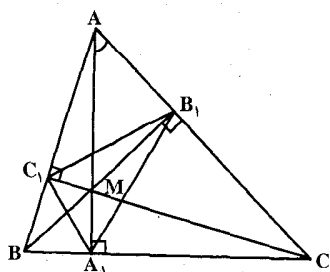
درونی مثلث ارتفاعیه اند و ضلعهای مثلث

ABC نیمسازهای زاویه های خارجی مثلث

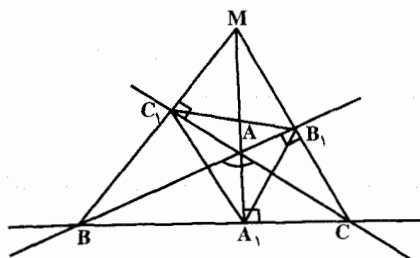
ارتفاعیه می باشند. بنابراین نقطه های A، M،

B و C که محل تلاقی نیمسازهای مثلث

می باشند، مرکزهای دایره های

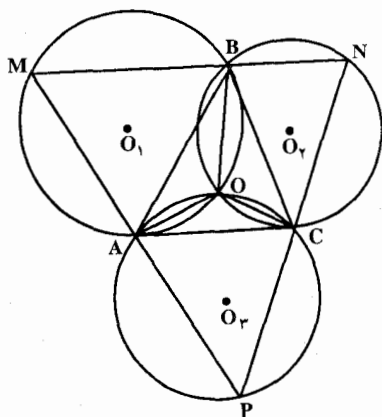


محاطی این مثلث می باشند. یعنی چهار دایره به مرکزهای A, B, C و M وجود دارد که بر ضلعها یا بر امتداد ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ مماسند. در این حالت با معلوم بودن نقطه های A_1, B_1, C_1 مثلث ABC را می توان رسم کرد و مسأله فقط یک جواب دارد.



اگر یک زاویه مثلث منفرجه باشد، ارتفاع وارد از رأس این زاویه نیمساز زاویه داخلی مثلث ارتفاعیه است ولی دو ارتفاع دیگر نیمسازهای زاویه های خارجی مثلث ارتفاعیه می باشند. بنابراین اگر مثلث مطلوب بتواند با زاویه منفرجه باشد، علاوه بر مثلث ABC ، مثلثهای BCM و CAM

و ABM هم جوابهایی از مسأله اند. ارتفاعهای مربوط به این مثلثها بترتیب در نقطه های A, B و C به هم می رسند. به زبان دیگر، مرکزهای ارتفاعی مثلثهای BCM و CAM و ABM (و ABC) بترتیب عبارتند از نقطه های A, B و C (و M). برای هر چهار جواب مسأله این ویژگی وجود دارد. رأسها و مرکزهای ارتفاعی هر یک از مثلثهای جواب، مرکزهای دایره هایی هستند که بر ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ (و یا امتداد آنها) مماسند.



۲.۳.۵.۵. نقطه روی دایره

۶۷۹. فرض می کنیم دایره های O_1, O_2 و O_3 بترتیب از رأسهای (A, B) ، (B, C) و (C, A) گذشته باشند. نقطه اختیاری M واقع بر محیط دایره O_1 را به رأسهای A و B وصل می کنیم و امتداد می دهیم تا دایره های O_2 و O_3 را در نقطه های N و P قطع کند. نقطه C را به این دو نقطه وصل می کنیم. بنا به فرض داریم:

$$\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{NCP} = 180^\circ \Rightarrow \text{خط راست است}$$

اگر دایره های O_1 و O_2 را در نقطه O متقاطع فرض کنیم و O را به رأسهای مثلث وصل نماییم، چون چهار ضلعیهای $AOBM$ و $BOCN$ محاطی اند پس

$\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{A}OC = 90^\circ$ همچنین $\hat{A}OB + \hat{A}MB = 180^\circ$ و $\hat{B}NC + \hat{B}OC = 180^\circ$
 پس $\hat{A}OC + \hat{P} = 180^\circ$ یعنی چهارضلعی AOC P محاطی است. لذا دایره گذرنده بر P و C همان دایره O_3 است که از نقطه O می گذرد.

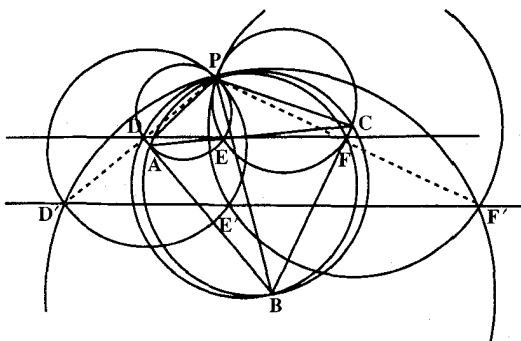
۳.۳.۵.۵. نقطه های همدایره

۶۸۰. چهارضلعیهای AMHC و AMPN و AHPN محاطی اند.

۶۸۱. $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ را نقطه های برخورد امتداد ضلعها، با خطهای راست موازی با آنها فرض می کنیم. نقطه های B_1 و B_2 روی محیط دایره ای واقعند که بر دوزنقه متساوی الساقین $A_1A_2C_1C_2$ محیط است.

۴.۳.۵.۵. نقطه های همخط

۶۸۲. اگر A, B و C مرکزها و نقطه P روی دایره محیطی مثلث ABC اختیار شود، باید ثابت کنیم که D', E', F' روی خط راست قرار دارند. دایره های با شعاع نصف یعنی دایره های به قطرهای PA, PB و PC همدیگر را در سه نقطه همخط D, E و F قطع می کنند (قضیه سالمون). و این



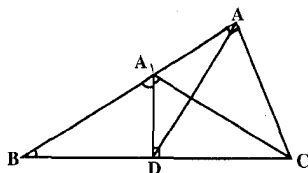
نقطه ها تصویرهای نقطه P روی ضلعهای مثلث می باشند. زیرا زاویه های AEP و CEP قائمه می باشند (محاط در نیمدایره) از آن جا خط DEF خط سیمسون است. اما $PF' = 2PF$ و $PD' = 2PD$; $PE' = 2PE$

است. در نتیجه D', E', F' روی خط راست هستند.

۴.۵.۵. زاویه

۱.۴.۵.۵. اندازه زاویه

۶۸۳. روی خط BA، نقطه A_1 را طوری اختیار کنید که

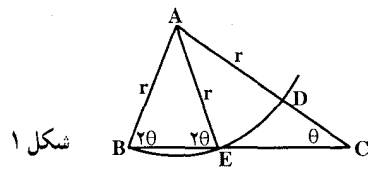
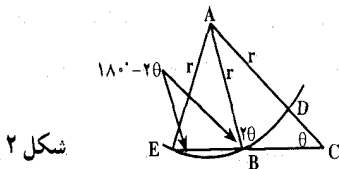


$A_1B = A_1C$. نقطه های A, A_1, D و C بر یک

دایره واقعهند ($\hat{D}\hat{A}_1\hat{C} = 90^\circ - \hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{D}\hat{A}\hat{C}$). در نتیجه $\hat{A}_1\hat{A}\hat{C} = \hat{A}_1\hat{D}\hat{C} = 90^\circ$ و بنابراین $\hat{B}\hat{A}\hat{C} = 90^\circ$.

۶۸۴. (ه) اگر $45^\circ < \theta < 90^\circ$ ، آن گاه (مطابق شکل ۱) و بنابر یک قضیه مربوط به زاویه های

خارجی مثلثها، در مثلث EAC، $2\theta = \hat{E}\hat{A}\hat{C} + \theta$ ، بنابرین $\hat{E}\hat{A}\hat{C} = \theta$ و مثلث EAC متساوی الساقین است. یعنی $EC = AE = AD$. آن گاه مثلث ABC یک مثلث $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ است و $E = B$ [یعنی E بر B منطبق است] و بنابرین $EC = BC = AB = AD$.



اگر $45^\circ < \theta < 90^\circ$ آن گاه (مطابق شکل ۲) داریم

$$\begin{aligned}\hat{E}\hat{A}\hat{C} &= 180^\circ - \hat{A}\hat{E}\hat{C} - \hat{C} \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\theta) - \theta \\ &= \theta\end{aligned}$$

مثلث EAC متساوی الساقین است و $EC = EA = AD$.

۶۸۵. فرض کنید، $BC = a$ ، $\hat{C} > \hat{B}$ ، D و E وسطهای AB و AC باشند چهارضلعی

EMDN چهارضلعی محاطی است (زیرا، $\hat{M}\hat{E}\hat{N} = \hat{M}\hat{D}\hat{N} = 90^\circ$).

$MN = a$ ، $ED = \frac{a}{2}$ و MN قطر دایره محیط بر MEND است. در نتیجه

$$\hat{D}\hat{M}\hat{E} = 3^\circ \text{ و } \hat{C}\hat{A}\hat{B} = 90^\circ - \hat{E}\hat{M}\hat{D} = 6^\circ$$

$$\hat{A}\hat{C}\hat{B} = 105^\circ \text{ و } \hat{C}\hat{B}\hat{A} = \hat{E}\hat{D}\hat{N} = \hat{E}\hat{M}\hat{N} = \frac{\hat{E}\hat{M}\hat{D}}{2} = 15^\circ$$

جواب: $\hat{A} = 6^\circ$ ، $\hat{B} = 15^\circ$ ، $\hat{C} = 105^\circ$ یا $\hat{A} = 6^\circ$ ، $\hat{B} = 105^\circ$ ، $\hat{C} = 15^\circ$

۶۸۶. با نوشتن زاویه PQN برحسب زاویه های مثلث و در نظر داشتن این که

$$\hat{P}\hat{M}\hat{N} + \hat{P}\hat{Q}\hat{N} = 180^\circ$$

به دست می آوریم: $\hat{P}\hat{M}\hat{N} = 6^\circ$ ؛ بنابراین، $\hat{N}\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{M}\hat{N} = 3^\circ$ و

$$\hat{P}\hat{N}\hat{Q} = \hat{P}\hat{M}\hat{Q} = 3^\circ$$

یعنی، PQN مثلثی متساوی الساقین با زاویه‌های 30° ، مجاور به ضلع PN، است و

$$PQ = QN = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۲.۴.۵.۵. رابطه بین زاویه‌ها

۶۸۷. اگر نقطه برخورد نیمسازهای BB' و CC' را M بنامیم، چون

$$\hat{ABC} + \hat{ACB} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

پس $\hat{MBC} + \hat{MCB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ و در نتیجه $\hat{BMC} = 120^\circ$ است، پس چهارضلعی

AC'MB' که در آن $\hat{A} + \hat{B'MC'} = 180^\circ$ است، محاطی است. در نتیجه

$$BB'A = CC'B$$

۵.۵.۵. پاره خط

۱.۵.۵.۵. اندازه پاره خط

۶۸۸. فرض می‌کنیم زاویه C حاده باشد. نقطه‌های A' و B' روی دایره‌ای به قطر ثابت AB

واقعدند و نقطه C خارج این دایره است، پس: $\hat{C} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{A'B'}}{2}$ ، چون $\widehat{AB} = 180^\circ$

و $\hat{C} = \alpha$ مقدار ثابتی است، پس کمان A'B' مقدار ثابتی خواهد داشت و در نتیجه وتر

A'B' اندازه ثابتی دارد.

۲.۵.۵.۵. رابطه بین پاره خطها

۶۸۹. مثلث ارتفاعی مثلث ABC است.

۶.۵.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، نیمساز، ...

۱.۶.۵.۵. خطها برهم عمودند

۶۹۰. نقطه‌های A, H, D, E, F روی دایره‌ای به قطر AH قرار دارند و زاویه‌های DFE،

BÂE و DÂE برابرند، یعنی چهارضلعی AFPQ محاطی است و FPQ که مقابل به

زاویه FÂQ است نیز قائمه است.

۲.۶.۵.۵. خط نیمساز است

۶۹۱. نقطه برخورد AC با دایره را F می نامیم.

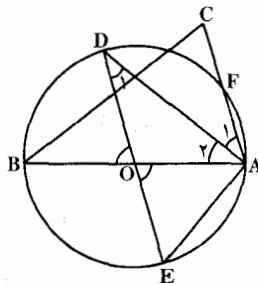
چون $DE \parallel AF$ ، پس $\widehat{DF} = \widehat{AE}$ است، بنابراین داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{D}_1 \text{ و } \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

$$\hat{A}_2 = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

از طرفی

در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ ، یعنی AD نیمساز زاویه درونی BAC است. بنابراین خط عمود بر AE، یعنی نیمساز زاویه برونی BAC می باشد.

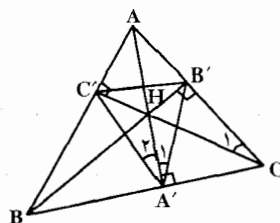


۶۹۳. اگر H نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، چهارضلعی HA'CB' محاطی

است، پس $\hat{A}'_1 = \hat{C}'_1$ (۱).

همچنین چهارضلعی ACA'C' محاطی می باشد، پس $\hat{A}'_2 = \hat{C}'_2$ (۲). از رابطه های

(۱) و (۲) نتیجه می شود که $\hat{A}'_1 = \hat{A}'_2$ ، یعنی ارتفاع AA' از مثلث ABC نیمساز زاویه B'A'C' از مثلث ارتفاعیه A'B'C' است. به همین ترتیب ثابت می شود که ارتفاعهای BB' و CC' نیز نیمسازهای زاویه های B' و C' از مثلث ارتفاعیه می باشند.



۵. ۵. ۳. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۶۹۴. $\hat{AB'B} = \hat{AC'C} = 90^\circ$ و $BB' \parallel CC'$ است.

۵. ۵. ۴. خطها هم‌رسند

۶۹۵. نقطه M وسط ضلع BC از مثلث ABC، مرکز دایره محیطی چهارضلعی BCEF

است، پس MN عمود منصف EF می‌باشد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که M'N'

عمود منصف DE، و M''N'' عمود منصف DF است.

۵. ۵. ۵. خط مماس بر دایره است

۶۹۷. دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر خطهای راست AC، MN

و BC طوری مماس است که P و Q نقطه‌های تماس

آن با خطهای AC و BC، بیرون پاره خطهای CM و

CN قرار دارند (یعنی، یک دایره محاطی خارجی

مثلث MCN). اگر نقطه تماس MN با دایره باشد،

آن وقت $MP = MR$ و $NQ = NR$ ، در نتیجه،

$MN = MP + NQ$ ؛ اما داریم

$MN = MA + NB$. بنابراین، یکی از نقطه‌های P

یا Q، روی ضلع متناظر با آن واقع است، در حالی که

دیگری روی امتداد ضلع متناظرش قرار دارد. داریم:

$$CP = CQ = \frac{1}{2}(CP + CQ) = \frac{1}{2}(AC + CB)$$

یعنی، دایره رسم شده، برای کلیه خطهای راست ثابت است.

۵. ۵. ۷. شکل‌های ایجاد شده

۶۹۸. قبل از بیان راه حل ناراینگار لازم است لم زیر ثابت شود:

لم. چهار نقطه D، B'، C' و E که در شرطهای $B'D = B'C' = C'E$ و

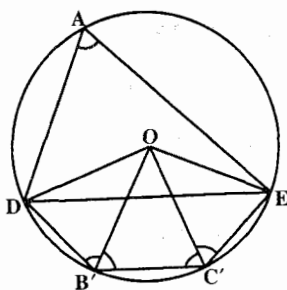
$\hat{DB'C'} = \hat{EC'B'} = 180^\circ - 2\alpha > \frac{\pi}{3}$ صدق می‌کنند، روی یک دایره واقعند. علاوه

بر آن نقطه A که با نقطه C' در یک طرف خط DE قرار ندارد و $\hat{DAE} = 3\alpha$ باشد،

نیز بر همان دایره واقع است.

حل. نیمسازهای دو زاویه متساوی $\hat{DB'C'}$ و $\hat{EC'B'}$ را رسم می‌کنیم تا در نقطه O

یکدیگر را قطع کنند. از O به D و E وصل می‌کنیم. مثلثهای متساوی الساقین ODB'،

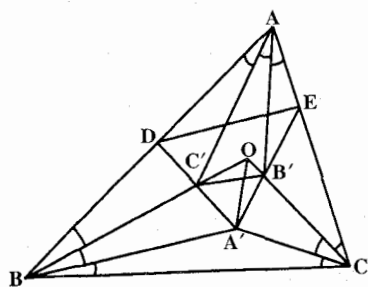


پس $OB'C'$ و $OC'E$ با هم برابرند، یعنی دایره $OD = OB' = OC' = OE$ به مرکز O و به شعاع یکی از این مقادارها از نقطه های D, B', C', E می گذرد. پس چهارضلعی $DB'C'E$ محاطی است که چون $DB' = B'C' = C'E$ دوزنقه متساوی الساقین است. از طرفی زاویه های مجاور به قاعده مثلثهای متساوی الساقین

بلا $\frac{\pi}{2} - \alpha$ است. پس زاویه های $\widehat{DOB'} = \widehat{B'OC'} = \widehat{COE} = 2\alpha$ و در نتیجه کمان

$\widehat{DB'E} = 6\alpha$ است و چون $\widehat{DAE} = 3\alpha$ می باشد، پس نقطه A نیز روی دایره محیطی چهارضلعی $DB'C'E$ قرار دارد.

حل قضیه مورلی. فرض می کنیم $\hat{A} = 3\alpha$ و $\hat{B} = 3\beta$ و $\hat{C} = 3\gamma$ باشد. در این صورت $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$ و در نتیجه $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ است. زاویه های B و C را به سه قسمت متساوی تقسیم می کنیم و نقطه برخورد دو خط تقسیم مجاور با



را A' و نقطه برخورد دو خط دیگر را O می نامیم. نقطه A' را به O وصل می کنیم. OA' نیمساز زاویه $\widehat{BOC}$ از مثلث OBC می شود. از A' دو خط رسم می کنیم تا با OA' زاویه 30° بسازند و نقطه برخورد این دو خط با OB و OC را به ترتیب B' و C' می نامیم. از B' به C' وصل می کنیم؛ دو

مثلث $OA'B'$ و $OA'C'$ به حالت تساوی دو زاویه و ضلع بین با هم برابرند، پس

$A'B' = A'C'$ و چون $\widehat{B'AC'} = 60^\circ$ است، پس $A'B' = B'C' = A'C'$ یعنی مثلث $A'B'C'$ متساوی الاضلاع می باشد و OA' عمود منصف $B'C'$ است. حال باید ثابت کنیم که خطهای $B'A$ و $C'A$ زاویه $\widehat{BAC}$ را به سه قسمت برابر تقسیم

می کنند، یعنی: $\widehat{BAC'} = \widehat{C'AB'} = \widehat{B'AC} = \alpha$. برای اثبات پاره خط $BD = BA'$ را روی BA و پاره خط $CE = CA'$ را روی CA جدا می کنیم و از D به E وصل می کنیم. دو مثلث $BA'C'$ و BDC' همچنین مثلثهای $CA'B'$ و CEB' به حالت

تساوی دو ضلع و زاویه بین با هم برابرند. لذا $B'E = A'B'$ و $DC' = A'C'$ است و چون مثلث $A'B'C'$ متساوی الاضلاع است، پس:

$$DC' = B'C' = B'E \quad (۱)$$

از طرفی داریم:

$$\hat{BOC} = 18^\circ - (2\beta + 2\gamma) = 18^\circ - 2(\beta + \gamma) = 18^\circ - 2(6^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \hat{BOC} = 6^\circ + 2\alpha \Rightarrow C'\hat{O}A' = A'\hat{O}B' = \frac{B'\hat{O}C'}{2} = 3^\circ + \alpha$$

$$\Delta OC'A': OC'A' = 18^\circ - (3^\circ + 3^\circ + \alpha) = 12^\circ - \alpha$$

$$\Delta OC'H: OC'H = 9^\circ - C'\hat{O}A' = 9^\circ - (3^\circ + \alpha) = 6^\circ - \alpha$$

پس:

$$DC'\hat{B}' = DC'O + OC'\hat{B}' = OC'A' + OC'B' = 12^\circ - \alpha + 6^\circ - \alpha = 18^\circ - 2\alpha \quad (۲)$$

به همین ترتیب ثابت می شود که $EB'C' = 18^\circ - 2\alpha$ (۳) است. بنابراین از رابطه های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می شود که چهارضلعی $DC'B'E$ دوزنقه متساوی الساقین و

در نتیجه محاطی است. در این صورت اندازه زاویه های $C'DE = B'ED = 2\alpha$ خواهد

بود و $B'D$ نیمساز زاویه $C'DE$ است، یعنی $C'DB' = B'DE = \alpha$ می باشد. حال اگر از D به B' وصل کنیم، داریم:

$$DB'E = C'B'E - C'B'D = 18^\circ - 2\alpha - \alpha = 18^\circ - 3\alpha$$

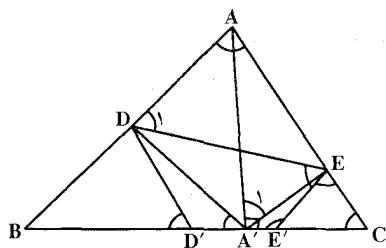
و چون $\widehat{BAC} = 3\alpha$ است، پس چهارضلعی $ADB'E$ نیز محاطی است. یعنی دایره محیطی دوزنقه $DC'B'E$ از نقطه A نیز می گذرد. در نتیجه پنج ضلعی $ADC'B'E$

محاطی می باشد لذا $C'A\hat{D} = C'\hat{A}B' = B'\hat{A}E = \alpha$ است، یعنی خطهای $B'A$ و $C'A$ زاویه A از مثلث ABC را به سه قسمت برابر تقسیم می کنند. بنابراین حکم ثابت است.

تعمیم قضیه مورلی. اگر زاویه های خارجی مثلث را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم از برخورد دوه دوی خطهای تقسیم که مجاور ضلعهای مثلث قرار دارند، مثلث متساوی الاضلاع تشکیل می شود. راه حل این قضیه نیز مشابه راه حل مربوط به نیمسازهای داخلی است.

۶۹۹. چهارضلعی $ADA'E$ محاطی است، پس $\hat{A}_1 = \hat{D}_1$ (۱). و در مثلث قائم الزاویه

$AA'C$ ، $A'E$ ارتفاع وارد بر وتر است، پس $\hat{A}_1 = \hat{C}$ (۲). از مقایسه رابطه های (۱)

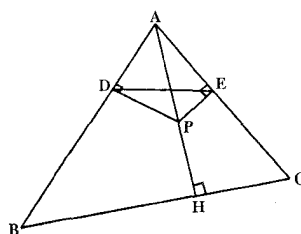


و (۲) نتیجه می شود که $\hat{D}_1 = \hat{C}$ ، یعنی چهارضلعی BDEC محاطی می باشد.

در نتیجه $\hat{AED} = \hat{B}$ و چون $EE' \parallel AB$ و

$DD' \parallel AC$ ، پس $\hat{D}' = \hat{C}$ و $\hat{E'EC} = \hat{A}$

است. لذا $\hat{D'EE'} = \hat{C} = \hat{D}'$ است و در نتیجه چهارضلعی DED'E' محاطی است. ۷۰۰. از D به E وصل می کنیم. چهارضلعی ADPE محاطی است، پس



(۱) $\hat{AED} = \hat{APD}$ از طرفی

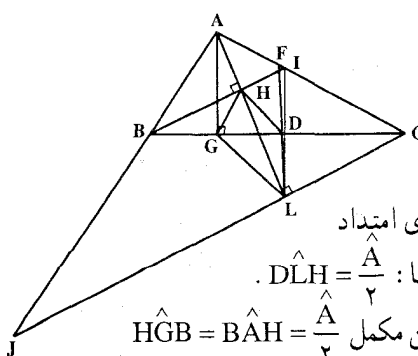
(۲) $\hat{APD} = \hat{ABH}$ است. زیرا چهارضلعی

PDBH نیز محاطی است. از رابطه های (۱) و (۲)

نتیجه می شود که $\hat{AED} = \hat{ABC}$ یعنی چهارضلعی BDEC نیز محاطی است.

۷۰۱. دایره ای به قطر BC از نقطه های B' و C' می گذرد. زیرا $\hat{BB'C} = \hat{CC'B} = 90^\circ$ است. یعنی چهارضلعی BCB'C' محاطی است. به دلیل مشابه چهارضلعیهای ABA'B' و ACA'C' نیز محاطی می باشند. حال اگر نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث، H باشد، چهارضلعیهای HA'BC'، HA'CB' و HB'AC' که هر کدام دو زاویه مقابلشان 90° است نیز محاطی اند.

$$\hat{BD'C} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}, \quad \hat{BDC} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2} \quad \text{۷۰۲. داریم:}$$



۷۰۳. نقطه برخورد BH و CL با ضلعهای

روبه روبشان را به ترتیب I و J می نامیم.

مثلثهای ABI و ACJ متساوی الساقین

هستند. خط DL که وسطهای CB و CJ

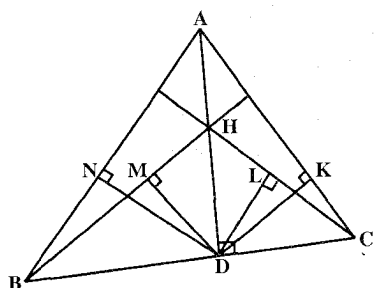
را به هم وصل می کند، موازی AB و روی امتداد

DF است (F وسط AC). از آن جا: $\hat{DLH} = \frac{\hat{A}}{2}$.

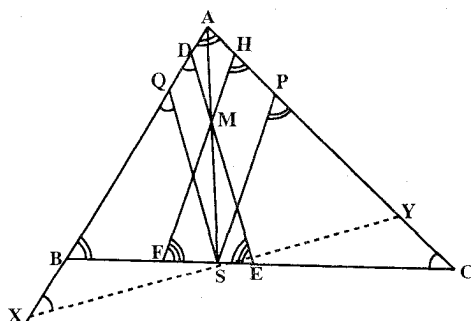
چهارضلعی ABGH محاطی است. همچنین مکمل $\hat{HGB} = \hat{BAH} = \frac{\hat{A}}{2}$

لذا زاویه های DLH و DGH برابرند و چهارضلعی DHGL محاطی است.

۵. ۵. ۸. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۷۰۴. فرض کنید H معرف نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و AD ارتفاع مثلث باشد و K, L, M, N، تصویرهای D، بترتیب روی AC, CH, HB و BA باشند. از این مطلب استفاده کنید که K و L بر دایره به قطر CD، M و L بر دایره به قطر HD و N و M بر دایره به قطر DB قرار دارند.



۷۰۵. فرض کنید، DE و FH بترتیب با ضلعهای AC و AB از مثلث ABC پاد موازی باشند و M نقطه برخورد آنها باشد، داریم:
 $\hat{HFC} = \hat{DEB} = \hat{A}$ پس مثلث FME متساوی الساقین است، و $ED = FH$ و $FM = EM$ پس:
 $DM = HM$

۵. ۵. ۹. مسأله‌های ترکیبی

۷۰۷. ۱. نقطه‌های برخورد دایره‌های گذرنده بر A و B را O می‌نامیم. به دلیل محاطی بودن چهارضلعیها زاویه FOD مکمل زاویه A و زاویه DOE مکمل زاویه B است. اما سه زاویه به رأس نقطه O و زاویه‌های A، B و C روی هم ۶ قائمه‌اند. از طرفی زاویه‌های A، B و مکملهایشان روی هم ۴ قائمه‌اند. بنابراین دو زاویه FOE و C روی هم ۲ قائمه می‌باشند. در نتیجه چهارضلعی CFOE محاطی است و دایره محیطی مثلث FCE از نقطه O می‌گذرد.

۲. ثابت می‌کنیم که $\hat{BOC} = \hat{A} + \hat{E}$ و دو قائمه را با π نشان می‌دهیم. از آن جا داریم:

$$\hat{BOC} = \alpha' + \beta' = \alpha + \beta$$

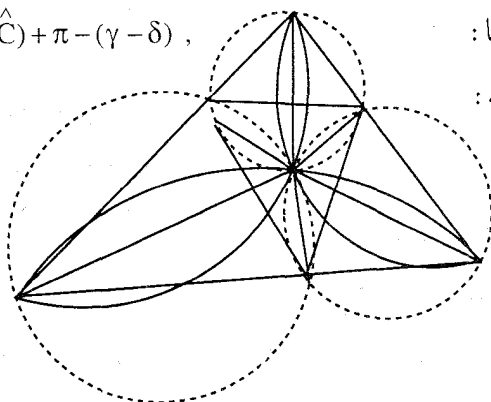
$$\alpha = \pi - (\hat{C} + \gamma), \quad \beta = \pi - (\hat{B} + \delta);$$

$$\hat{B}\hat{O}\hat{C} = \pi - (\hat{B} + \hat{C}) + \pi - (\gamma - \delta),$$

$$\hat{B}\hat{O}\hat{C} = \hat{A} + \hat{E}$$

از آن جا :

در نتیجه :



۷۰۹. داریم :

۱.

$$\Delta ACC' = \Delta ABB', (AC' = AB, AB' = AC', \hat{C}'\hat{A}\hat{C} = \hat{A} + 6^\circ = \hat{B}\hat{A}\hat{B}')$$

$$\Rightarrow BB' = CC' = AA'$$

$$\hat{A}\hat{C}\hat{C}' = \hat{A}\hat{B}\hat{B}' \Rightarrow \text{محاطی است } AC'BM$$

۲.

$$\hat{A}\hat{M}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}'\hat{B} = 18^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{M}\hat{B} = 12^\circ \Rightarrow \hat{B}\hat{M}\hat{A}' = \hat{B}\hat{C}\hat{A}' = 6^\circ \quad \text{و}$$

$$\hat{A}\hat{M}\hat{B} + \hat{B}\hat{M}\hat{A}' = 18^\circ \Rightarrow \hat{A}\hat{M}\hat{A}' \text{ خط راست است}$$

۷۱۰. ۱. زاویه های حاده D و J با زاویه B برابرند. دوزنقه DFII متقارن است. زیرا :

DF = II. قاعده FI موازی AC و همچنین DH موازی AB است.

۲. هر دوزنقه متساوی الساقین از جمله DFGH قابل محاط شدن در یک دایره است.

همچنین دوزنقه متساوی الساقین DFII، برای این که نشان دهیم که شش نقطه انتهایی

سه آنتی پارالل مساوی همدایره اند، کافی است ثابت کنیم که دایره محیطی چهارضلعی

DFGH از نقطه I می گذرد. چهارضلعی FGHI محاطی است، زیرا ضلعهای روبه -

رویش FI و GH آنتی پارالل می باشند. پس نقطه های انتهایی سه آنتی پارالل مساوی

محاط شده در یک مثلث، روی یک دایره اند.

۷۱۱. ۱. چهارضلعی BCDE محاطی است.

۲. نیمدایره به قطر AB از پای ارتفاعهای دو رأس A و B می گذرد و همچنین برای

ارتفاعهای دیگر.

۳. داریم : $\hat{A}\hat{C}\hat{N} = \hat{B}$.

۴. زیرا شعاع OC عمود بر مماس CN است و در نتیجه بر موازیهایش، DE و FG،

عمود است.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۶. دایره و
 مثلث‌های ویژه (متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، ...)

۶.۱. دایره و مثلث متساوی الاضلاع

۶.۱.۲. شعاع

۷۱۲. مرکز مشترک دو دایره جواب مسأله، محل برخورد ارتفاع‌های مثلث متساوی الاضلاع ABC است؛ که اگر این نقطه را H بنامیم. داریم:

$$AH = \frac{2}{3} h_a = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow r_1 = AH - \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$r_2 = AH + \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \frac{a}{2} = a\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

۶.۱.۳. نقطه و دایره

۷۱۳. برای روشنی وضع، فرض کنید P روی کمان AC واقع باشد. نقطه‌های A، M، P و N

روی یک دایره واقعند. بنابراین: $\widehat{NMP} = \widehat{NAP}$ به همین ترتیب نقطه‌های P، M، Q و C روی یک دایره قرار دارند و

$$\widehat{PMQ} = 180^\circ - \widehat{PCQ} = 180^\circ - \widehat{PAN} = 180^\circ - \widehat{PMN}$$

۶.۱.۴. زاویه

۷۱۴. گزینه (ب) درست است. زیرا:

$$\widehat{ADB} = \frac{1}{2} \widehat{ACB} = 30^\circ$$

۶. ۱. ۵. پاره خط

۷۱۶. در مثلث متساوی الاضلاع، مرکزهای دایره های محیطی و نه نقطه، بر هم منطبقند.

۷۱۷. مثلثهای AEM و AFN متساوی الساقین دو رأسهای E و F با زاویه رأس 120° و مثلث AEF متساوی الاضلاع است.

۷۱۸. اگر نقطه های D و E نیمدایره به قطر AC را به سه قسمت برابر بخش نمایند،

$AD = DE = EC$ ضلعهای شش ضلعی منتظم محاطی می باشند و $DE \parallel AC$ است.

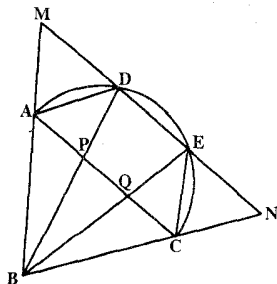
نقطه های برخورد AB و BC با امتداد DE را M و N می نامیم. دو مثلث

متساوی الاضلاع AMD و CEN با هم برابرند، پس: $MD = DE = EN$ خواهد بود.

یعنی ضلع MN از مثلث متساوی الاضلاع BMN به وسیله BD و BE به سه قسمت

مساوی تقسیم گردیده است، پس خط موازی آن یعنی AC نیز به وسیله این خطها به سه

قسمت برابر تقسیم می شود، یعنی: $AP = PQ = QC$.



۶. ۱. ۶. شکل های ایجاد شده

۷۱۹. نقطه های A، Y' و Z' دایره را به سه کمان برابر تقسیم می کنند. همچنین Z و Y کمان Y'Z' را به سه بخش برابر تقسیم می کند.

۷۲۲. دایره های برابر به مرکزهای O_1 و O_2 ، محاط در مثلثهای AC_1M و AB_1M را در

نظر می گیریم. نقطه های تماس این دایره ها را با پاره خط راست AM، K_1 و K_2 نشان می دهیم. مثلثهای قائم الزاویه AO_1K_1 و AO_2K_2 با هم برابرند. زیرا:

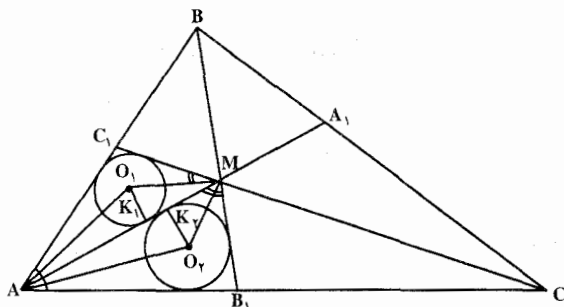
$$O_1K_1 = O_2K_2, \quad O_1\hat{A}K_1 = \frac{1}{2}C_1\hat{A}M = \frac{1}{2}B_1\hat{A}M = O_2\hat{A}K_2$$

پس $K_1 = K_2$ و مثلثهای قائم الزاویه O_1K_1M و O_2K_2M هم با یکدیگر برابر می شوند

(در دو ضلع مجاور به زاویه مجاور به زاویه قائمه)، از آن جا: $C_1\hat{M}A = B_1\hat{M}A$ و

$O_1\hat{M}K_1 = O_2\hat{M}K_2$ ، بنابراین با توجه به دو مثلث AC_1M و AB_1M (که دو زاویه

متناظر برابر دارند)، به دست می‌آید: $\widehat{AC_1C} = \widehat{AB_1B}$ ؛ و با توجه به مثلثهای ABB_1 و ACC_1 : $\widehat{ACC_1} = \widehat{ABB_1}$ که از آنها نتیجه می‌شود: $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. به همین ترتیب، می‌توان برابری دو زاویه BAC و ACB را هم ثابت کرد.



۶. ۱. ۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۲۳. شرط این که دو دایره مماس خارج باشند، آن است که اندازه خط‌المركزین دو دایره مساوی مجموع دو شعاع باشد. بنابراین مرکزهای دایره محاطی داخلی و دایره‌های محاطی خارجی مثلث را پیدا کنید و از شرط بالا استفاده کنید.

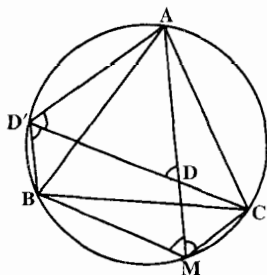
۶. ۱. ۸. مسأله‌های ترکیبی

۷۲۴. ۱. $\widehat{AMC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$ و $MD = MC$ ، پس مثلث MCD متساوی‌الاضلاع است، لذا

است و چون $\widehat{BMD} = \widehat{D'DA} = 60^\circ$ ، $MB \parallel CD$ است.

۲. چهارضلعی $MBD'D$ متوازی‌الاضلاع است، زیرا $MD \parallel BD'$ و $MB \parallel DD'$ می‌باشد.

۳. در مثلث ADD' داریم: پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. در متوازی‌الاضلاع



۶.۲.۴. زاویه

۶.۲.۴.۱. اندازه زاویه

۷۲۷. ۳۰° ، ۳۰° ، ۱۲۰° .

۶.۲.۴.۲. رابطه بین زاویه ها

۷۲۸. مثلثهای AEH و AFH همنهشتند.

۷۲۹. مثلثهای AEH و AFH همنهشتند.

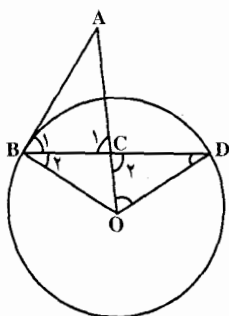
۶.۲.۵. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۶.۲.۵.۱. خطها برهم عمودند

۷۳۰. در مثلثهای متساوی الساقین OBD و ABC، $\hat{B}_2 = \hat{D}$ و $\hat{B}_1 = \hat{C}_1$ است. در مثلث OCD می توان نوشت:

$$\hat{C}_2 + \hat{D} = \hat{C}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{A}BO = 90^\circ$$

پس مثلث OCD در رأس O قائم الزاویه است،
یعنی $AO \perp OD$ است.



۶.۲.۵.۲. خط مماس بر دایره است

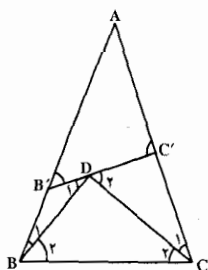
۷۳۱. روی $B'C'$ پاره خط $B'D = B'B$ را جدا می کنیم. در این صورت $C'D = C'C$ خواهد بود. یعنی مثلثهای $BB'D$ و $CC'D$

متساوی الساقین و $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ و $\hat{C}_1 = \hat{D}_2$ است، پس

$$\hat{B}' = 2\hat{B}_1 = 2\hat{D}_1 \text{ و } \hat{C}' = 2\hat{D}_2 = 2\hat{C}_1$$

$$\hat{B} + \hat{C}' = \hat{B} + \hat{C} = 2\hat{B}$$

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{B} - \frac{\hat{B}'}{2} = \hat{B} - \frac{2\hat{B} - \hat{C}'}{2} = \frac{\hat{C}'}{2} = \hat{D}_2$$



در نتیجه $\hat{B}_2 = \hat{D}_2 = \hat{C}_1$ است، پس دایره محیطی مثلث BDC در نقطه D بر $B'C'$ و در نقطه C بر AC مماس است. به همین ترتیب ثابت می شود که $\hat{C}_2 = \hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است، یعنی دایره محیطی مثلث BDC در نقطه B بر AB مماس است.

۶.۲.۶. شکلهای ایجاد شده

۷۳۲. چهارضلعی BKEP متوازی الاضلاعی است که ضلعهای مجاور و مساوی دارد، $(BP = BK)$ پس لوزی است.

۶.۳. دایره و مثلث قائم الزاویه

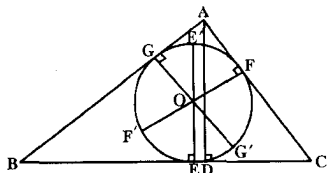
۶.۳.۲. شعاع

۶.۳.۱. اندازه شعاع

$$r = AB' = AC' = p - a = \frac{b+c-a}{2} = \frac{AC+AB-BC}{2} \quad ۷۳۳$$

۷۳۴. نقطه های تماس دایره محاطی داخلی مثلث قائم الزاویه $ABC (\hat{A} = 90^\circ)$ با ضلعهای مثلث را E، F و G و پای ارتفاع وارد بر وتر را D می نامیم و انتهای دیگر قطرهای گذرنده از E، F و G را به ترتیب E' ، F' و G' می نامیم. می دانیم که بین همه نقطه های واقع در داخل یا روی محیط مثلث، دورترین نقطه به یک ضلع، رأس روبه روی به آن ضلع است. به عنوان مثال بین نقطه های واقع در داخل یا روی مثلث ABC نقطه A بیشترین فاصله را تا ضلع BC دارد. بنابراین داریم: $GG' < AB$ و $FF' < AC$ و $EE' < BC$ از آن جا خواهیم داشت:

$$2r < AB \Rightarrow r < \frac{1}{2} AB, \quad 2r < AC \Rightarrow r < \frac{1}{2} AC$$



از طرفی: $AD \leq \frac{BC}{2}$ و $EE' < AD$

پس:

$$EE' < \frac{1}{2}BC \Rightarrow 2r < \frac{1}{2}BC \Rightarrow r < \frac{1}{4}BC$$

۲.۲.۳.۶. رابطه بین شعاعها

۷۳۵. در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) داریم:

$$r = \frac{AB+AC-BC}{2}, \quad r' = \frac{AH+BH-AB}{2},$$

$$r'' = \frac{AH+CH-AC}{2} \Rightarrow r+r'+r'' = AH$$

۳.۳.۶. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۶. نقطه درون دایره

۷۳۶. دایره به قطر وتر مثلث قائم الزاویه از رأس زاویه قائمه می‌گذرد.

۲.۳.۳.۶. نقطه روی دایره

۷۳۷. کمان درخور زاویه C نظیر پاره خط BD را در نظر بگیرید.

۷۳۸. با توجه به این که $A'B' \parallel AB$ و $A'C' \parallel AC$ ، یعنی $\hat{A}' = \hat{A} = 90^\circ$ است.

چهار ضلعیهای $AHA'B'$ ، $AA'HC'$ و $AC'A'B'$ محاطی‌اند.

۴.۳.۶. قطر

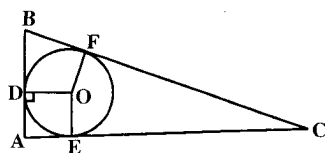
۷۳۹. می‌دانیم $BC = 2R$ است. نقطه‌های تماس ضلعهای AB ، AC و BC با دایره محاطی

مثلث را D ، E و F می‌نامیم. چهار ضلعی $ODAE$ مربع است و $AE = AD = OD = r$

می‌باشد. از طرفی داریم، $AD = BF$ و $EC = FC$. حال می‌توان نوشت:

$$AC + AB = AE + EC + AD + DB = r + FC + r + BF = 2r + BC$$

$$= 2r + 2R \Rightarrow b + c = 2r + 2R$$



۵.۳.۶. زاویه

۷۴۰. می دانیم که $EC = FC$ ، پس $\hat{E}_1 = \hat{F}_1$ و بنابراین $\hat{E}_2 = \hat{F}_2$ است. از طرفی چهارضلعی

$AEHK$ محاطی است، پس $\hat{K}_1 = \hat{E}_2$ و یا $\hat{K}_1 = \hat{F}_2$ اما $\hat{BKF} = \hat{BFK} = \frac{\widehat{KF}}{2}$.

در نتیجه $\hat{HKF} = \hat{HFK}$ ، یعنی مثلث

KHF متساوی الساقین است و

$BK = BF$ و $FH = KH$ می باشد و

است، پس دو مثلث BFH و BKH

حالت تساوی سه ضلع با هم برابرند.

لذا $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ و اما $AK = AE$ ، پس کمانهای $\widehat{AK} = \widehat{AE}$ و بنابراین $\hat{H}_3 = \hat{H}_4$ است. از طرفی داریم:

$$\hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 = 180^\circ \Rightarrow 2(\hat{H}_3 + \hat{H}_2) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{H}_2 + \hat{H}_3 = 90^\circ \Rightarrow \hat{AHB} = 90^\circ$$

۶.۳.۶. پاره خط

۷۴۱. چهارضلعی $ABDF$ محاطی است.

۷.۳.۶. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

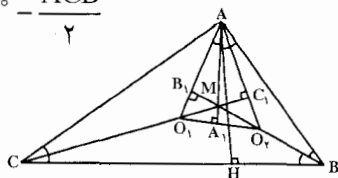
۱.۷.۳.۶. خطها برهم عمودند

۷۴۳. نقطه های A, D, M, F و D' روی یک دایره واقعند.

۷۴۴. اگر نقطه های O_1 و O_2 ، ترتیب، نقطه های برخورد نیمسازهای زاویه های داخلی

مثلثهای AHC و AHB باشند با توجه به این که $\hat{A} = 90^\circ$ است، داریم:

$$\hat{HAB} = \hat{ACB}, \quad \hat{CAO}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{BAH}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{ACB}}{2}$$



$$\Rightarrow \hat{ACC}_1 + \hat{CAC}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{AC}_1C = 90^\circ \Rightarrow C_1C \perp AO_1$$

به همین ترتیب ثابت می شود که $BB_1 = AO_1$ و $AA_1 \perp O_1O_2$ است، پس نقطه M محل برخورد ارتفاعهای مثلث AO_1O_2 است.

۲.۷.۳.۶. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۷۴۵. با رسم چند شکل موقعیت نقطه ثابت را بیابید.

۷۴۶. خط اولر هر مثلث خطی است که سه نقطه محل برخورد ارتفاعها (مرکز ارتفاعی) محل برخورد میانه ها (مرکز ثقل) و مرکز دایره محیطی را به هم وصل می کند.

در مثلث متساوی الساقین مرکز ارتفاعی روی ارتفاع وارد بر قاعده و مرکز ثقل و مرکز دایره محیطی مثلث نیز روی همین خط قرار دارند. بنابراین ارتفاع وارد بر قاعده که از رأس روبه رو به قاعده می گذرد، خط اولر نظیر مثلث متساوی الساقین است. در مثلث قائم الزاویه رأس زاویه قائمه مرکز ارتفاعی مثلث است که خط اولر مثلث از این نقطه می گذرد.

۳.۷.۳.۶. خط مماس بر دایره است

۷۴۷. مثلث OAB نیز قائم الزاویه است، ثابت کنید: $\hat{MOA} = \hat{OBA}$.

۸.۳.۶. شکلهای ایجاد شده

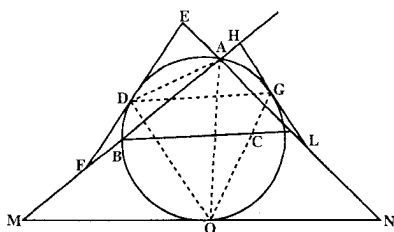
۷۴۸. باید ثابت کنیم که کمانهای $\widehat{DAG}$ و $\widehat{DBO}$ هر کدام ثلث دایره اند. A را به D و O وصل

می کنیم. در مثلث قائم الزاویه EAF میانه AD نصف وتر است، پس:

$$AD = DE = DF \quad \text{از آن جا:} \quad \hat{DAF} = \hat{DFA}, \quad \text{اما} \quad \hat{DAF} = \frac{\widehat{DB}}{2} \quad \text{و}$$

$$\hat{F} = \frac{\widehat{AD} - \widehat{DB}}{2} \quad \text{از آن جا کمان } \widehat{DB} \text{ نصف کمان } \widehat{AD} \text{ به این معنی که}$$

$$\widehat{AD} = \frac{2}{3} \widehat{ADB} \quad \text{به همین ترتیب } \widehat{AG} = \frac{2}{3} \widehat{AGC}, \quad \text{در نتیجه}$$



$$\widehat{AD} + \widehat{AG} = \widehat{DAG} = \frac{2}{3}(\widehat{BAC}) = \frac{1}{3}(36^\circ) = 12^\circ$$

به این ترتیب کمان $\widehat{DAG}$ برابر 12° و DG برابر ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاطی است. همچنین داریم:

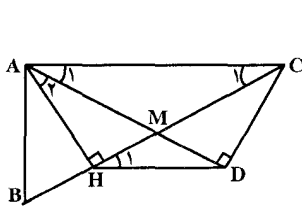
$$\widehat{MAO} = \widehat{AMO} \Rightarrow \widehat{BO} = \frac{1}{3}\widehat{ACO}, \quad \widehat{BD} = \frac{1}{3}\widehat{AD} \Rightarrow \widehat{OBD} = \frac{1}{3}\widehat{DACO}$$

$$\Rightarrow \widehat{OBD} = \frac{1}{3}(36^\circ) = 12^\circ$$

پس BD برابر ضلع مثلث متساوی الاضلاع محاط در دایره است، در نتیجه $\widehat{OG} = 12^\circ$ و مثلث ODG متساوی الاضلاع است.

۷۴۹. دو مثلث قائم الزاویه AHM و MDC برابرند، پس H و D روی دایره‌ای به قطر AC

قرار دارند. مثلث AMC متساوی الساقین است، پس $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ و چون $\hat{A}_1 = \hat{H}_1$



است، $\hat{C}_1 = \hat{H}_1$ و در نتیجه $AC \parallel HD$ و

چهارضلعی $AHDC$ دوزنقه است. ضلع

مقابل به زاویه 30° در مثلث قائم الزاویه نصف

وتر است، پس $\widehat{BAM} = 60^\circ$ و

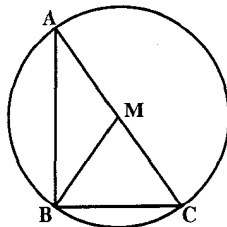
$MA = MB = AB$ و چون ارتفاع AH در

مثلث ABM نیمساز هم هست، پس $\hat{C}_1 = \hat{A}_1 = 30^\circ$ و در نتیجه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است. لذا

$\widehat{HD} = \widehat{DC}$ و در نتیجه $HD = DC$ است، پس: $AH = HD = DC$.

۷۵۰. دایره به مرکز M وسط وتر AC است و به شعاع $MC = MA = MB$ از سه رأس مثلث

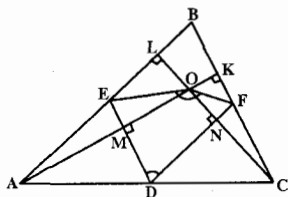
می‌گذرد و زاویه $\widehat{ABC}$ محاطی روبه روبه قطر است، پس 90° است.



۷۵۱. فرض می‌کنیم O نقطه تقاطع ارتفاعها باشد. طبق فرض چهارضلعی $EDFO$ محاطی

است، یعنی (۱) $\widehat{EOF} + \widehat{EDF} = 180^\circ$ از طرفی $AB \parallel DF$ و $ED \parallel BC$ پس $DF \perp CL$

و از آن جا: (۲) $\hat{M}\hat{O}\hat{N} + \hat{M}\hat{D}\hat{N} = 18^\circ$. از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می شود
 $\hat{E}\hat{O}\hat{F} = \hat{M}\hat{O}\hat{N}$ ، یعنی باید OF روی BC و OE روی AB قرار گیرد. چون OE و
 OF در نقطه O (محل تلاقی ارتفاعها) مشترکند، پس باید O بر B منطبق شود، یعنی
 زاویه B باید قائمه باشد.

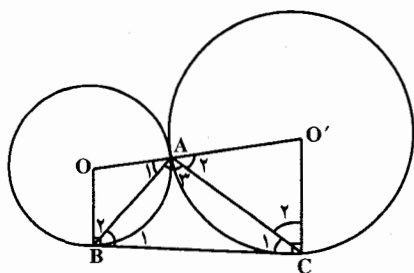


۷۵۲. سه زاویه A، M و N قائمه اند و $AM = AN$ است.

۷۵۳. زاویه ADE با زاویه C برابر است.

۶. ۳. ۹. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۷۵۴. مرکز دایره ای که از نقطه های A و B بگذرد و در نقطه B بر BC مماس باشد، نقطه O
 محل برخورد عمود منصف پاره خط AB با خطی است که در نقطه C بر BC عمود



می شود و مرکز دایره ای که از نقطه های
 A و C بگذرد و در نقطه C بر خط BC
 مماس باشد، نقطه O' محل برخورد
 عمود منصف AC و خط عمود در نقطه
 C بر BC است. اگر $OA = R$ و
 $O'A = R'$ باشد، کافی است ثابت کنیم
 که $OO' = OA + O'A$ ، یعنی نقطه های
 O، A و O' بر یک استقامتند. داریم:

$$\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ, \quad \hat{O}\hat{B}\hat{C} = \hat{O}'\hat{C}\hat{B} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ,$$

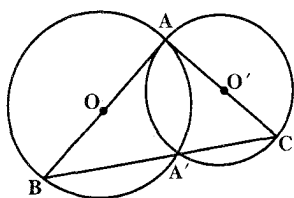
$$\hat{A}_3 = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{O}\hat{A}\hat{O}' = 180^\circ$$

پس دو دایره در نقطه A برهم مماسند.

۷۵۶. ترکیب (الف) شکل مثلث را مشخص می کند، اما اندازه آن را معین نمی کند. همه
 ترکیبهای دیگر، اندازه و شکل مثلث را مشخص می کند.

۶. ۳. ۱۰. مسأله های ترکیبی

۷۵۷. (الف) $\hat{B}\hat{A}'\hat{A} = \hat{C}\hat{A}'\hat{A} = 90^\circ$ ، یعنی $\hat{B}\hat{A}'\hat{C} = 180^\circ$ است. (ب) دو قطر عمود برهم



در دو دایره رسم کنید و ثابت کنید هر نقطه از ۴ نقطهٔ دو سر این قطرها، مرکز ارتفاعی مثلث حاصل از سه نقطهٔ دیگر است.

۴. ۶. دایره و مثلث حاده الزاویه و منفرجه الزاویه
۴. ۴. ۲. شعاع

۷۵۹. روشن سازید که مرکزهای این سه دایره، عبارتند از قرینه‌های مرکز دایره محیطی مثلث ABC نسبت به ضلعهای آن.

۶. ۴. ۳. نقطه و دایره

۱.۳.۴.۶ نقطه درون دایره

۷۶۰. هر یک از کمانهای ایجاد شده در دایره از 18° کمتر می باشند.

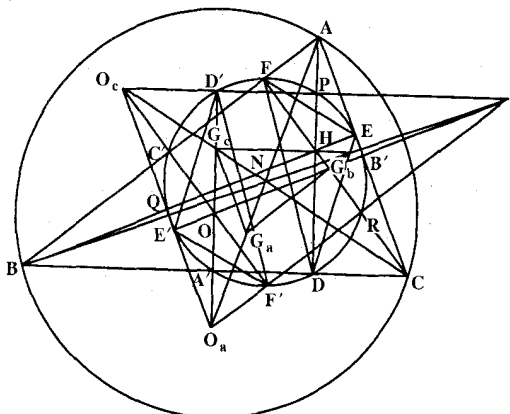
۷۶۱. فرض کنید O_a نقطهٔ متقارن O ، یعنی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مفروض ABC ، نسبت به ضلع BC باشد. پاره‌خطهای OO_a و AH (شکل) مساوی و موازی‌اند. پس OA و HO_a مساوی و موازی‌اند. شعاع $OA = R$ بر ضلع $d = EF$ از مثلث پادک DEF عمود است، پس HO_a نیز بر d عمود است. یعنی اگر HO_a خط d را در نقطهٔ L قطع کند، پاره‌خط $HL = m$ شعاع دایرهٔ محاطی مثلث DEF است.

حال اگر d' متقارن d نسبت به BC باشد، فاصله O از d' با فاصله $O_a L$ از d برابر است، زیرا O و O_a نیز نسبت به BC متقارنند. بعلاوه فاصله $O_a L = R + m$ به انتخاب ضلع d از مثلث DEF بستگی ندارد؛ پس O از ضلعهای d' ، e' و f' از مثلث $d'e'f'$ که از d' و دو ضلع مشابه اش e' و f' تشکیل می‌شود، همفاصله است.

نکته ۱. ضمن اثبات بالا ثابت کردیم که شعاع دایره محاطی داخلی مثلث $d'e'f'$ با مجموع شعاع دایره محیطی مثلث مفروض و شعاع دایره محاطی داخلی مثلث پادک آن برابر است.

نکته ۲. مثلث ABC مثلث حاده گروه مثلثهای مرکز ارتفاعی ABCH است، که DEF مثلث پادک مشترک آنهاست. گزاره‌های قبلی را می‌توان طوری تغییر داد که در مورد مثلثهای دیگر گروه مرکز ارتفاعی نیز صادق باشند. این کار را به عهده خواننده می‌گذاریم.

نکته ۳. اگر در گزاره های قبل DEF را مثلث داده شده فرض کنیم، نقطه های B و C دو مرکز دایره های محاطی خارجی آن خواهند بود؛ خط d بر دایره های محاطی خارجی متناظر مماس است؛



بنابراین، d' ، متقارن d نسبت به خط المרכזین BC نیز بر (B) و (C) مماس است؛ یعنی d' چهارمین مماس مشترک این دو دایره (علاوه بر ضلعهای DEF) است. نقطه O مرکز دایره محیطی مثلثی است که رأسهای آن مرکزهای

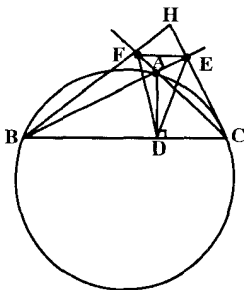
دایره های محاطی خارجی مثلث مفروض DEF هستند، پس گزاره های بالا را می توان به صورت زیر «ترجمه» کرد.

اگر دایره های محاطی خارجی یک مثلث حاده را دو به دو در نظر بگیریم، چهار مماس مشترک آنها مثلث دیگری می سازند که مرکز دایره محاطی داخلی اش بر مرکز دایره محیطی مثلثی که رأسهای آن مرکزهای دایره های محاطی خارجی مثلث داده شده هستند، منطبق است؛ و شعاع دایره محاطی داخلی آن با مجموع شعاع دایره محاطی داخلی و قطر دایره محیطی مثلث مفروض برابر است.

۷۶۲. ارتفاعهای هر مثلث نیمسازهای داخلی زاویه های مثلث ارتفاعیه نظیر آن مثلث می باشند.

۶. ۴. ۳. ۲. نقطه برون دایره

۷۶۳. هرگاه یک زاویه از مثلث منفرجه باشد، آن مثلث در کمائی کوچکتر از نیمدایره از دایره محیطی محاط است و دو ارتفاع مثلث ضلع روبه رو به زاویه منفرجه را در امتداد آن تلاقی می کنند.



۷۶۴. وقتی یک زاویه از مثلثی منفرجه است، مرکز ارتفاعی آن در خارج دایره محیطی آن مثلث واقع می شود. از طرفی ارتفاعهای مثلث نیمسازهای زاویه های مثلث ارتفاعی می باشند. پس محل برخورد آنها مرکز یک دایره محاطی این مثلث می باشد که چون در خارج مثلث ارتفاعی قرار دارد، پس مرکز دایره محاطی خارجی آن است.

۴.۴.۶. زاویه

۷۶۵. دایره‌ای بر مثلث MCB محیط کنید و BN را امتداد دهید تا این دایره را در نقطه‌ای

مانند M_1 قطع کند؛ $CM_1 = CM$ ، زیرا مجموع زاویه‌های روبه‌رو به آنها 8° (و

10°) برابر 18° است؛ $\hat{M}_1CM = \hat{M}_1BM = 2^\circ$ ، یعنی NC نیمساز زاویه M_1CM

است و $\Delta M_1CN = \Delta NCM$ و $\hat{NMC} = \hat{NM}_1C = \hat{CMB} = 25^\circ$

۷۶۶. M و H' را نقطه‌های برخورد امتدادهای AI و AH با دایره می‌گیریم.

$OI = BH \Rightarrow OI = BH'$ از $IM = OM = OB = OH'$ نتیجه می‌شود:

$$\Delta OIM = \Delta OBH' \Rightarrow \hat{IMO} = \hat{BOH'} = 2\hat{BAH'}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} = 2(9^\circ - \hat{B}) \Rightarrow \hat{B}-\hat{C} = 36^\circ - 4\hat{B}$$

$$\Rightarrow 5\hat{B} = 36^\circ + \hat{C} = 48^\circ - \hat{B}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 8^\circ, \hat{C} = 4^\circ, \hat{A} = 6^\circ$$

۴.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۷۶۷. A_1, B_1, C_1 را وسط ضلعها و O را مرکز دایره محیطی مثلث ABC فرض کنید.

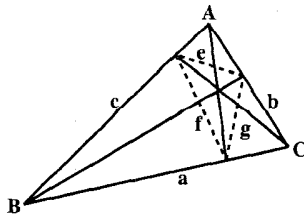
پاره خطهای راست OA_1, OB_1, OC_1 شش ضلعی را به متوازی‌الاضلاعهایی

تقسیم می‌کنند. بنابراین مساحت شش ضلعی دو برابر مساحت مثلث $A_1B_1C_1$ است.

۷۶۹. اگر e, f, g ضلعهای مثلث پادک مثلث ABC باشند، داریم:

$R : (a \cdot OA' + b \cdot OB' + c \cdot OC') = e + f + g$ و مجموع داخل پراتر دو برابر مساحت

ABC است؛ پس قضیه ثابت می‌شود.



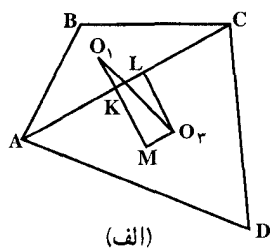
راهنمایی و حل قضیه ها و مسأله های بخش ۷. دایره و چهارضلعی

۱.۷. چهارضلعی محاطی

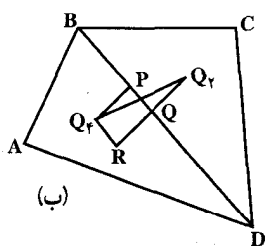
۱.۷.۱. تعریف و قضیه

۷۷۰. قطرهای چهارضلعی محاطی ABCD را رسم می کنیم. زاویه های روبه رو به هر ضلع، زاویه های محاطی روبه رو به کمان نظیر آن ضلع می باشند، پس برابرند. به عنوان مثال داریم: $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ و $\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = \frac{\widehat{DC}}{2}$ ، بعکس اگر در یک چهارضلعی زاویه های روبه رو به یک ضلع برابر باشند، آن چهارضلعی بنا به ویژگی کمان درخور یک زاویه، محاطی است.

۱.۷.۲. شعاع



(الف)



(ب)

۷۷۱. فرض کنید، O_1, O_2, O_3, O_4 بترتیب، معرف مرکز

دایره های محاطی مثلثهای ABC، BCD، CDA و

DAB باشند شکل (الف و ب). چون $O_1O_2O_3O_4$

مستطیل است، داریم: $O_1O_3 = O_2O_4$. اگر K و L

نقطه های تماس دایره های محاطی مثلثهای ABC و

ACD با AC باشند، آن وقت،

$$KL = \frac{1}{4} |AB + CD - BC - AD|$$

اگر P و Q نقطه های تماس دایره های متناظر، با

BD باشند، آن وقت $PQ = KL$. از O_3 ، خط راستی به

موازات AC رسم می کنیم تا امتداد O_1K را قطع کند.

مثلث O_1O_3M را به دست می آوریم؛ سپس مثلث O_2O_4R را به روش مشابه می سازیم.

این دو مثلث قائم الزاویه، برهم قابل انطباقند، زیرا در آنها: $O_1O_3 = O_2O_4$ و

$O_3M = KL = PQ = Q_4R$. بنابراین، $O_1M = O_2R$ ؛ اما، O_1M برابر است با

مجموع شعاعهای دایره های محاطی مثلثهای ABC و ACD و O_2R برابر است با

۱.۳.۱.۷. نقطه روی دایره

۷۷۳. اگر E نقطه تقاطع نیمساز زاویه داخلی A از

چهارضلعی محاطی ABCD با دایره محیطی آن باشد، ثابت کنید CE نیمساز خارجی زاویه C از این چهاره

۷.۱.۳.۲. نقطه‌های همخط

۷۷۴. سه مثلث ABC ، ACD و ADB را با رأس مشترک A در نظر بگیرید. تصویر M روی AB ، AC و AD را به ترتیب با B_1 ، C_1 و D_1 نشان دهید. خطهای راست B_1C_1 ، C_1D_1 و D_1B_1 خطهای سیمسون نقطه M نسبت به مثلثهای ABC ، ACD و ADB هستند. اما نقطه های A ، M ، B_1 ، C_1 و D_1 بر یک دایره واقعند. (AM قطر این دایره است). در نتیجه، تصویرهای نقطه M روی B_1C_1 ، C_1D_1 و D_1B_1 روی خط راستی واقعند که خط سیمسون نقطه M نسبت به مثلث $B_1C_1D_1$ است. با در نظر گرفتن تصویرهای نقطه M روی خطهای سیمسون متناظر سه مثلث با رأس مشترک B ، به این نتیجه می‌رسیم که این سه تصویر هم، بر یک خط راست واقعند، بنابراین، چهار تصویر، همخطند. به استقرا، گذر از n به $n+1$ ، درست به روش مشابه انجام می‌شود.

۷۷۵. پاره‌خط‌هایی که نقطهٔ میکل M برای چهار خط p, q, r, s را به مرکزهای ارتفاعی چهار مثلثی که توسط این چهار خط تعیین می‌شوند، وصل می‌کنند توسط خط سیم‌سوز مشترک M نسبت به این چهار مثلث، یعنی خط $PQRS$ نصف می‌شوند؛ پس این مرکزهای ارتفاعی، روی خطی، که در تحانس $(M, 2)$ با خط $PQRS$ متناظر است، قرار دارند.

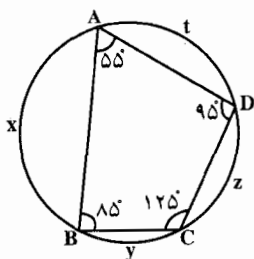
۳.۳.۱.۷. نقطه‌های همدایره

۷۷۶. سه زاویه تشکیل شده در نقطه O برابر ۴ قائمه‌اند و به دلیل محاطی بودن چهارضلعیها زاویه G از چهارضلعی FGHI برابر مجموع مکملهای دو زاویه دیگر تشکیل شده در نقطه G می‌باشند، یعنی زاویه HGF یا $G = \hat{BAF} + \hat{BCH}$ و $\hat{FIH} = \hat{I} = \hat{DCH} + \hat{DAF}$ از آنجا: $\hat{G} + \hat{I} = \hat{A} + \hat{C} = ۲۰$ قائمه. در نتیجه چهارضلعی FGHI محاطی است.

۴.۱.۷. کمان

۷۷۷. در چهارضلعی محاطی ABCD اگر $\hat{A} = ۵۵^\circ$ و $\hat{B} = ۸۵^\circ$ باشد $\hat{D} = ۱۸^\circ - ۸۵^\circ = ۹۵^\circ$ و $\hat{C} = ۱۸^\circ - ۵۵^\circ = ۱۲۵^\circ$ اما اندازه کمانها را نمی‌توان مشخص کرد، زیرا با فرض $\widehat{AB} = x$ ، $\widehat{BC} = y$ ، $\widehat{CD} = z$ و $\widehat{DA} = t$ باشد، داریم:

که این دستگاه جواب ندارد.



$$\begin{cases} y + z = 11^\circ \\ z + t = 17^\circ \\ t + x = 25^\circ \\ x + y = 19^\circ \end{cases}$$

۵.۱.۷. زاویه

۱.۵.۱.۷. اندازه زاویه

۷۷۸. این دو زاویه، دو زاویه مجاور چهارضلعی محاطی می‌باشند زیرا مجموع آنها ۱۸° نیست، پس دو زاویه دیگر $۱۱۲^\circ = ۱۸^\circ - ۶۸^\circ$ و $۳۷^\circ = ۱۸^\circ - ۱۴۳^\circ$ است.

۷۷۹. با فرض $\hat{A} = x$ و $\hat{B} = y$ و با توجه به اینکه $\hat{C} = ۱۸^\circ - \hat{A}$ و $\hat{D} = ۱۸^\circ - \hat{B}$ است،

در مثلثهای AED و ABF داریم:

$$\alpha + x + 18^\circ - y = 18^\circ \Rightarrow y - x = \alpha \quad (1)$$

$$\beta + x + y = 18^\circ \Rightarrow x + y = 18^\circ - \beta \quad (2)$$

از رابطه های (۱) و (۲) نتیجه می شود:

$$\hat{A} = x = 9^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ و } \hat{B} = y = 9^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

و از آنجا زاویه های D و C نیز

مشخص می شوند.

۷۸۰. $\hat{EBC} = \hat{ADC}$ زیرا هردو مکمل $\hat{ABC}$ هستند. توجه داشته باشید که داده

$\hat{BAD} = 92^\circ$ برای حل مسئله لازم نیست.

$$\frac{1}{2}(\beta + y - \alpha) \quad ۷۸۱$$

۷۸۲. از O به A وصل کنید در چهارضلعی محاطی AMON قطر OA ثابت است و داریم:

مقدار ثابت $\hat{AMN} = \hat{AON}$ و به نتیجه فوق خواهیم رسید.

۲.۵.۱.۷. رابطه بین زاویه ها

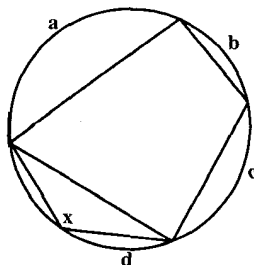
۷۸۳. در چهارضلعی محاطی ABCD زاویه خارجی DCx را در نظر می گیریم. داریم:

$\hat{A} = \hat{DCx}$ زیرا هردو زاویه مکمل زاویه BCD می باشند.

۷۸۴. گزینه (ب) درست است. زیرا طبق شکل $x = \frac{1}{2}(a + b + c)$. بنابراین مجموع چهار زاویه

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c + b + c + d + c + d + a + d + a + b)$$

$$= \frac{3}{2}(a + b + c + d) = \frac{3}{2}(36^\circ) = 54^\circ$$



راهنمایی و حل / بخش ۷ □ ۴۳۱

۷۸۵. گزینه (د) درست است. حالت خاصی را در نظر بگیرید که چهارضلعی مربع است و در نتیجه تمام زاویه‌های محاطی برابرند و هر زاویه محاطی:

$$x = \frac{1}{4}(270^\circ), \quad 4x = 540^\circ$$

۷۸۶. چهارضلعیهای ABCD و ABHF محاطی اند.

۷۸۷. از نقطه M به نقطه‌های B و D وصل کنید و از خاصیت‌های چهارضلعیهای محاطی استفاده کنید.

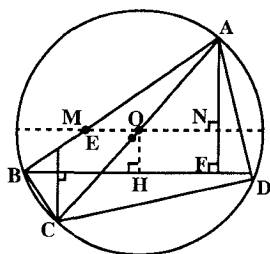
۷۸۸. چهارضلعی غیرمحدب ABCD را در نظر بگیرید. داریم:

$$\hat{DAB} = \hat{DCB} = \frac{\widehat{BD}}{2}, \quad \hat{ADC} = \hat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

بعکس اگر در یک چهارضلعی غیرمحدب زاویه‌های روبه‌رو به یک ضلع برابر باشند، چهارضلعی محاطی است. (ویژگی کمان درخور)

۶.۱.۷. پاره خط

۷۸۹. چهارضلعی محاطی ABCD را که قطر آن است، در نظر می‌گیریم. CE و



AF عمودهای رسم شده بر قطر BD می‌باشند. باید ثابت کنیم که $BE = DF$ است برای این کار قطری از دایره را که موازی BD است رسم می‌کنیم. و نقطه‌های برخورد آن با CE و AF را به ترتیب M و N می‌نامیم و عمود OH را بر BD فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویه OCM و OAN همنهشتند. در نتیجه $OM = ON$ و از آن جا $BE = FD$ و همچنین $BF = ED$.

۷.۱.۷. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۱.۷.۱.۷. خطها موازی اند

۷۹۰. ثابت کنید که اگر چهارضلعی محاطی باشد، نیمسازهای زاویه‌های بین ضلعهای غیرمتوالی موازی‌اند و بعکس. اگر این ویژگی در یک چهارضلعی وجود داشته باشد، آن چهارضلعی محاطی است.

۷۹۱. اندازه زاویه‌ای را که نیمساز زاویه M با یکی از دو قطر چهارضلعی می‌سازد و همچنین اندازه نصف زاویه بین دو قطر را برحسب اندازه کمانها بنویسید و ثابت کنید برابرند.

۲.۷.۱.۷. خطها برهم عمودند

۷۹۳. می دانیم که اندازه زاویه بین نیمسازهای

زاویه های حاصل از امتداد ضلعهای مقابل

یک چهارضلعی غیر مشخص، برابر نصف

مجموع اندازه دو زاویه مقابل چهارضلعی

است. یعنی $\hat{EMF} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$. حال چون

چهارضلعی ABCD محاطی است پس

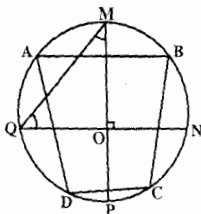
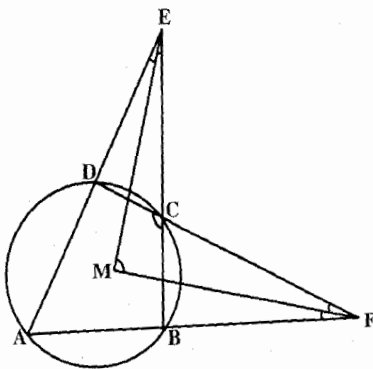
۷۹۴. $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ و در نتیجه $\hat{EMF} = 90^\circ$ ، یعنی $ME \perp MF$.

اگر O نقطه برخورد پاره خطهای اصل بین وسطهای کمانهای

مقابل در چهارضلعی محاطی ABCD باشد و از M به Q

وصل کنیم. داریم:

$$\hat{MON} = \hat{OMQ} + \hat{OQM}$$

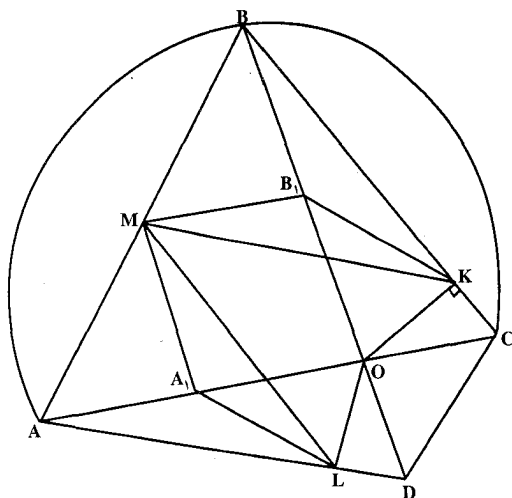
۷۹۵. با توجه به این که مثلث AGB قائم الزاویه است، ثابت کنید که دو زاویه $\hat{GAB}$ و $\hat{BGH}$ باهم مساوی اند.

۳.۷.۱.۷. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۷۹۶. A_1 و B_1 را به ترتیب وسطهای OB و OA می گیریم. در مثلث قائم الزاویه OKBداریم: $KB_1 = \frac{1}{2}OB$. از طرفی در مثلث OAB نیز داریم: $MA_1 = \frac{1}{2}OB$. بنابرایناز این دو تساوی، تساوی $KB_1 = MA_1$ نتیجه خواهد شد. به همین ترتیب تساوی $LA_1 = MB_1$ نیز حاصل خواهد شد. حال ثابت می کنیم دو مثلث $\triangle LMA_1$ و $\triangle MKB_1$ برابرند. با توجه به تساویهای بالا کافی است ثابت کنیم زاویه های $\hat{MA_1L}$ و $\hat{MB_1K}$

باهم برابرند. برای این کار خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \hat{MB_1O} &= \hat{MA_1O} \text{ (چون } MB_1OA_1 \text{ متوازی الاضلاع است)} \\ \hat{KB_1O} &= 2\hat{KBO} = 2\hat{OAD} = \hat{OA_1L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{MA_1L} = \hat{MB_1K}$$

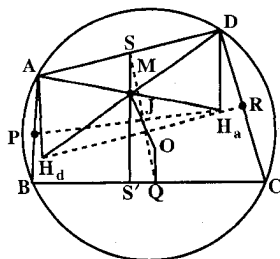


پس تساوی $LM = MK$ حاصل می‌شود. یعنی عمود منصف KL از M می‌گذرد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که عمود منصف KL از N نیز می‌گذرد.

۷۹۷. پاد مرکز یک چهارضلعی، قرینه مرکز دایره محیطی آن نسبت به مرکز ثقل چهارضلعی است. مرکز ثقل چهارضلعی نقطه برخورد خطهایی است که وسطهای ضلعهای روبه روی چهارضلعی را به هم وصل می‌کنند.

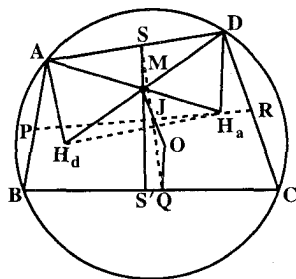
۴.۷.۱.۷. خطها همرسند

۷۹۸. فرض کنید O و J بترتیب مرکز دایره محیطی و مرکز ثقل چهارضلعی محاطی $ABCD$ و R, Q, P و S بترتیب نقطه‌های وسط ضلعهای AB, BC, CD, DA باشند. فرض کنید عمود SS' که از S بر BC رسم می‌شود خط OJ را در M قطع کند. خطهای SS' و OQ موازی‌اند و J خط QS را نصف می‌کند، پس J وسط OM است. پس SS' از M ، نقطه متقارن O ، مرکز دایره محیطی، نسبت به J ، مرکز ثقل چهارضلعی، می‌گذرد؛ یعنی SS' از نقطه‌ای می‌گذرد که به انتخاب اولیه این عمود بستگی ندارد. پس قضیه ثابت می‌شود.



نکته. عمودی که از وسط هر قطر بر قطر دیگر رسم می‌شود نیز از نقطه M می‌گذرد، زیرا مرکز ثقل I وسط خطی که وسط دو قطر را به هم وصل می‌کند نیز هست.

۷۹۹. فرض کنید H_a و H_d بترتیب مرکز ارتفاعی مثلثهای ABC و DBC باشند. داریم:



$AH_d = 2OQ = DH_a$. خطهای AH_d و DH_a

هر دو بر BC عمودند؛ پس ADH_aH_d متوازی
 الاضلاع است و قطرهای DH_d و AH_a از وسط
 یکدیگر می‌گذرند.

به طور مشابه DH_d از وسط خطهای BH_b و CH_c می‌گذرد، و این خطها نیز از وسط DH_d می‌گذرند، پس قضیه ثابت می‌شود.

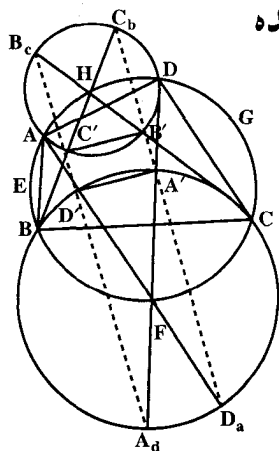
پس نقطه مشترک این چهار خط، یعنی X ، مرکز تقارن دو چهار ضلعی $H_aH_bH_cH_d$ و $ABCD$ است.

نکته. نقطه X بر پاد مرکز چهارضلعی یعنی M ، منطبق است.

در واقع در مثلث DAH_d خط SX با AH_d موازی، و بنابراین، بر BC عمود است؛ پس SX از M می‌گذرد. برای PX ، QX و RX نیز وضعیت همین‌طور است و گزاره فوق ثابت می‌شود. پس نقطه M مرکز تقارن دو چهارضلعی $ABCD$ و $H_aH_bH_cH_d$ است.

۸۰۱. فرض کنید $ABCD$ یک چهار ضلعی محاطی باشد، خط سیمسون $D(ABC)$ از نقطه وسط پاره خط بین D و مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد، یعنی از پاد مرکز چهار ضلعی $ABCD$ می‌گذرد. مطالب مشابهی در مورد خطهای سیمسون $A(BCD)$ ، $B(CDA)$ و $C(DAB)$ صادق است.

۷.۱.۸. شکلهای ایجاد شده

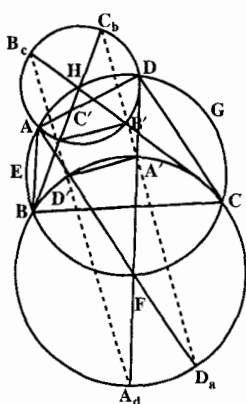


۸۰۲. فرض کنید E, F, G و H وسط کمانهای AB, BC,

CD و DA از دایره محیطی چهارضلعی محاطی ABCD باشند. D' و A' مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای ABC و DBC به ترتیب روی AF و DF، یعنی نیمسازهای زاویه‌های BAC و BDC، و همچنین روی دایره (F, FB) قرار دارند؛ پس مثلث $FA'D'$ متساوی الساقین و قاعده $A'D'$ بر FH، نیمساز

زاویه F، عمود است. به طور مشابه، خط FH بر $B'C'$ عمود است، که B' و C' بترتیب مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلثهای CAD و BAD هستند. به طور مشابه، خط EG بر خطهای $A'B'$ و $C'D'$ عمود است. خطهای FH و EG برهم عمودند و قضیه ثابت می‌شود.

۸۰۳. فرض کنید $C_b, C_a, B_d, B_c, B_a, A_d, A_c, A_b, D_c, D_b, D_a$ بترتیب مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی مثلثهای ABC, BCD, CDA و DAB باشند، به طوری که A_b مرکز دایره محاطی خارجی نسبت به رأس B از مثلث BCD باشد و... (شکل) دو نقطه D_a و D' دوسر قطری از دایره (F,FB) و دو نقطه



A_d و A' دوسر قطر دیگر از این دایره هستند؛ پس $D'A'D_aA_d$ یک مستطیل است، و در نتیجه A_d و D_a بترتیب روی خطهای $C'D'$ و $B'A'$ قرار دارند. با در نظر گرفتن دایره (H, HA) می‌توانیم نشان دهیم که نقطه‌های B_c و C_b بترتیب روی خطهای $D'C'$ و $A'B'$ قرار دارند. پس دو مجموعه چهارتایی از نقطه‌های همخط داریم که عبارتند از $A'B'C_bD_a$ و $C'D'A_dB_c$.

با در نظر گرفتن دایره‌های (E,EA) و (G,GC) دو نقطه

دیگر بر روی هریک از خطهای $A'D'$ و $B'C'$ به دست می‌آوریم.

با در نظر گرفتن ملاحظات مشابه، نتیجه بیان شده به دست می‌آید.

نتیجه، شازده مرکز سه مماس چهار مثلثی که توسط چهار رأس چهارضلعی محاطی تعیین می‌شوند، چهارتا چهارتا روی هشت خط قرار دارند. این هشت خط از دو گروه چهارتایی تشکیل می‌شوند، به طوری که خطهای هر گروه باهم موازی‌اند و بر خطهای گروه دیگر عمودند. این جمعبندی گزاره‌های قبلی است.

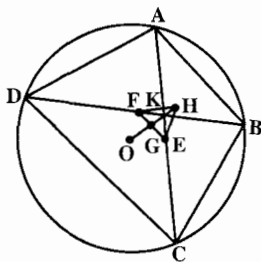
۸۰۴. نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌رو در چهارضلعی ABCD را E و F می‌نامیم.

نقطه‌های برخورد نیمسازهای دو زاویه $\hat{AED}$ و $\hat{BFA}$ با ضلعهای چهارضلعی را G, H, I و J می‌نامیم. برای اثبات این که چهارضلعی IGJH لوزی است باید ثابت کنیم که GH و II عمود منصف یکدیگرند.

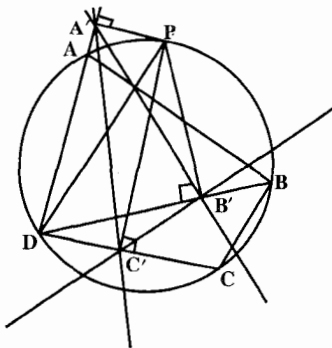
می‌دانیم که نیمسازهای دو زاویه $\hat{AED}$ و $\hat{BFA}$ برهم عمودند. اما می‌توان مستقیماً نشان داد که مثلث FGH متساوی‌الساقین است.

دو مثلث DEH و BEG دو زاویه مساوی CEG و BEG را دارند. همچنین دو زاویه D و GBE برابرند. زیرا هر دو مکمل زاویه ABC می باشند. در نتیجه زاویه سوم این دو مثلث نیز برابر است، یعنی $\hat{DHE} = \hat{BGE} = \hat{CGH}$. پس مثلث FGH متساوی الساقین است. نیمساز FO از زاویه رأس عمود منصف قاعده است. همچنین $OH = OG$ است. همین طور می توان نشان داد که $OI = OJ$ است. پس IGJH لوزی است.

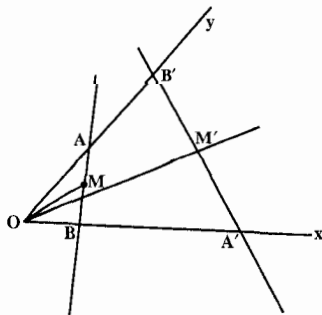
۹.۱.۷. سایر مسأله های مربوط به این قسمت



۸۰۷. چهارضلعی ABCD محاط در دایره به مرکز O را در نظر بگیرید. وسط قطرهای AC و BD را به ترتیب E و F، نقطه برخورد قطرهای AC و BD را K و مرکز ارتفاعی مثلث KEF را H و مرکز ثقل چهارضلعی محاطی را G بنامید و ثابت کنید که نقطه H قرینه نقطه O نسبت به نقطه G است.



۸۰۹. فرض کنید ABCD یک چهارضلعی محاطی، P نقطه ای روی دایره محیطی آن، و A' و B' و C' تصویرهای نقطه P روی خطهای DA، DB و DC باشند. خطهای $A'B'$ ، $A'C'$ و $B'C'$ خطهای سیمسون P نسبت به مثلثهای DAB، DCA و DBC هستند، و نقطه P با رأسهای مثلث $A'B'C'$ که توسط این خطهای سیمسون تشکیل می شود همدايره است، زیرا نقطه های A' ، B' و C' روی دایره ای به قطر PD قرار دارند. برای هر سه خطی که از این چهار خط در نظر بگیریم، وضعیت مشابهی برقرار است. پس قضیه ثابت شده است.



۸۱۱. نیمساز زاویه AOA' نیمساز زاویه MOM' است.

۱.۷.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

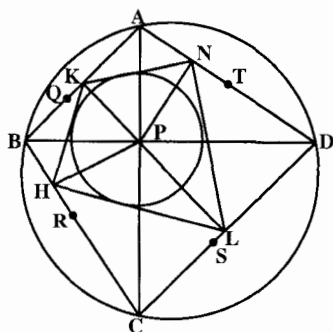
۸۱۲. الف. $\hat{1} = 74^\circ$ ب. $\hat{2} = 90^\circ$ ب. $\hat{3} = 55^\circ$ ت. $\hat{3} = 6^\circ$

ث. $\hat{4} = 4^\circ$ ج. $\hat{4} = 37^\circ$ ج. $\hat{a} = 84^\circ$ ح. $\hat{a} = 11^\circ$

خ. $\hat{b} = 66^\circ$ د. $\hat{c} = 98^\circ$ ذ. $\hat{d} = 75^\circ$ ر. $\hat{CPA} = 79^\circ$

۸۱۳. ۱. با استفاده از چهارضلعیهای محاطی PNDL, PLCH, PHBK و PKAN ثابت

کنید که خطهای مصور نقطه P، نیمسازهای داخلی زاویه‌های چهارضلعی HKNL می‌باشند و مجموع زاویه‌های روبه‌رو در این چهارضلعیها دو قائمه است.



۲. وسطهای ضلعهای AB، BC، CD و DA را به ترتیب Q، R، S و T بنامید. نقطه P را به T وصل کنید و ثابت کنید PT در امتداد PH است و با استفاده از زاویه‌های قائمه THR و TNR ثابت

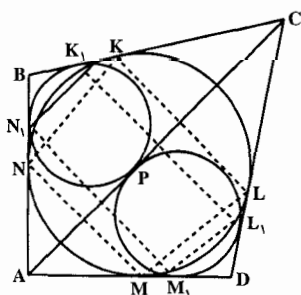
کنید که دایره به قطر TR از نقطه‌های H و N می‌گذرد. همچنین دایره به قطر QS از نقطه‌های K و L می‌گذرد. از طرفی چهارضلعی QRST مستطیل و $QS = TR$ است.

۸۱۴. الف. فرض کنید ABCD چهارضلعی داده شده باشد و R و Q به ترتیب، نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با خط راست AC باشند. در این صورت:

$$RQ = |AQ - AR|$$

$$= \frac{1}{2} |(AB + AC - BC) - (AD + AC - CD)|$$

$$= \frac{1}{2} |AB + CD - AD - BC|$$



چون ABCD چهارضلعی محیطی است،

یعنی، $AB + CD = AD + BC$ ، $RQ = 0$.

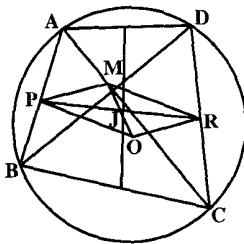
ب. اگر K، L، M و N نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای چهارضلعی، و K_1 ، L_1 ، M_1 و N_1 نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی مثلثهای ABC و ACD با ضلعهای چهارضلعی باشند (شکل)،

آن وقت $N_1K_1 \parallel NK$ و $M_1L_1 \parallel ML$. ثابت می کنیم که $N_1M_1 \parallel NM$ و $K_1L_1 \parallel KL$.
چون دایره های محاطی مثلث های ACB و ACD ، روی قطر چهارضلعی، در یک نقطه
 P برهم می آسند، داریم: $AN_1 = AP = AM$ ، یعنی $N_1M_1 \parallel NM$. در نتیجه،
 $K_1L_1M_1N_1$ ، و بعلاوه، $KLMN$ ، چهارضلعی محاطی است.
۸۱۶. از ویژگی چهارضلعی های محاطی استفاده کنید.

۲.۷. چهارضلعی محاطی عمود قطر

۲.۲.۷. نقطه و دایره

۱.۲.۲.۷. نقطه درون دایره

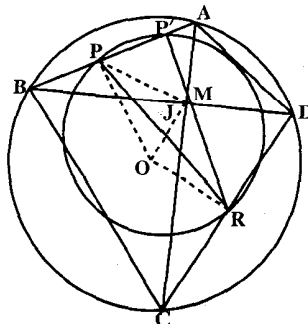


۸۱۷. اگر O مرکز دایره محیطی و J نقطه برخورد خط های
واصل بین وسط های ضلع های مقابل و وسط های قطر های
چهارضلعی باشند، H_d محل برخورد ارتفاع های مثلث
 ABC بر عمود BD و بر قاعده AC منطبق است و خط
 DH_d از نقطه M (قرینه مرکز دایره نسبت به J) می گذرد.
در نتیجه نقطه M روی قطر BH_dD قرار دارد. به همین

ترتیب نقطه M روی قطر AC واقع است. پس نقطه M محل برخورد این دو خط است.

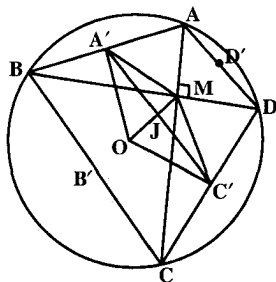
۲.۲.۲.۷. نقطه های هم دایره

۸۱۸. در واقع اگر P وسط ضلع AB باشد (شکل)، قطر PR از دایره مذکور از نقطه P' با
زاویه قائمه دیده می شود. برای بقیه تصویر های نقطه M هم وضعیت به همین صورت
است.



۳.۲.۷. پاره خط

۸۱۹. پاره خط OM در نقطه J نصف می شود و $A'C'$ پاره خطی است که نقطه های A' و C' وسطهای ضلعهای مقابل AB و CD را به هم وصل می کند. در نتیجه چهارضلعی $A'MC'O$ متوازی الاضلاع است و $OA' = MC'$ ولی OA' بر AB عمود است پس MC' بر AB عمود می باشد و در نتیجه میانه مثلث قائم الزاویه MCD نصف وتر CD می شود. به عبارت دیگر OA' نصف CD است.



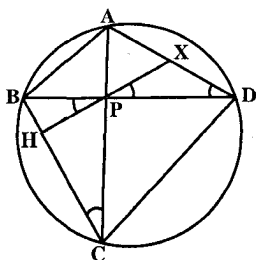
۸۲۰. ثابت کنید $\widehat{AE} = \widehat{BC}$ و یا $\widehat{CE} = \widehat{AB}$.

۴.۲.۷. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۸۲۱. مطابق با شکل، چهار گوشه ABCD محاطی است و دو قطر AC و BD از آن در P برهم عمودند. خط PH بر BC عمود است و AD را در X تلاقی کرده است. برای اثبات آن که X وسط AD است، ملاحظه می کنیم که زاویه های XPD و BPH باهم و زاویه های XDP و ACB باهم برابرند. بنابراین دو زاویه XDP و XPD باهم برابرند و در نتیجه $XP = XD$.

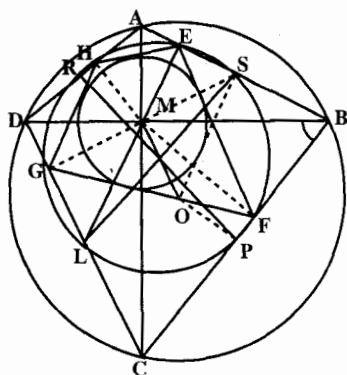
همچنین ثابت می شود که $XP = XA$ ، بنابراین: $XA = XD$. از قضیه بالا، قضیه زیر به سادگی بدست می آید:

در چهار گوشه محاط در دایره به مرکز O که قطرهای آن در P برهم عمودند، وسطهای ضلعها و تصویرهای قائم روی ضلعها هشت نقطه واقع بر محیط یک دایره اند که مرکز آن وسط OP است.



۳.۷. چهار ضلعی محیطی

۱.۳.۷. تعریف و قضیه



۸۲۲. محاطی بودن چهار ضلعی حاصل در مسأله های قبل ثابت شد. محیطی بودن این چهار ضلعی را ثابت کنید، یعنی ثابت کنید، مجموع ضلعهای روبه روی این چهار ضلعی باهم برابرند.

۲.۳.۷. شعاع

۱.۲.۳.۷. اندازه شعاع

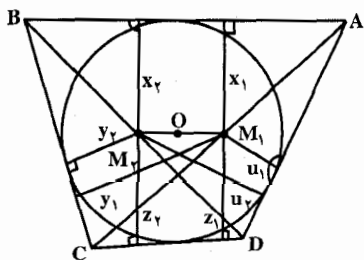
۸۲۳. با توجه به این که $BC = ۴$ ، $DC = ۵$ است و $AM = MQ = r$ می باشد. داریم:

$$AB + DC = BC + AD$$

$$r + ۲ + ۵ = ۴ + ۳ + r$$

۳.۳.۷. نقطه و دایره

۱.۳.۳.۷. نقطه های همخط



۸۲۴. فرض کنید ABCD چهار ضلعی محیطی، O مرکز دایره محاطی آن M_1 وسط AC، وسط BD و شعاع دایره باشد (فاصله O تا هر یک از ضلعها، برابر r است)، x_1, y_1, z_1 و u_1 فاصله های M_1 بترتیب، تا AB، BC، CD، DA، و x_2, y_2, z_2 و u_2 فاصله های

M_2 ، بترتیب تا همین ضلعها هستند. چون $AB + CD = BC + DA$

داریم $AB.r - BC.r + CD.r - DA.r = ۰$

بعلاوه $AB.x_1 - BC.y_1 + CD.z_1 - DA.u_1 = ۰$ و

$$AB \cdot x_7 - BC \cdot y_7 + CD \cdot z_7 - DA \cdot u_7 = 0$$

و این درست بدان معنی است که نقطه‌های O ، M_1 و M_2 روی یک خط راست قرار دارند.

۷.۳.۴. ضلع

$$7 + 16 = 11 + x \Rightarrow x = 12 \quad \text{۸۲۶. ضلع چهارم را } x \text{ فرض می‌کنیم، داریم:}$$

$$AB + CD = BC + DA \Rightarrow a + 1 + 3a + 2 = 4a - 3 + a + 3 \quad \text{۸۲۷. داریم:}$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow CD = 11$$

۸۲۸. مجموع هر دو ضلع روبه‌رو در یک چهارضلعی محیطی، نصف محیط چهارضلعی

$$\text{است. پس داریم: } 36 \div 2 = 18 \text{ cm} \Rightarrow \text{ضلع مورد نظر} = 18 - 8 = 10 \text{ cm}$$

۷.۳.۵. قطر

۸۲۹. اگر در چهارضلعی محیطی $ABCD$ ، $AB = AD$ باشد، آن‌گاه $BC = BD$ خواهد بود

و در نتیجه قطر AC عمود منصف قطر BD است. واضح است که قطر BD عمود منصف قطر AC نیست.

۷.۳.۶. محیط

$$\text{۸۳۰. چون } AD + BC = 7 + 6 + 4 + 5 = 22 \text{، پس محیط چهارضلعی محیطی } ABCD$$

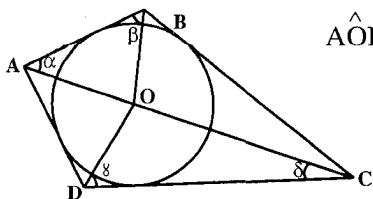
برابر ۴۴ است.

$$\text{۸۳۱. } 54 \text{ سانتیمتر.}$$

۷.۳.۷. زاویه

۸۳۲. O را مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی $ABCD$ می‌گیریم. داریم:

$$\hat{AOB} = 180^\circ - \alpha - \beta, \quad \hat{COD} = 180^\circ - \gamma - \delta$$



$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{1}{4}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) = 18^\circ \text{ در ضمن}$$

$$\text{بنابراین، } \hat{A}\hat{O}\hat{B} + \hat{C}\hat{O}\hat{D} = 36^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 18^\circ$$

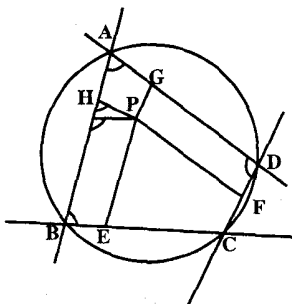
۸.۳.۷. پاره خط

۸۳۳. ثابت کنید که هریک از این شرطها، هم لازم و هم کافی است برای این که دایره‌ای، محاط در چهارضلعی ABCD وجود داشته باشد.

۸۳۴. نشان دهید که هریک از این شرطها، هم لازم و هم کافی است برای این که دایره‌ای، مماس بر خطهای AB، BC، CD و DA که مرکزش بیرون چهارضلعی ABCD است، وجود داشته باشد.

۹.۳.۷. شکلهای ایجاد شده

۸۳۵. فرض می‌کنیم ABCD یک چهارضلعی محاطی و



زاویه A کوچکترین زاویه آن باشد. از نقطه P واقع در داخل چهارضلعی، خطهایی به موازات AD و AB رسم می‌کنیم. تا بترتیب CD و CB را در نقطه‌های F و E قطع کنند. اگر نقطه P به اندازه کافی به نقطه A نزدیک باشد، در این صورت نقطه E بین B و C و نقطه F بین نقطه‌های C و D قرار می‌گیرند. همچنین از نقطه P خط PG را چنان رسم

می‌کنیم که $\hat{P}\hat{G}\hat{D} = \hat{D}$ ، و PH را چنان رسم می‌کنیم

که $\hat{P}\hat{H}\hat{B} = \hat{B}$ باشد. از آن جا که $\hat{B} > \hat{A}$ است، اگر P به قدر کافی به نقطه A نزدیک باشد، H بین A و B و به همین ترتیب G بین A و D واقع می‌شود. چهارضلعی PEGF محاطی است. زیرا دارای همان زاویه‌های ABCD است. چهارضلعی AHPG محاطی

$$\text{است زیرا } \hat{A}\hat{H}\hat{P} + \hat{A}\hat{G}\hat{P} = 180^\circ - \hat{B} + 180^\circ - \hat{D} = 180^\circ$$

PHBE و PFDG دوزنقه‌هایی متساوی الساقین و در نتیجه محاطی‌اند. به این ترتیب ABCD را به ۴ چهارضلعی محاطی تقسیم کرده‌ایم. برای تقسیم چهارضلعی به

چهارضلعیهای محاطی بیشتر، تنها خطهایی موازی قاعده‌های یکی از دوزنقه‌های متساوی الساقین حاصل رسم می‌کنیم.

۱۰.۳.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۳۶. از شرطهای مسأله نتیجه می‌شود که $ABCD$ دوزنقه است، $BC \parallel AD$ و AC نیمساز

زاویه BAD است؛ بنابراین $AB = BC$ ، به همین نحو، $BC = CD$. فرض کنید

$AB = BC = CD = a$ و $AD = b$. فاصله بین وسط قطرها، $2r$ است، در نتیجه

$\frac{b-a}{2} = 2r$. ارتفاع BM را، از نقطه B ، بر AD رسم می‌کنیم و به دست می‌آوریم:

$$AM = \frac{b-a}{2} = 2r, \quad BM = 2r$$

در نتیجه، $a = AB = 2r\sqrt{2}$ و $b = 4r + 2r\sqrt{2}$.

جواب: $4r^2(\sqrt{2}+1)$.

۱۱.۳.۷. مسأله‌های ترکیبی

۸۳۷. داریم: $\hat{PRQ} = 180^\circ - (72^\circ + 54^\circ) = 54^\circ$.

در نتیجه کمانهای دایره و از روی آنها زاویه‌های چهارضلعی قابل محاسبه است.

۸۳۸. الف. $r = 14$ زیرا:

$$BR = BQ = 27 \Rightarrow SC = RC = 38 - 27 = 11$$

$$\Rightarrow r = DS = 25 - 11 = 14$$

ب. $x = 21$ زیرا:

$$r = DS = 10, \quad SC = CR = 11 \Rightarrow x = DS + SC = 10 + 11 = 21$$

۴.۷. دایره و چهارضلعی کوژ (محدب) یا کاو (مقعر)

۲.۴.۷. نقطه و دایره

۸۳۹. مرکزهای این دایره‌ها، محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی چهارضلعی داده شده

می باشند و بنابراین در چهارضلعی به دست آمده زاویه های روبه رو مکمل می باشند. در نتیجه این چهارضلعی محاطی است.

۸۴۰. اگر وسطهای ضلعهای چهارضلعی ABCD را M، N، P و Q بنامیم. چهارضلعی MN PQ مستطیل است.

۳.۴.۷. پاره خط

۱.۳.۴.۷. اندازه پاره خط

۸۴۱. از شرطهای مسأله نتیجه می شود که نیمسازهای زاویه های C و D، روی ضلع AB متقاطعند. این نقطه برخورد را با O نشان می دهیم. دایره ای بر مثلث DOC محیط کنید. فرض کنید K دومین نقطه برخورد این دایره با AB باشد. داریم:

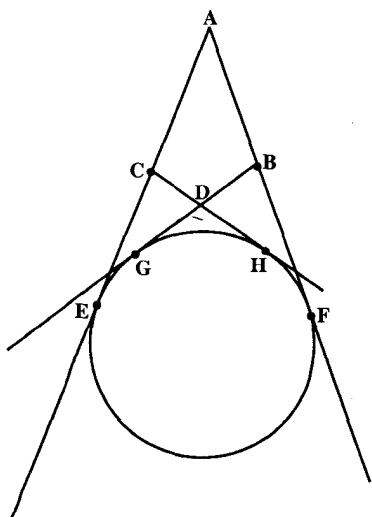
$$\hat{DKA} = \hat{DCO} = \frac{1}{2} \hat{DCB} = \frac{1}{2} (18^\circ - \hat{DAK}) = \frac{1}{2} (\hat{DKA} + \hat{ADK})$$

بنابراین، $\hat{DKA} = \hat{ADK}$ و $AD = AK$. به همین ترتیب، $BC = BK$ ؛ در نتیجه،
 $AD + CB = AB$.

جواب: $a - b$.

۲.۳.۴.۷. رابطه بین پاره خطها

۸۴۲. چهارضلعی ABCD را که امتداد ضلعهای AC، AB، BD و CD از آن بترتیب در نقطه های E، F، G و H بر یک دایره مماسند در نظر می گیریم. می خواهیم ثابت کنیم،
 $AC - DB = AD - BC$ با توجه به برابری مماسهای رسم شده از یک نقطه بر یک دایره و با فرض $AE = AF = a$ و $BG = BH = b$ و $CE = CH = c$ و $DF = DG = d$ داریم:



$$AC = a - c, DB = d - b \Rightarrow AC - DB = a + b - c - d$$

$$AD = a - d, CB = c - b \Rightarrow AD - CB = a + b - c - d$$

$$\Rightarrow AC - DB = AD - CB$$

نکته. در چهارضلعی کاو محیط بر یک دایره (شکل) داریم: $AC + CB = AD + DB$.

۸۴۳. از P و Q دو عمود بر BD رسم می کنیم و پای عمودها را H و H' می نامیم. می توان

$$PQ \geq HH' = OH + OH' = \frac{1}{4}OD + \frac{1}{4}OB \quad (1) \quad \text{گفت:}$$

به طریق مشابه می توان ثابت کرد که

$$PQ \geq \frac{1}{4}OA + \frac{1}{4}OC \quad (2)$$

طرفین رابطه های (۱) و (۲) را باهم جمع می کنیم.

$$2PQ \geq \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD)$$

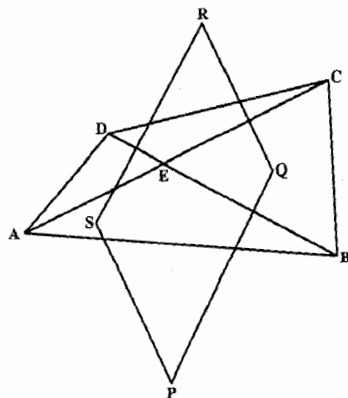
ولی در مثلثهای OAB و OCD می دانیم که $OA + OB \geq AB$ و $OC + OD \geq CD$ بنا براین،

$$2PQ \geq \frac{1}{4}(AB + CD) \Rightarrow PQ \geq \frac{1}{8}(AB + CD)$$

۴.۴.۷. ثابت کنید چهارضلعی محیطی است

۸۴۴. اگر قطر AC عمود منصف قطر BD از چهارضلعی ABCD باشد، $AB = AD$ و $CD = CB$ است. از آن جا $AB + CD = AD + BC$ ، و در نتیجه چهارضلعی محیطی است.

۵.۴.۷. شکلهای ایجاد شده



۸۴۵. الف. مرکز دایره محیطی مثلث نقطه برخورد

عمود منصفهای ضلعهای آن است. بنا براین،

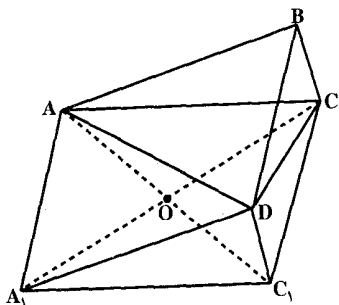
P, Q, R, S بترتیب روی عمود منصفهای

پاره خطهای AE, BE, CE, DE واقعند.

چون هر دو خط عمود بر یک خط باهم

موازی اند، PQRS متوازی الاضلاع

است.



۸۴۶. فرض مسأله ایجاب می کند که ABCD چهارضلعی محدب باشد. متوازی الاضلاع ACC_1A_1 (شکل) را، که در آن ضلعهای AA_1 و CC_1 با یکدیگر برابر و با قطر BD موازی اند، در نظر بگیرید. مثلثهای ADA_1 ، CDC_1 و C_1DA_1 ، بترتیب، با مثلثهای ABD، BCD و ABC قابل انطباقند.

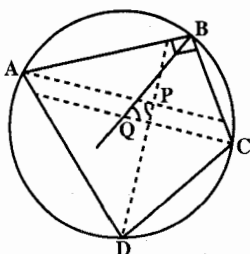
در نتیجه، پاره خطهایی که D را به رأسهای A، C، C_1 و A_1 وصل می کند، متوازی الاضلاع را به چهار مثلث تقسیم می کنند که در آنها شعاع دایره های محاطی باهم برابرند. اگر نقطه برخورد قطرهای متوازی الاضلاع ACC_1A_1 باشد، آن وقت D باید بر O منطبق باشد (برای مثال، اگر D در درون مثلث COC_1 باشد، آن وقت شعاع دایره محاطی مثلث ADA_1 از شعاع دایره محاطی مثلث AOA_1 بزرگتر است، و همین طور در مثلث CDC_1). بنابراین، ABCD متوازی الاضلاع است، اما بعلاوه می دانیم که ACC_1A_1 لوزی است، یعنی، ABCD، مستطیل است.

۸۴۷. فرض می کنیم، قطرهای چهارضلعی ABCD، که در نقطه O به هم رسیده اند، برهم عمود نباشند و برای مثال، AOB زاویه ای حاده باشد. نقطه های A' و B' ، قرینه نقطه های A و B نسبت به O را پیدا می کنیم. شعاعهای دایره های محاط در مثلثهای $A'OB$ و $B'OC$ ، از شعاع دایره محاط در مثلث AOB کوچکترند (مساحت همه این مثلثها، یکی است، ولی محیط مثلث AOB کمتر است)؛ بنابراین، مماسهایی که از نقطه های A و B بر دایره های به شعاع r، محاط در زاویه های BOC و AOD رسم شوند، نیمخطهای راست OA' و OB' را در نقطه های C و D قطع می کنند که، بترتیب، دورتر از نقطه های A' و B' نسبت به O قرار دارند، به نحوی که پاره خط راست CD، نمی تواند بر دایره به شعاع r محاط در مثلث $OA'B'$ مماس شود. به این ترتیب، خطهای راست AC و BD برهم عمودند و، با توجه به برابری شعاعهای دایره های محاطی، این قطرها، محورهای تقارن چهارضلعی ABCD را تشکیل می دهند و این به معنای آن است که چهارضلعی ABCD، یک لوزی است.

۸۴۸. فرض کنید که نیمسازهای داخلی زاویه های A و D از چهارضلعی ABCD یکدیگر را در P و نیمسازهای زاویه های B و C یکدیگر را در Q قطع کنند. داریم:

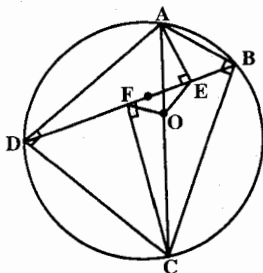
$$\hat{APD} = 180^\circ - \frac{1}{3}(\hat{A} + \hat{D}) \quad , \quad \hat{BQC} = 180^\circ - \frac{1}{3}(\hat{B} + \hat{C})$$

پس،
 $\hat{APD} + \hat{BQC} = 36^\circ - \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) = 36^\circ - 18^\circ = 18^\circ$
 به عنوان تمرین، گزاره مشابهی را برای نیمسازهای خارجی بیان و آن را ثابت کنید.

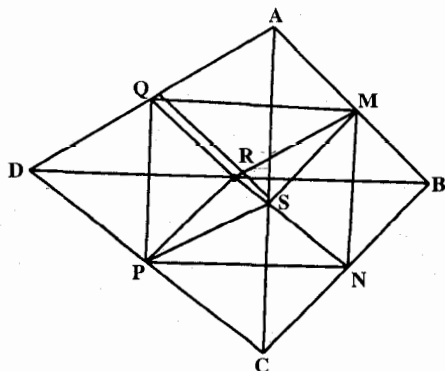


۶.۴.۷. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۵۲. اگر O مرکز دایره محیطی چهارضلعی ABCD باشد، برای $OE = OF$ یا $BF = DE$ را ثابت کنید.



۷.۶.۷. مسأله‌های ترکیبی



۸۵۳. چهارضلعی ABCD را در نظر بگیرید. وسط ضلعهای AB، BC، CD و DA از این چهارضلعی را P، Q، R و S بنامید. اگر وسط قطر AC و BD در نقطه S باشد. ثابت کنید، دایره‌های محیطی چهار مثلث SMQ، RPQ، RMN و SNP از یک نقطه می‌گذرند.

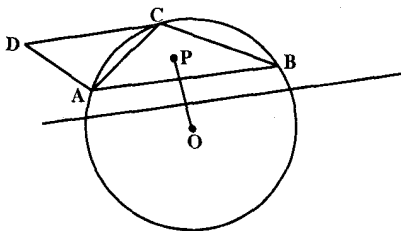
۵.۷. دایره و چهار ضلعیهای ویژه

۵.۷.۱. دایره و متوازی الاضلاع

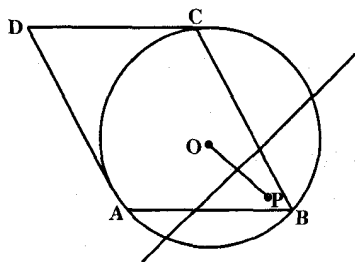
۵.۷.۱.۲. شعاع

۸۵۴. M_1 را طوری بگیرید که $BCMM_1$ متوازی الاضلاع باشد؛ M_1 روی دایره ای قرار دارد که از نقطه های A و M ، B می گذرد. چون $AM_1 = DM$ ($ADMM_1$ هم، متوازی الاضلاع است)، مثلثهای CDM و BAM_1 قابل انطباقند، یعنی، شعاع دایره محیطی مثلث CDM برابر با R است. شعاع دایره محیطی مثلث ADM هم، برابر با R است.

۸۵۵. راه اول. نقطه P را داخل یا روی محیط مثلث ABC در نظر می گیریم. هر خط راستی از صفحه مثلث که از نقطه P بگذرد، صفحه را به دو نیم صفحه تقسیم می کند، یکی از این دو نیم صفحه شامل P است و دیگری شامل P نیست. نیم صفحه شامل P دست کم یکی از رأسهای مثلث ABC را دربر می گیرد. برای حالتی که نقطه P بر نقطه O منطبق است، مسأله روشن است. فرض می کنیم $P \neq O$ باشد. عمود منصف پاره خط PO را

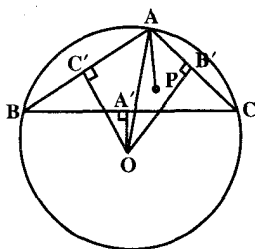


رسم می کنیم. هر نقطه ای که در نیم صفحه شامل P باشد به P نزدیکتر است تا به O و روشن است که این حکم در مورد رأسی از مثلث که در این نیم صفحه واقع است، نیز صادق است.



راه دوم. چون متوازی الاضلاع نسبت به مرکز خود متقارن است لذا می توانیم نقطه P را در داخل یا روی محیط مثلث ABC در نظر بگیریم. در واقع اگر نقطه P در داخل مثلث ADC باشد، به علت تساوی دو مثلث ADC و ABC می توانیم دایره ای با همان شعاع

R را بر مثلث ADC محیط کنیم. با تعویض نقطه های B و D در مسأله تغییری حاصل نمی شود. به این ترتیب مسأله به این صورت درمی آید: فاصله هر نقطه P واقع در داخل



یا روی محیط یک مثلث از نزدیکترین رأس، نمی تواند
بزرگتر از شعاع دایره محیطی مثلث باشد. اثبات بر اساس
پیش قضیه زیر قرار دارد:

اگر P نقطه ای واقع در داخل یا روی محیط یک مثلث
قائم الزاویه باشد، آن گاه فاصله هر نقطه P از هر انتهایی
وتر، از طول وتر تجاوز نمی کند. درستی این قضیه

برای حالتی که P روی وتر باشد واضح است و برای حالتی که P داخل مثلث باشد،
زاویه $\hat{APB}$ بزرگترین زاویه در مثلث ABP خواهد بود. لذا ضلع AB از هر کدام از دو
ضلع AP و PB بزرگتر می شود. حال قضیه را می توان ثابت نمود. مرکز دایره محیطی
مثلث ABC را O گرفته تصویرهای این نقطه روی ضلعهای مثلث ABC را A' ، B' ،
و C' می نامیم. وقتی نقطه P داخل یا روی محیط مثلث ABC باشد قطعاً داخل یا روی
محیط یکی از مثلثهای AOB' ، BOC' ، COA' و یا $C'OA'$ قرار دارد.
برای مثال فرض می کنیم P داخل یا روی مثلث AOB' باشد. با توجه به پیش قضیه بالا
داریم: $AP \leq AO = R$.

۷.۵.۱.۳. قطر

۸۵۶. نقطه B' محل برخورد ارتفاعهای مثلث ACD است.

۷.۵.۱.۴. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۸۵۷. با رسم چند حالت از متوازی الاضلاع با توجه به داده های مسأله، نقطه ثابت را مشخص
و سپس حکم مسأله را ثابت کنید.

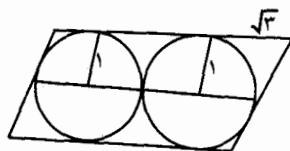
۷.۵.۱.۵. شکل های ایجاد شده

۸۵۸. چون چهارضلعی متوازی الاضلاع و محیطی است، پس:

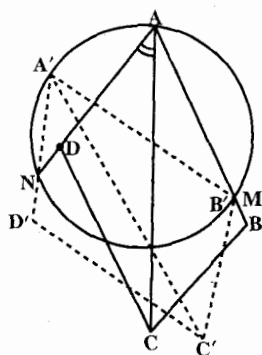
$$\angle AB = \angle BC \Rightarrow AB = BC$$

بنابراین متوازی الاضلاع لوزی است.

۷. ۵. ۱. ۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



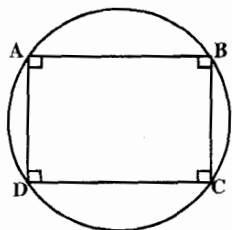
$$۸۵۹. \frac{4}{3}(2\sqrt{3} + 3)$$



۸۶۰. زاویه DAB ثابت است، پس رأس A از متوازی الاضلاع روی کمان درخور زاویه A مقابل به وتر MAN قرار دارد. دایره محیطی چهارضلعی MANO را رسم می‌کنیم. زاویه NAO یا D'A'C' مقدار ثابتی دارد. ضلع A'D' از این زاویه از نقطه ثابت N می‌گذرد، پس ضلع دیگر آن یعنی A'C' نیز از نقطه ثابتی مانند O می‌گذرد.
نکته. این مسأله ساده هندسی در استاتیک اهمیت زیادی دارد.

۷. ۵. ۲. دایره و مستطیل

۷. ۵. ۲. ۲. نقطه و دایره



۸۶۱. گزینه (د) درست است.
۸۶۲. مستطیل چهارضلعی محاطی است. زیرا مجموع هر دو زاویه روبه روی آن ۱۸۰ درجه است.

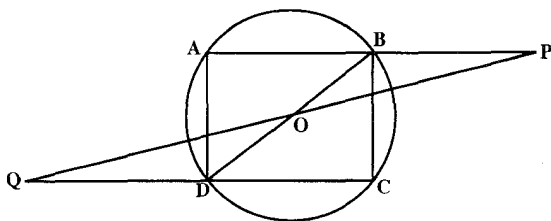
۷. ۵. ۲. ۳. پاره خط

۸۶۳. چهارضلعی DIAN متوازی الاضلاع است، پس $\hat{N} = \hat{I}$ (۱).
از طرفی $\hat{M} = \hat{N} = \frac{\widehat{AD}}{2}$ (۲). از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{I} = \hat{M}$ و در نتیجه $DI = DM$ است.

۷. ۵. ۲. ۴. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۷. ۵. ۲. ۴. ۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۸۶۴. ثابت کنید که اگر ضلع AB از نقطه ثابت P بگذرد، ضلع مقابل به آن یعنی CD از نقطه ثابت Q فرینه نقطه P نسبت به نقطه O مرکز دایره محیطی مستطیل می‌گذرد.



۷. ۵. ۲. ۵. شکل‌های ایجاد شده

۸۶۵. چون $\widehat{F\hat{E}_1E} = \widehat{F\hat{C}E} = 90^\circ$ ، چهار ضلعی محاطی است و

$\widehat{F\hat{C}E}_1 = \widehat{F\hat{E}_1E} = 60^\circ$. به همین ترتیب، چهار ضلعی محاطی است و

یعنی، $\widehat{E_1\hat{D}F} = \widehat{E_1\hat{A}F} = 60^\circ$ ، مثلث متساوی الاضلاع است. به روش مشابه،

ثابت می‌کنیم، مثلث متساوی الاضلاع است.

۸۶۶. مستطیل ABCD محیط بر دایره (O) را در نظر می‌گیریم. با توجه به این که

$AB + CD = BC + AD$ و $AB = CD$ و $BC = AD$ است، پس $2AB = 2BC$ و

از آن جا $AB = BC$ و ABCD مربع است.

۸۶۷. AC و BC قطرهای دایره‌اند، پس $A'B'D'C'$ متوازی الاضلاع محیط بر دایره است.

بنابراین لوزی است.

۸۶۸. ABCD را مستطیل داده شده و LN را، مماس مشترک دایره‌های ۱ و ۳ (به مرکز

نقطه‌های A و C) می‌گیریم. از نقطه O، مرکز مستطیل، عمود OM را بر خط راست

LN رسم می‌کنیم. چهار ضلعی ALNC یک دوزنقه، و OM پاره خط راستی است که

وسط دو ساق آن را به هم وصل کرده است، به نحوی که

$$OM = \frac{1}{2}(r_1 + r_3)$$

فاصله نقطه O تا مماس مشترک دوم همین دو دایره، باز هم برابر $\frac{1}{2}(r_1 + r_3)$ می‌شود.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که، فاصله O، تا هریک از مماس مشترک‌های دو دایره

دیگر، برابر است با $\frac{1}{4}(r_2 + r_4)$. چون بنا به فرض، باید داشته باشیم:

$$r_1 + r_3 = r_2 + r_4$$

بنابراین نقطه O از هر چهار مماس مشترک به یک فاصله است، یعنی مرکز دایره محاطی چهارضلعی است که به وسیله این مماسها تشکیل می شود.

۳.۵.۷. دایره و مربع

۱.۳.۵.۷. تعریف و قضیه

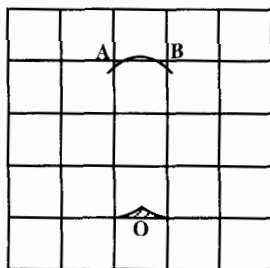
۸۶۹. چون مجموع زاویه های روبه رو در هر مربع 180° است، پس هر مربع همواره محاطی است و چون مجموع ضلعهای روبه رو با هم برابرند، پس هر مربع همواره محیط بر یک دایره است. شعاع دایره محاطی مربع به ضلع a، برابر $\frac{a}{4}$ و شعاع دایره محیطی آن $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ است.

۲.۳.۵.۷. نقطه و دایره

۸۷۰. پاسخ: ۸۰۰ یا ۷۹۹.

خطهای راست شبکه را افقی و قائم می نامیم. دایره به قطر 200 ، وقتی که از گره های شبکه عبور نکند و بر خطهای راست شبکه مماس نباشد، 200 خط راست افقی و 200 خط راست قائم را قطع می کند و، در ضمن هر کدام از آنها را دوبار. بنابراین، حداکثر تعداد نقطه های برخورد برابر است با 800 . این 800 نقطه، محیط دایره را به 800 بخش تقسیم می کنند. هریک از این بخشها در درون یکی از خانه ها قرار دارد. بنابراین، حداکثر ممکن برای تعداد خانه ها، 800 است. با وجود این، ممکن است، دو

بخش از این بخشها متعلق به یک خانه باشند، یعنی محیط دایره خانه ای را دوبار قطع کند. ثابت می کنیم، از این گونه خانه های «خاص» بیش از یکی نمی تواند وجود داشته باشد. ببینیم، وقتی محیط دایره ضلع AB از خانه ای را دوبار قطع می کند، نقطه O، مرکز دایره، در کجا می تواند قرار گیرد؟

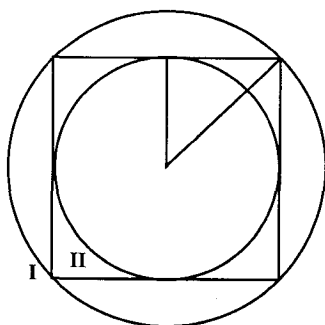


فاصله مرکز O از دایره به قطر ۲۰۰، تا هریک از نقطه‌های A و B، از ۱۰۰ بیشتر، ولی فاصله آن از خط راست AB از ۱۰۰ کمتر است؛ بنابراین، نقطه O، در بیرون دایره‌های به شعاع ۱۰۰ و به مرکزهای A و B، بین خطهای قائم شبکه که از A و B می‌گذرند و در درون نوار به عرض ۲۰۰ با محور افقی AB واقع است. همه این نقطه‌ها، درون دو مثلث منحنی الخط را پر می‌کنند (یکی از این مثلثها را، روی شکل، هاشور زده‌ایم). روشن است که، برای پاره خطهای راست متفاوت AB، چنین مجموعه‌هایی، دارای نقطه‌های مشترک نیستند و، بنابراین، بیش از یک خانه «خاص» نمی‌تواند وجود داشته باشد.

۷.۵.۳. زاویه

۸۷۱. چون $\widehat{AC} = 90^\circ$ و F وسط این کمان است، پس $\widehat{FC} = 45^\circ$ و از آنجا $\widehat{FBC} = y = 22^\circ 30'$ و $\widehat{PB} = 90^\circ$ کمان BPE زاویه ای ظلّی است، پس
$$x = \frac{\widehat{PB}}{2} = 45^\circ$$

۷.۵.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۸۷۲. (ب) نسبت شعاع دایره محیطی به شعاع دایره محاطی مربع برابر است با نسبت قطر مربع به ضلع آن، یعنی $\sqrt{2}$. نسبت مساحت‌های دایره‌ها برابر است با مجذور نسبت شعاع‌های آنها یعنی برابر است با $(\sqrt{2})^2 = 2$.

۸۷۳. شکلهای F_1 و F_2 را که شکل مفروض F (اجتماع دایره‌ها) با انتقال به اندازه بردارهای به طول ۰/۰۰۱ و با زاویه ۶۰ درجه بین آنها، به دست آمده‌اند، در نظر می‌گیریم. سه شکل F، F_1 و F_2 ، یکدیگر را نمی‌پوشانند و در درون مربع به ضلع ۱/۰۰۱ قرار دارند. بنابراین، مساحت S هریک از آنها، کمتر است از $\frac{1}{3}(1/001)^3 < 0/34$. به همین ترتیب، برای مسأله فضایی مشابه این مسأله، می‌توان ارزیابی

$\frac{1}{4} < 0.26 < \frac{1}{4}(1/0.1)^2$ را به دست آورد. در روی صفحه، می توان ارزیابی را دقیق تر کرد و، برای مثال، ثابت کرد که $S < 0.287$.

۷.۵.۳.۵. مسأله های ترکیبی

۸۷۴. ۱. از N به A و F، و از C به N و B وصل می کنیم ANF و NCB خط راست می باشند، زیرا:

$$\widehat{ANM} = 45^\circ, \widehat{MNF} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{ANF} = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ \quad \text{و}$$

$$\widehat{ANB} = \widehat{ANM} + \widehat{MNB} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$$

$\widehat{ANC} = 90^\circ$ بنابراین خطهای AF و BC در نقطه N یکدیگر را قطع می کنند اما نقطه برخورد این دو را N' نامیده بودیم. پس N' بر N منطبق است و نقطه N روی دایره به قطر AB واقع است.

۲. چون $\widehat{ANM} = \widehat{MNB} = 45^\circ$ است، پس MN همواره نیمساز زاویه ANB می باشد. حال اگر نقطه برخورد MN با این نیمدایره را S بنامیم، نقطه S وسط نیمدایره AB است که نقطه ثابتی

می باشد. پس MN همیشه از نقطه ثابت S وسط نیمدایره به قطر AB می گذرد.

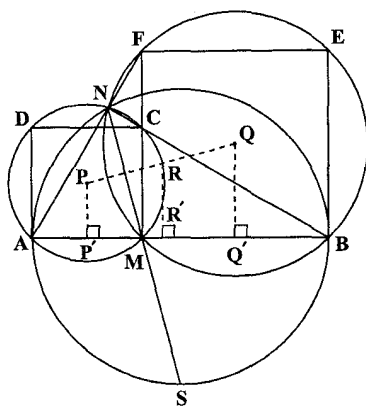
۳. از نقطه R وسط PQ و همچنین از نقطه های P و Q عمودهای RR' و PP' و QQ' را بر AB فرود می آوریم. در دوزنقّه PP'QQ' داریم:

$$RR' = \frac{1}{4}(PP' + QQ') = \frac{1}{4}\left(\frac{AM + MB}{2}\right) = \frac{AB}{4}$$

فاصله ثابتی قرار دارد. بنابراین مکان هندسی نقطه R وسط PQ پاره خطی موازی AB

و به فاصله $\frac{AB}{4}$ از آن و به طول $\frac{AB}{4}$ می باشد که عمود منصف پاره خط AB آن را

نصف می کند.



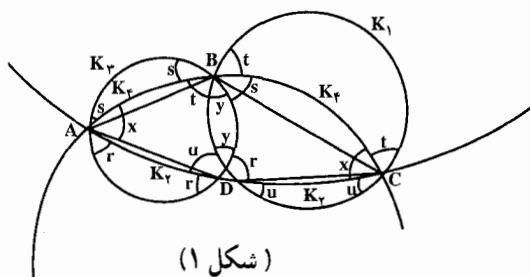
۷.۵.۴. دایره و لوزی

۷.۵.۴.۱. تعریف و قضیه

۸۷۵. اگر از نقطه O محل تلاقی قطرهای لوزی عمودهای OE ، OF ، OG و OH را بر ضلعهای لوزی فرود آوریم، داریم: $OE = OF = OG = OH$.

۷.۵.۴.۲. زاویه

۸۷۶. حکم این قضیه، نه تنها برای لوزی، بلکه برای هر چهارضلعی $ABCD$ درست است. (در شکل (۱) $ABCD$ یک چهارضلعی محدب و شکل، یک چهارضلعی مقعر است:



(شکل ۱)

اثباتی که در این جا آورده ایم، برای هر دو شکل درست است). می دانیم: زاویه بین دو منحنی متقاطع، بنابر تعریف، عبارت است از زاویه بین مماسهای بر دو منحنی در نقطه برخورد آنها. بنابراین، قضیه ما این است:

ثابت کنید، زاویه بین دو دایره K_2 و K_3 در نقطه B ، برابر است با زاویه بین دو دایره K_4 و K_1 در نقطه A .

ابتدا، به این نکته توجه می کنیم که، زاویه، بین دو دایره، در یکی از نقطه های برخورد آنها، برابر است با زاویه بین دو دایره، در نقطه برخورد دوم، زیرا اگر خط راستی را در نظر بگیریم که از مرکز دو دایره متقاطع می گذرد، تمامی شکل نسبت به این خط راست، متقارن است و می دانیم، دو زاویه متقارن نسبت به یک خط راست، با هم برابرند. بنابراین، زاویه هایی که در شکل (۱) و یا در شکل (۲)، با یک حرف نشانه گذاری شده اند، با هم برابرند. داریم:

$$\text{در رأس } A: r + x + s = 180^\circ$$

$$\text{در رأس } B: s + y + t = 180^\circ$$

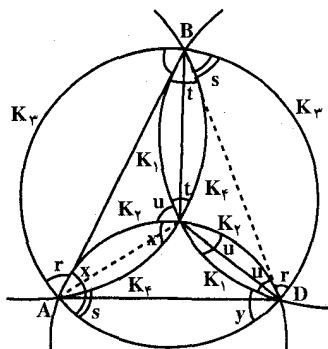
در رأس C : $t + x + u = 18^\circ$:

در رأس D : $u + y + r = 18^\circ$:

و بنابراین :

$$(r + x + s) - (s + y + t) + (t + x + u) - (u + y + r) = 0$$

که از آن جا، به دست می آید : $x = y$.



(شکل ۲)

۷.۵.۵. دایره و دوزنقه

۷.۵.۵.۱. تعریف و قضیه

۸۷۷. اگر دوزنقه ABCD متساوی الساقین باشد، $\hat{A} = \hat{B}$ و $\hat{C} = \hat{D}$ است. پس، با توجه به

این که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$ است ؛ $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ و در نتیجه محاطی است.

بعکس، اگر دوزنقه ABCD محاطی باشد، به دلیل موازی بودن AB و CD، $\widehat{AD} = \widehat{BC}$

و در نتیجه $\hat{A} = \hat{B}$ یعنی دوزنقه متساوی الساقین است.

۷.۵.۵.۲. شعاع

۸۷۸. ۵ و ۷

$$۸۷۹. \frac{1}{2} \sqrt{\frac{S}{2}}$$

۷.۵.۵.۳. زاویه

۸۸۰. دو کمان $\widehat{AD}$ و $\widehat{BC}$ برابرند.

۷. ۵. ۴. پاره خط

۸۸۱. از O مرکز دایره عمودی بر دو قاعده فرود آورید و از O به A نیز وصل کنید.

۷. ۵. ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۸۸۲. این مساحت برابر $\frac{1}{4}ED \cdot EA$ است.

۸۸۳. دوزنقه ABCD محیط بر دایره به مرکز O را در نظر می‌گیریم. خط MN میانه دوزنقه،

از نقطه O مرکز دایره محاطی آن می‌گذرد. در مثلث قائم الزاویه OAD، میانه OM

نصف وتر AD است. پس $AD = 2OM$ ، $OM = \frac{MN}{2} = \frac{m}{2}$ ، پس $AD = m$ ،

در نتیجه $BC = m$ ، از طرفی $AB + CD = \frac{AB + CD}{2} = MN$ ، در نتیجه $AB + CD = 2m$

است و اندازه محیط دوزنقه برابر $4m$ می‌باشد.

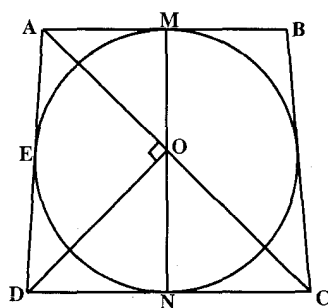
۷. ۵. ۶. مسأله‌های ترکیبی

۸۸۴. ۱. ثابت کنید: $\hat{AOD} = \hat{AED}$.

۲. زاویه $\hat{AOC}$ مکمل زاویه $\hat{F}$ است.

۸۸۵. نقطه I روی دایره محیطی مثلث AOB قرار دارد.

۸۸۶. ۱. اگر از O به نقطه‌های C و D وصل کنیم، مثلث OCD متساوی الساقین است.



در نتیجه ارتفاع ON نیمساز و میانه نیز هست

یعنی N وسط CD است. همچنین در مثلث

OAB نقطه M وسط قاعده AB است. حال اگر

M را به O و O را به N وصل کنیم چون OM و

ON بر دو خط موازی عمودند پس نقطه‌های M

و O بر یک استقامتند.

۲. چون AO نیمساز زاویه DAB و OD نیمساز

زاویه ADC است و $\hat{ADC} + \hat{BAD} = 180^\circ$ می‌باشد. پس $\hat{AOD} = 90^\circ$ می‌شود.

۳. در صورتی که E نقطه تماس ساق با دایره محاطی دوزنقه باشد، داریم $DE = DN$

و $AE = AM$ یا $AE + ED = AM + DN = AD$.

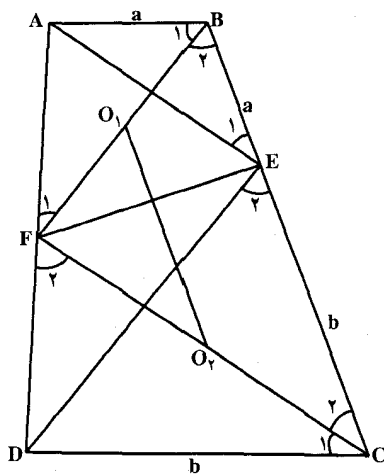
۸۸۷. الف. در مثلث متساوی الساقین ABE، $\hat{E}_1 = \frac{180^\circ - \hat{B}}{2}$ و در مثلث متساوی الساقین

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = \frac{36^\circ - (\hat{B} + \hat{C})}{2} = \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ \text{ : پس } \hat{E}_2 = \frac{18^\circ - \hat{C}}{2} \text{ نیز داریم CDE}$$

بنابراین $\hat{AED} = 9^\circ$ یعنی مثلث AED قائم الزاویه است. برای اثبات قائم الزاویه بودن مثلث BFC ثابت می‌کنیم که $\hat{F}_2 + \hat{F}_1 = 9^\circ$ است. اما $\hat{F}_1 + \hat{B}_1 = 9^\circ$ و $\hat{F}_2 + \hat{C}_1 = 9^\circ$ پس کافی است ثابت کنیم که $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 9^\circ$. چون $\hat{B} + \hat{C} = 18^\circ$ است لذا $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 9^\circ$ و حکم ثابت است.

ب. دو مثلث ABF و BFE با هم مساوی‌اند. چون $EF = AF$ و $AB = BE$ و $\angle B$ مشترک، پس $\angle FEB = 9^\circ$ ، یعنی چهارضلعی ABEF محاطی است و مرکز آن O_1

وسط پاره خط BF است. به همین دلیل نقطه O_2 وسط FC مرکز دایره محیطی چهارضلعی FECD است. بنابراین: $O_1O_2 = \frac{BC}{2} = \frac{a+b}{2}$



راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۸. دایره و n ضلعی ($n \geq 5$)

۸.۲. شعاع

۸۸۸. حکم مسأله را می‌توان به روش استقرا ثابت کرد. مرحله شروع برهان، $n = 4$ ، قبلاً بررسی شده است.

با این حال، راه دیگری برای حل، مبتنی بر تساوی زیر، پیشنهاد می‌کنیم. در مثلث ABC، فرض می‌کنیم که زاویه A بزرگترین زاویه باشد و r و R ، به ترتیب، شعاع دایره محاطی و محیطی و d_a ، d_b و d_c فاصله‌های مرکز دایره محیطی تا ضلعهای متناظر از مثلث باشند. در این صورت به ازای مثلث حاده

$$r + R = d_a + d_b + d_c \quad (1)$$

و به ازای مثلث منفرجه

$$r + R = -d_a + d_b + d_c \quad (2)$$

(در مثلث قائم‌الزاویه، $d_a = 0$ و در این مثلث هر دو رابطه بالا درست است.)
برهان. فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد؛ A ، B ، C ، به ترتیب، وسط ضلعهای BC و CA و AB باشند؛ و O مرکز دایره محیطی باشد. بنابر قضیه بطلمیوس، در چهارضلعی AB.OC داریم: $\frac{a}{4}R = \frac{a}{4}R = \frac{b}{4}d_c + \frac{c}{4}d_b$. با نوشتن دو رابطه مشابه در چهارضلعیهای BC.OA و CB.OA، و جمع کردن آنها با هم، به دست می‌آوریم:

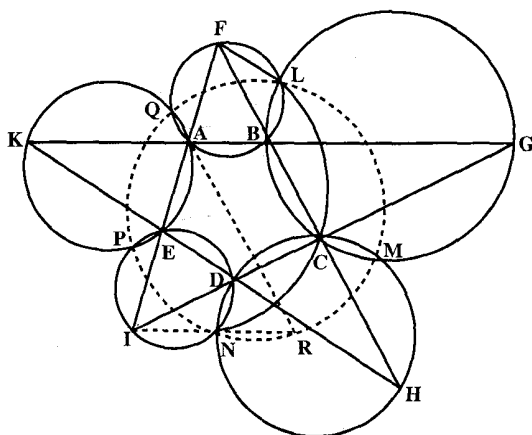
$$\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{4}\right)d_c + \left(\frac{a}{4} + \frac{c}{4}\right)d_b + \left(\frac{b}{4} + \frac{c}{4}\right)d_a = \frac{1}{4}(a+b+c)R = pR$$

که از آن جا $p(d_a + d_b + d_c) - \frac{1}{4}(cd_c + bd_b + ad_a) = pR$ ، پس از حذف کردن p ، به برابری (۱) می‌رسیم.

حالت $\hat{A} > 90^\circ$ ، به روش مشابه بررسی می‌شود. حکم مسأله از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود. برای این منظور، تساویهای متناظر را به ازای همه مثلثهای افزاز می‌نویسیم. توجه کنید که هر قطر، به جای یک ضلع از دو مثلث است. در نتیجه، فاصله تا قطر انتخاب شده، متناظر با این مثلثها، در رابطه‌ها، با علامتهای مخالف ظاهر می‌شود. از این رو، با جمع کردن همه این برابریها (به شرط این که مرکز دایره در درون چند ضلعی قرار گیرد)، به دست می‌آوریم: $\sum r + R = d_1 + d_2 + \dots + d_n$ ، که در آن d_1 ، d_2 ،

... و d_n فاصله‌های مرکز دایره تا ضلعهای چندضلعی هستند. اگر مرکز دایره بیرون چندضلعی قرار گیرد، آن وقت فاصله تا بزرگترین ضلع، با علامت منها گرفته می‌شود. ۸۸۹. ثابت کنید که اگر O_k و O_{k+1} مرکز دایره‌های مماس بر دایره داده شده در نقطه‌های A_k و A_{k+1} باشند؛ B نقطه برخورد آنها واقع بر کمان $A_k A_{k+1}$ باشد؛ r_k و r_{k+1} شعاعهای آنها باشند، آن وقت $r_k + r_{k+1} = r$ (شعاع دایره داده شده و O مرکز آن است). به این ترتیب، برابری، به ازای بقیه شعاعها هم، به دست می‌آید، که این برای n فرد، بدان معنی است که همه آنها برابرند با $\frac{r}{p}$. بعلاوه، $\widehat{A_k B} + \widehat{B A_{k+1}} = \widehat{A_k A_{k+1}}$ (کمانهای کوچکتر دایره‌های متناظر در نظر گرفته شده‌اند).

۸.۳. نقطه و دایره



۸۹۰. پنج ضلعی ABCDE را در نظر گرفته، نقطه‌های برخورد ضلعها را F, G, H, I, K می‌نامیم و دایره‌های محیطی مثلثهای ABF, BCG, CDH, DEI را رسم می‌کنیم و نقطه‌های دیگر برخورد این دایره‌ها را L, M, N, P, Q می‌نامیم.

می‌خواهیم ثابت کنیم این نقطه‌ها روی یک دایره‌اند. در چهارضلعی کامل ABCIFG دایره‌های محیطی مثلثهای ABF و BCG و FCI در نقطه L یکدیگر را قطع کرده‌اند. همچنین دایره‌های محیطی مثلثهای CDH, DEI و FCI از چهارضلعی کامل CDEFIH در نقطه N متقاطعند. پس دایره محیطی مثلث FCI از نقطه‌های L و N می‌گذرد. دایره‌های محیطی مثلثهای ABF و BCG با دایره گذرنده از L, N و Q نقطه مشترک L را دارند و با خط FAI نقطه F را که نقطه برخورد دو دایره اولی است. نتیجه می‌شود که اگر نقطه‌های A و I را به نقطه برخورد این دو خط با دایره سوم وصل کنیم، امتداد

خطهای QA, IN روی همین دایرهٔ سومی متقاطع خواهند بود.
به همین ترتیب، مثلث ARI و نقطه‌های Q, N و E که روی سه ضلع واقعند نشان می‌دهد که دایره‌های محیطی مثلثهای QRN, REI و QEA باید در نقطه متقاطع باشند. از آنجا دایرهٔ QLN از P نقطه برخورد دایره‌های DEI و AEK می‌گذرد. به همین روش ثابت می‌شود که این خط نقطهٔ M را نیز در بر دارد. پس پنج نقطهٔ L, M, N, P و Q روی یک دایره‌اند.

۸.۴. زاویه

۸.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۸۹۱. هریک از کمانهای $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ و $\widehat{EA}$ برابر $72^\circ = 360^\circ \div 5$ است. بنابراین:

$$x = \frac{\widehat{CDE} - \widehat{AB}}{2} = \frac{144^\circ - 72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$y = \frac{\widehat{DEAB} - \widehat{DC}}{2} = \frac{3 \times 72^\circ - 72^\circ}{2} = 72^\circ$$

۸.۴.۲. رابطهٔ بین زاویه‌ها

۸۹۲. هشت ضلعی محدب محاط در یک دایره را در نظر می‌گیریم، با در نظر گرفتن دو برابر هر زاویهٔ محاطی خواهیم داشت:

$$\hat{1} = b + c + d + e + f + g$$

$$\hat{3} = d + e + f + g + h + a$$

$$\hat{5} = f + g + h + a + b + c$$

$$\hat{7} = h + a + b + c + d + e$$

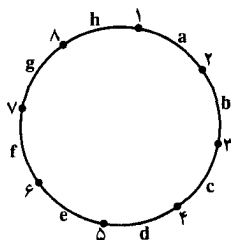
همچنین داریم:

$$\hat{2} = c + d + e + f + g + h$$

$$\hat{4} = a + b + e + f + g + h$$

$$\hat{6} = a + b + c + d + g + h$$

$$\hat{8} = a + b + c + d + e + f$$



$$\hat{1} + \hat{3} + \hat{5} + \hat{7} = \hat{2} + \hat{4} + \hat{6} + \hat{8}$$

در نتیجه :

۸۹۳. با استفاده از قضیه مربوط به زاویه های محاطی، مجموع سه زاویه A_1 ، A_3 و A_5 را می توان به عنوان نصف مقدار زیر در نظر گرفت :

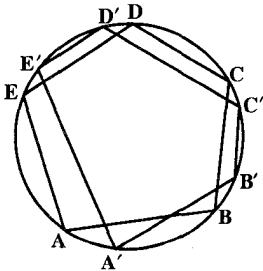
$(36^\circ - \widehat{A_1 A_3 A_5}) + (36^\circ - \widehat{A_3 A_5 A_7}) + (36^\circ - \widehat{A_5 A_7 A_1}) = 72^\circ + \widehat{A_1 A_3 A_5}$
 بنابر شرط مسأله، نقطه O در درون هفت ضلعی است، و بنابراین کمان $\widehat{A_1 A_3 A_5}$ نمی تواند از 18° درجه بیشتر و یا با آن برابر باشد، یعنی

$$\hat{A_1} + \hat{A_3} + \hat{A_5} < 36^\circ + 9^\circ = 45^\circ$$

۵.۸. پاره خط

۵.۸.۱. اندازه پاره خط

۸۹۴. اگر $AB \dots EA$ یک چند ضلعی با تعداد ضلعهای فرد باشد، و همه ضلعها به استثنای AB به موازات خود تغییر جا دهند، تا چند ضلعی $A'B' \dots E'A'$ ایجاد شود. باید ثابت کنید $AB = A'B'$ است. برای این کار ثابت کنید زاویه های محاطی AEB و $A'E'B'$ برابرند.



۵.۸.۲. رابطه بین پاره خطها

۸۹۵. از رأس A، خط AF را موازی MD رسم می کنیم با توجه به شکل داریم :

$$DF = AM = MI$$

زیرا مثلث AMI متساوی الساقین است. در نتیجه زاویه

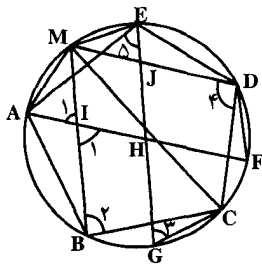
$$MAI \text{ برابر } \frac{\widehat{MEDF}}{2} \text{ یا } \frac{\widehat{AMED}}{2}, \text{ یا یک پنجم محیط}$$

$$\text{دایره است؛ و } \hat{1} = \frac{\widehat{BCF} + \widehat{AM}}{2} \text{ یا یک پنجم محیط}$$

دایره. از آن جا $IM = AM$ به همین ترتیب با کشیدن خط EG موازی MB داریم :

$$BG = ME = MJ \text{ و } CG = AM = DF$$

همچنین شکلهای HIMJ، HIBG و HFDJ متوازی الاضلاعند. از آن می توان نشان



داد که $MB + MD = MA + MC + ME$.

باز می‌گردیم به یافتن رابطه $(HJ + HG) + (HI + HF) = MA + MC + ME$ و با ملاحظه مقادیرهای مساوی HJ و MA ، سپس HI و ME کافی است ثابت کنیم $HG + HF = MC$. مثلث EHF متساوی الساقین است زیرا هر یک از کمانهای $\widehat{AE}$ و $\widehat{GF}$ یک پنجم محیط دایره‌اند. از آن جا $HG + HF = EG$. پس باید $EG = MC$ باشد و این رابطه نیز برقرار است زیرا دو وترند که تحت کمانهای مساوی $EDCG$ و $CBAM$ می‌باشند؛ در نتیجه $HG + HF = MC$.

نکته. قضیه بالا حالت کلی دارد و می‌توان گفت: در یک چندضلعی منتظم با تعداد ضلعهای فرد مجموع فاصله‌های یک نقطه از دایره محیطی از رأسهای ردیف زوج برابر است با مجموع فاصله این نقطه از رأسهای ردیف فرد. به عنوان مثال مطلب را می‌توان برای هفت ضلعی منتظم ثابت کرد.

۸. ۶. خطهای: موازی، عمود برهم، ...

۸. ۶. ۱. خطها موازی‌اند

۸۹۶. ثابت کنید: $\widehat{AC} = \widehat{DF}$.

۸۹۷. فرض می‌کنیم همه ضلعهای دو چند ضلعی دوه‌دو با هم موازی باشند. مگر دو ضلع AB و $A'B'$ ، به عنوان مثال. در این صورتهای زاویه‌های متناظر بین ضلعهای موازی برابر خواهند بود. حال ثابت می‌کنیم که $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$ است. یک هشت ضلعی را در نظر می‌گیریم. مجموع زاویه‌های ردیف زوج (اگر ضلعها را از ۱ تا ۹ شماره‌گذاری کنیم)، برابر مجموع زاویه‌های ردیف فرد و هر یک ۶ قائمه است. اگر M مجموع سه زاویه از ردیف زوج باشد که شناخته شده‌اند، و N مجموع سه زاویه از ردیف فرد، خواهیم داشت:

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \quad \hat{D} = \hat{D}' \quad \hat{E} = \hat{E}' \quad \hat{F} = \hat{F}'$$

$$\hat{A}' = \hat{A} \quad \hat{B}' = \hat{B} \quad \hat{C}' = \hat{C} \quad \hat{D}' = \hat{D} \quad \hat{E}' = \hat{E} \quad \hat{F}' = \hat{F}$$

از آن جا $\hat{A} = \hat{A}'$ و $\hat{B} = \hat{B}'$. پس AB موازی $A'B'$ است.

۸. ۶. ۲. خطها همرسند

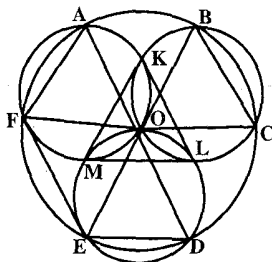
۸۹۸. گزینه (ج) درست است.

۷.۸. شکلهای ایجاد شده

۸۹۹. قرار می‌گذاریم: $\hat{BOC} = 2\alpha$, $\hat{DOE} = 2\beta$ و $\hat{FOA} = 2\gamma$. فرض کنید M , K و L , بترتیب، نقطه‌های برخورد دایره‌های محیطی مثلث BOC و BOF و BOC و DOE و DOE و AOF باشند. نقطه K در درون مثلث AOB قرار دارد، و

$$\hat{BKO} = 18^\circ - \hat{BCO} = 9^\circ + \alpha$$

$$\hat{AKO} = 9^\circ + \gamma$$



چون $\hat{AKB} = 9^\circ + \beta$, $\alpha + \beta + \gamma = 9^\circ$ به همین ترتیب، L در درون مثلث FOE قرار دارد، و $\hat{OLF} = 9^\circ + \gamma$

$$\hat{OLE} = 9^\circ + \beta$$

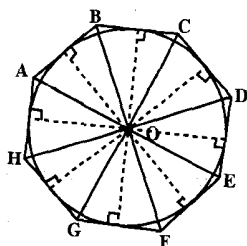
$$\hat{FLE} = 9^\circ + \alpha$$

به این ترتیب، $OL = AK$ و

$$\hat{KOL} = 2\gamma + \hat{KOA} + \hat{LOF} = 2\gamma + \hat{KOA} + \hat{KAO} = 9^\circ + \gamma = \hat{AKO}$$

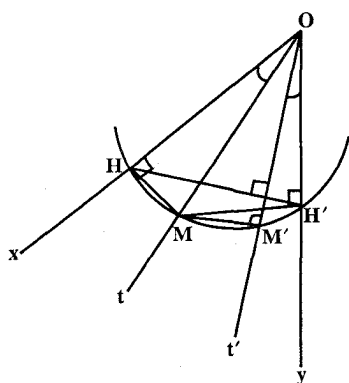
بنابراین، مثلثهای KOL و AKO برهم قابل انطباقند، یعنی، $KL = AO = R$. به روش مشابه ثابت می‌کنیم که طول هر کدام از دو ضلع دیگر مثلث KLM ، برابر است با R .
۹۰۰. کمان درخور زاویه O نظیر پاره خط CD را در نظر بگیرید.

۸.۸. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش



۹۰۳. مرکز دایره محیطی n ضلعی را که به رأسهای آن وصل کنید، n مثلث به دست می‌آید. مجموع مساحت‌های این مثلثها که ارتفاع مشترک را دارند، برابر مساحت چندضلعی است با فرض محیط n ضلعی برابر $2p$ ، رابطه مورد نظر به دست می‌آید.

۹۰۴. تصویر نقطه M روی ضلعهای Ox و Oy را H و H' می نامیم و Ot' خط همزاویه



Ot نسبت به زاویه xOy را رسم می کنیم.

از M عمود MM' را بر ot' فرود می آوریم.

چهارضلعیهای OHMM' و OH'M'M

محااطی اند. پس پنج ضلعی OHMM'H'

محااطی است و چون $\widehat{HOM} = \widehat{H'OM'}$

است. $\widehat{HM} = \widehat{M'H'}$ و در نتیجه

$MM' \parallel HH'$ یعنی چهارضلعی MM'H'H

دو زنقه متساوی الساقین است. از طرفی

$MM' \perp OM'$ می باشد پس خط موازی آن

یعنی HH' نیز بر OM' عمود است.

۹.۸. مسأله های ترکیبی

۹۰۵. a. ABCDE را پنج ضلعی محدب مفروض به ضلع a، و K را وسط قطر بزرگتر آن AD

می گیریم؛ در این صورت $\widehat{AKE} = \widehat{EKD} = 90^\circ$. چون $AC \leq AD$ ، بنابراین

$\widehat{BAC} > \widehat{DAE}$ و در نتیجه $\widehat{BAK} > \widehat{KAE}$. از این جا معلوم می شود که، نقطه های A

و B، در یک طرف خط راست EK قرار دارند. به همین ترتیب ثابت می شود که

نقطه های C و D هم در یک طرف خط EK واقعند. از این جا، بلافاصله، به دست

می آید: $\widehat{BKA} < 90^\circ$ و $\widehat{CKD} < 90^\circ$.

فرض می کنیم $\widehat{BKC} \geq 90^\circ$ ، در این صورت $BK < a$ و $CK < a$ ، و از آن جا که

$AK < a$ و $KD < a$ ، بنابراین $\widehat{AKB} > 60^\circ$ و $\widehat{CKD} > 60^\circ$ (ضلع بزرگتر مثلث،

روبه رو به زاویه بزرگتر آن است)؛ ولی این ممکن نیست، زیرا

$$\widehat{AKB} + \widehat{BKC} + \widehat{CKD} = 180^\circ$$

و در نتیجه $\widehat{BKC} < 90^\circ$. ثابت کردیم که نقطه K، با شرطهای مسأله سازگار است.

b. اگر روی امتداد پاره خط راست EK، نقطه M را خیلی نزدیک به نقطه K انتخاب

کنیم، آن وقت، همه زاویه های $\widehat{AMB}$ ، $\widehat{BMC}$ ، $\widehat{CMD}$ ، $\widehat{DME}$ و $\widehat{EMA}$ حاده می شوند.

بنابراین نقطه M نمی تواند به هیچ کدام از نیمدایره های به قطر ضلعهای پنج ضلعی متعلق باشد.

فهرست منابع جلد دوم

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف - گوتن ماخر - رابوت - توم. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. المپیادهای بین المللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریترز. ترجمه غلامرضا یاسی پور. نشر ناس - نشر نام.
۵. المپیادهای بین المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمه غلامرضا یاسی پور. نشر ناس - نشر نام.
۶. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۷. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمه عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۸. المپیادهای ریاضی بین المللی جلد اول. ساموئل ال گریترز. ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۹. المپیادهای ریاضی بین المللی جلد دوم. مورای کلمکین. ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۱۰. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۱. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمه پرویز شهریاری - ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۲. بازآموزی و بازشناخت هندسه. ه. س. م. کوکس تیر - س. ل. گریترز. ترجمه عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۳. برگزیده مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمه عادل ارشقی. مؤسسه خدمات فرهنگی رسا.
۱۴. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمه غلامحسین صدری افشار.
۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمه غلامحسین صدری افشار.
۱۶. تاریخ هندسه. بی. یر مارشل. ترجمه دکتر حسن صفاری. مؤسسه مطبوعاتی علمی.
۱۷. تئوری مقدماتی اعداد. جلد های اول، دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۱۸. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمه احمد آرام. مؤسسه مطبوعاتی کیهان.
۱۹. چند قضیه هندسه. نگارش دکتر احمد شرف الدین.
۲۰. ۴۵۰ مسأله ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی - حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۱. حل المسائل هندسه جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۲. حل المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی - محمدعلی پرتوی، ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۳. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۲۴. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمه محمدباقر ازگمی - احسان اله قوام زاده، ناشر کتابفروشی زوار تهران.

۲۵. حل مسائل هندسه برای دانش آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کویان.
۲۶. حل مسائل هندسه برای دانش آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۲۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی - غلامرضا بهنیا - باقر امامی - پرویز شهریار. مؤسسه انتشارات امیرکبیر.
۲۸. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۲۹. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده ها. غلامعلی ریاضی - علی حسن زاده - محمدحسین پرتوی - محمد عابدی. مؤسسه مطبوعاتی شرق.
۳۰. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی - پرویز شهریار - غلامرضا بهنیا - باقر امامی - علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسه مطبوعاتی احمدعلی.
۳۱. خلاصه زندگینامه علمی دانشمندان بنیاد دانشنامه بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۲. خلافت ریاضی. جورج پولیا. ترجمه پرویز شهریار. انتشارات فاطمی.
۳۳. خطهای راست و منحنی ها. ن. ب. واسیلیو - و. ل. گوتن ماخر. ترجمه پرویز شهریار، ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۴. دربی فیثاغورس. شه پان النسکی. ترجمه پرویز شهریار. انتشارات امیرکبیر.
۳۵. دوره حل المسائل هندسه برای دبیرستان جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی. دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۶. دوره کامل خودآموز هندسه علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۳۷. دوره مجله ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات.
۳۸. دوره مجله ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۳۹. دوره مجله رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۰. دوره مجله ریاضی یکان.
۴۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسین صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۲. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمه پرویز شهریار. نشر میترا.
۴۳. ریاضی دانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمه دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. سرگرمیهای هندسه. ی. پرلمان. ترجمه پرویز شهریار. انتشارات خوارزمی.
۴۵. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی پور.
۴۶. گوشه هایی از ریاضیات دوره اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل - دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۴۷. مجموعه مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی پور. مؤسسه انتشارات مدیر.
۴۸. مسأله های المپیادهای ریاضی امریکا. موری. اس. کلمکین. ترجمه پرویز شهریار - ابراهیم عادل. نشر بردار.
۴۹. مسأله های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف - به گوروف. ترجمه پرویز شهریار. نشر توسعه.
۵۰. مسأله های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی. ترجمه پرویز شهریار. انتشارات فردوس.

۵۱. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چيستياکوف. ترجمه پرویز شهریارى. نشر نی.
۵۲. مسأله‌های ریاضی آسان ولی... گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمه پرویز شهریارى. نشر گستره.
۵۳. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاخو. ترجمه پرویز شهریارى. انتشارات فردوس.
۵۴. مسائل ریاضیات مقدماتی ای. خ. سیواشینسکی. ترجمه غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمى.
۵۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول، چارلز. ت. سالکیند. ترجمه سیدحسین جوادپور - محمد قزل‌ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمه علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز. ت. سالکیند - جیمز. م. ارل. ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو. گاکلیون - شل. ترجمه عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی.
۵۹. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنکو. ترجمه پرویز شهریارى. مؤسسه انتشارات امیرکبیر.
۶۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمه دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک، ترجمه محمد مهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۲. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۶۳. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی - پرویز شهریارى. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمى.
۶۴. مسأله‌هایی در هندسه مسطحه. ای. ف. شاریگین. ترجمه ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۶۵. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی - چنتسوف - یاگلوم. ترجمه پرویز شهریارى - ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۶۶. نابرابرها. پرویز شهریارى. انتشارات فردوس.
۶۷. نابرابرهای هندسی. نیکولاس د. کازاریتوف. ترجمه دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی.
۶۸. نه مقاله هندسه. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری.
۶۹. هندسه ایرانی. ابوالوفاء محمد بن محمدالبوزجانی. ترجمه سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۷۰. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمه م. ه. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی.
۷۱. هندسه برای سال ششم ریاضی دبیرستانها (مجموعه علوم). محمدباقر ازگمی - باقر امامی - غلامرضا بهنیا - پرویز شهریارى - علی‌اصغر شیخ‌رضایی. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمى.
۷۲. هندسه تحلیلی. حسین غیور - محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.
۷۳. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمه غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۷۴. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریارى. از مجموعه کتابهای سیمرغ.
۷۵. هندسه دوائر. دکتر محسن هشترودى. از انتشارات مجله ریاضی یکان.

۷۶. هندسه دوره کاردانی تربیت معلم رشته علوم ریاضی. صفر با همت شیروانه ده - حسین غبور - حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۷۷. هندسه ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
۷۸. هندسه سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری.
۷۹. هندسه سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۸۰. هندسه مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسه نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلر کورت. ترجمه محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۱. هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمه دکتر امیر خسروی - محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۸۲. هندسه موئیز - لاتز. ترجمه محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۳. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان وزارت آموزش و پرورش.
۸۴. هندسه ۱ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.
85. Exercices de Géométrie Par F.G.M.
86. Exercices de Géométrie Par th. Caronnet.
87. Exercices de Géométrie Moderne. Par G. Papelier
88. Geometrya High School Course. Serge Lange, Gene Murrow.
89. Giant Colour Book of Mathematics by Irving Adler.
90. Guides Pratiques Bordas.
- II. Geometrie Par Robert André.
91. Jacobs Harold. R. Geometry.
92. Les Nombres et Leurs Mystères. Par André Warusfel.
93. Mathematics Around us.
94. Mémento de Mathematiques usuelles Par A. Pont.
95. Plane Geometry. With Space Concepts A. M. Welchons, W. R Krickenberger, Heien. R. Pearson.
96. Précis de Géométrie Par André Vieillefond, P. Turmel.
97. Prentice Hall Geometry. by, Robert Kaline, Mary Kay Corbitt.
98. Principles and Problems of Plane Geometry by Barnett Rich.
99. Resolusion des Problemes élémentaires de Géométrie. Par, E. J. Honnet.
100. The College Boards Examination by. Martin Mc Donough, Alvin J. Hansen.