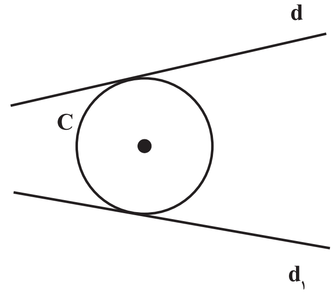
دنبالهٔ دایره‌ها

اشاره

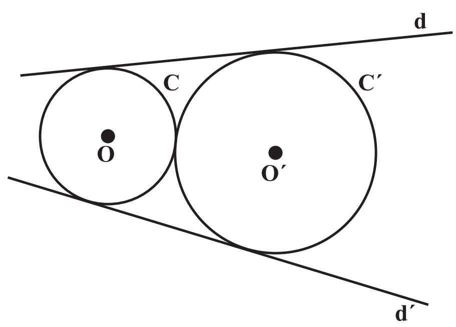
دنباله‌ها یکی از دل‌انگیزترین مباحث ریاضی هســتند، زیرا در فرایند منظم و تکرارپذیر آن‌ها به‌ســوی بی‌نهایت، رازی نهفته اســت که کشــف آن یکی از پرده‌ها را از برابر چشــم ما برمی‌افکند و روزنه‌ای برای سپردن نگاه به فراسوی افق مرئی می‌گشاید.
تاکنون بیشــتر دنباله‌ها را در حوزهٔ اعداد مشــاهده کرده بودیم. اینک بر آنیم که گام‌به‌گام به ضیافت دنباله‌ها در قلمرو دایره‌ها برویم.

۱. دو خط بر دایره‌ای مماس‌اند. دایرهٔ دیگری رسم کنید که بر این دو خط و دایره مماس باشد.



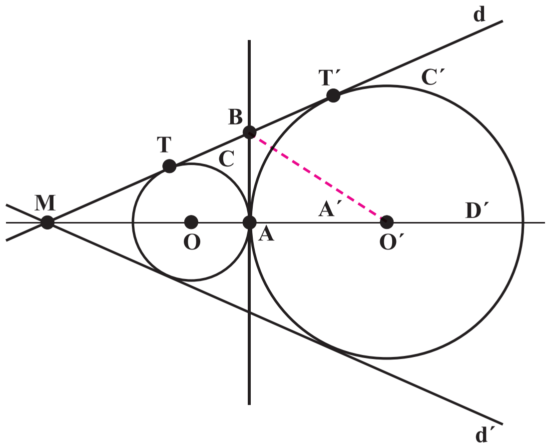
شکل ۱

به قول بچه‌ها، مســئله را حل شده فرض می‌کنیم. جواب مسئله دایرهٔ ′r در شکل ۲ است.



شکل ۲

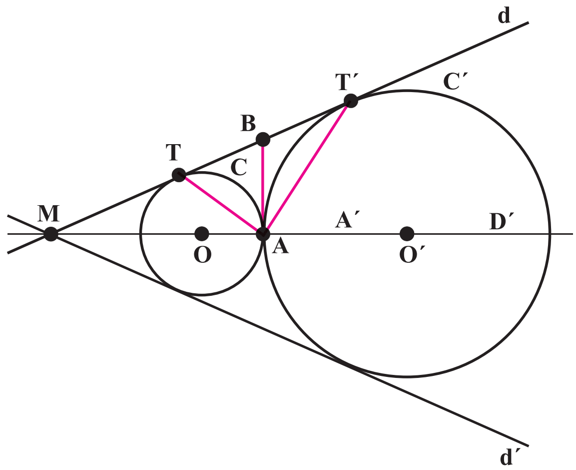
برای فهم بهتر مسئله، مماس مشترک داخلی را هم رسم می‌کنیم (خط گذرنده از AB).
خط‌های d و ′d را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. نیم‌ساز زاویهٔ M از مراکز دایره‌ها می‌گذرد. (چرا؟)



شکل ۳

در شــکل ۳، ′BA=BT=BT اســت. زیرا از نقطهٔ B مماس‌های BA و BT بــر دایرهٔ c رســم شــده‌اند که با هم مســاوی‌اند. به‌دلیل مشابه: ′BA=BT. بنابراین نقطهٔ B روی عمودمنصف ′AT است. لذا عمودمنصف ′AT که نیم‌ساز زاویهٔ ′ABT نیز هست، از مرکز دایرهٔ ′c می‌گذرد. پس برای پیدا کردن مرکز دایره ′c نقطهٔ تقاطع نیم‌سازهای M و B را پیدا می‌کنیم.

۲. در شکل ۴ نشان دهید، مثلث TAT´ در رأس A قائم‌الزاویه است.



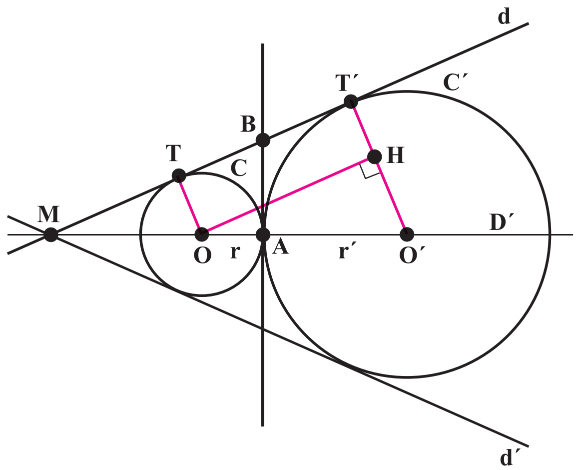
شکل ۴

اثبات: مثلثی که در آن، میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، قائم‌الزاویه است. در این مثلث نیز AB میانه و نصف TT´ است.

۳. اگر شعاع دایره‌های O و O´ در شکل ۵ به‌ترتیب r و r´ باشد، نشان دهید:

$$AB = BT = BT' = \sqrt{rr'}$$

از نقطهٔ O بر OT عمودی رسم می‌کنیم، چهارضلعی OTT´H مستطیل است، پس: TT´=OH.



شکل ۵

$$OO' = r + r' \quad , \quad O'H = r' - r$$

$$TT' = OH = \sqrt{OO'^{۲} - O'H^{۲}}$$

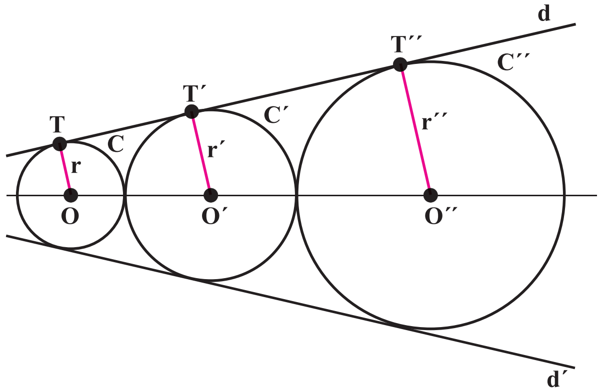
$$= \sqrt{(r + r')^{۲} - (r' - r)^{۲}}$$

$$= \sqrt{۴rr'} = ۲\sqrt{rr'}$$

$$\Rightarrow BT = BT' = BA = \sqrt{rr'}$$

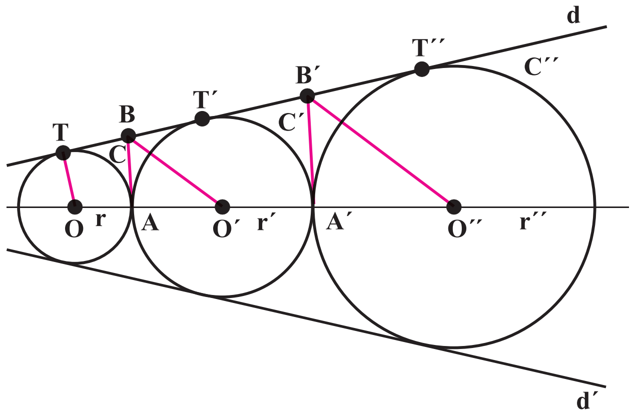
۴. با روشی که در بند ۱ آموختیم، دایرهٔ سومی مماس بر c´، d و d´ رسم می‌کنیم (شکل ۶). شعاع این دایره را r´´ می‌نامیم.

نشان دهید: $r' = \sqrt{rr''}$؛ یعنی r´ واسطهٔ هندسی بین r و r´´ است.



شکل ۶

مماس‌های داخلی AB و A´B´ را رسم می‌کنیم. مثلث‌های ABO´ و A´B´O´´ به حالت دو زاویه متشابه‌اند، زیرا BA و B´A´ موازی و BB´ مورب است، BO´ و B´O´´ نیم‌سازند، و زاویه‌های داخلی A و A´ نیز قائمه‌اند.



شکل ۷

پس در این دو مثلث زوایای داخلی B و B´ برابرند و دو مثلث به حالت دو زاویه متشابه‌اند. از تناسب اضلاع داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{r'}{r''}$$

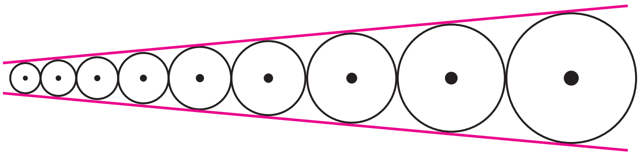
مطابق بند ۳ داریم: $AB = \sqrt{rr'}$

به دلیل مشابه خواهیم داشت: $A'B' = \sqrt{r'r''}$. بنابراین:

$$\frac{\sqrt{rr'}}{\sqrt{r'r''}} = \frac{r'}{r''} \Rightarrow \frac{r\cancel{r'}}{\cancel{r'}r''} = \frac{r'^{۲}}{r''^{۲}}$$

$$\Rightarrow rr''^{۲} = r'^{۲}r'' \Rightarrow rr'' = r'^{۲}$$

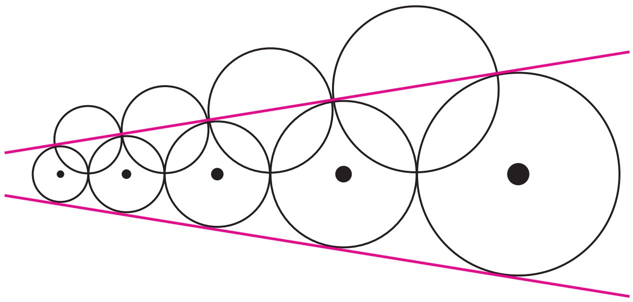
۵. پس می‌توان نتیجه گرفت اگر این دنباله از دایره‌ها را به‌همین ترتیب ادامه دهیم، **شعاع‌های آن‌ها یک دنبالهٔ هندسی می‌سازند.**



شکل ۸

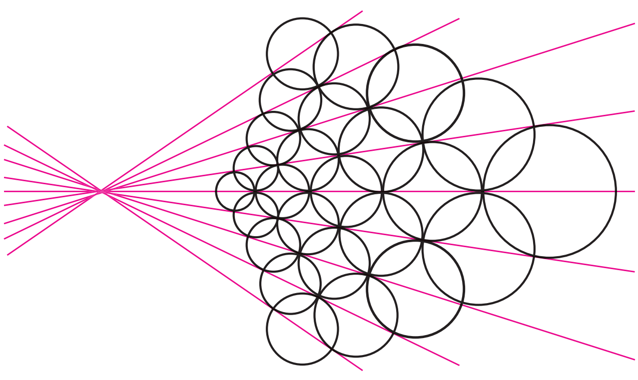
این دایره‌ها را به سمت نقطهٔ تقاطع مماس‌ها نیز می‌توان رسم کرد. آیا می‌دانید به این ترتیب تا نقطهٔ تقاطع چند دایره می‌توان رسم کرد؟ درست حدس زدید. بی‌شمار دایره! جالب است، نه؟!

۶. در بند ۲ دیدیم مثلث TAT' قائم‌الزاویه است، پس می‌توان دایره‌ای به مرکز B از رئوس این مثلث گذراند. با رسم دایره‌های مشابه برای نقاط متناظر، دنبالهٔ دیگری از دایره‌های متوالیاً مماس به‌دست می‌آید. خط گذرنده از مرکز دایره‌های دنبالهٔ قبلی، مماس مشترک دایره‌های جدید است.



شکل ۹

و این دنباله‌ها را می‌توان ادامه داد (شکل ۱۰).

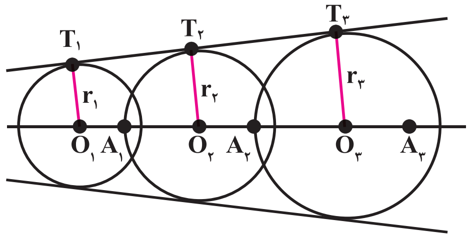


شکل ۱۰

جالب است که تمام خطوط مماس از یک نقطه می‌گذرند.

۷. لازم نیست دنبالهٔ دایره‌ها متوالیاً برهم مماس باشند، بلکه ممکن است متقاطع یا متخارج نیز باشند.

برای صورت‌بندی بهتر مسئله، ضریب α را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:



شکل ۱۱

$$\alpha = \frac{O_{۱}A_{۱}}{r_{۱}} = \frac{O_{۲}A_{۲}}{r_{۲}} = L$$

نقاط A_i نقطهٔ شروع دایرهٔ بعدی هستند.

در اینجا چهار حالت رخ می‌دهد:

۱. اگر $\alpha = ۱$ باشد، همان حالت مماس متوالی پیش می‌آید.

۲. اگر $\alpha > ۱$ باشد، دایره‌ها متخارج هستند.

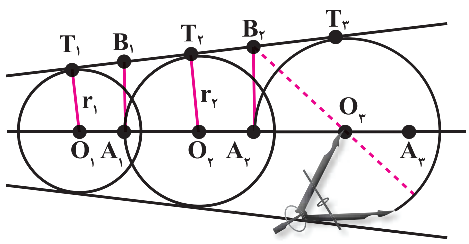
۳. اگر $-۱ < \alpha < ۱$ باشد، دایره‌ها متقاطع خواهند بود.

۴. و اگر $\alpha = -۱$ باشد، دایره‌ها مماس داخل خواهند شد.

قبل از نشان دادن حالت‌ها به یک سؤال مهم باید پاسخ داد:

● **اگر دو دایره داشته باشیم، دایرهٔ سوم و دایره‌های بعدی را چطور رسم می‌کنیم؟**

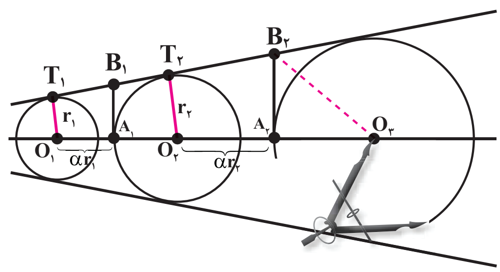
فرض کنید دو دایره متقاطع به شعاع‌های $r_{۱}$ و $r_{۲}$ داریم. ابتدا نسبت α را پیدا می‌کنیم، یعنی نقطهٔ $A_{۱}$ از مرکز دایرهٔ اول، چه کسری از شعاع این دایره جلوتر یا عقب‌تر است. مثلاً اگر $\frac{O_{۱}A_{۱}}{r_{۱}}$ برابر ۰/۷ باشد، از $O_{۲}$ نیز به اندازهٔ $۰/۷ r_{۲}$ جلو می‌رویم تا نقطهٔ $A_{۲}$ به‌دست آید. سپس از $A_{۲}$ بر خط‌المرکزین عمود اخراج می‌کنیم تا مماس مشترک را در $B_{۲}$ قطع کند. هرجا نیم‌ساز $B_{۲}$ خط‌المرکزین را قطع کند، مرکز دایرهٔ سوم است که آن را $O_{۳}$ می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز $O_{۳}$ و شعاع $O_{۳}A_{۲}$ جواب است. به‌همین ترتیب دایره‌های بعدی نیز رسم می‌شوند.



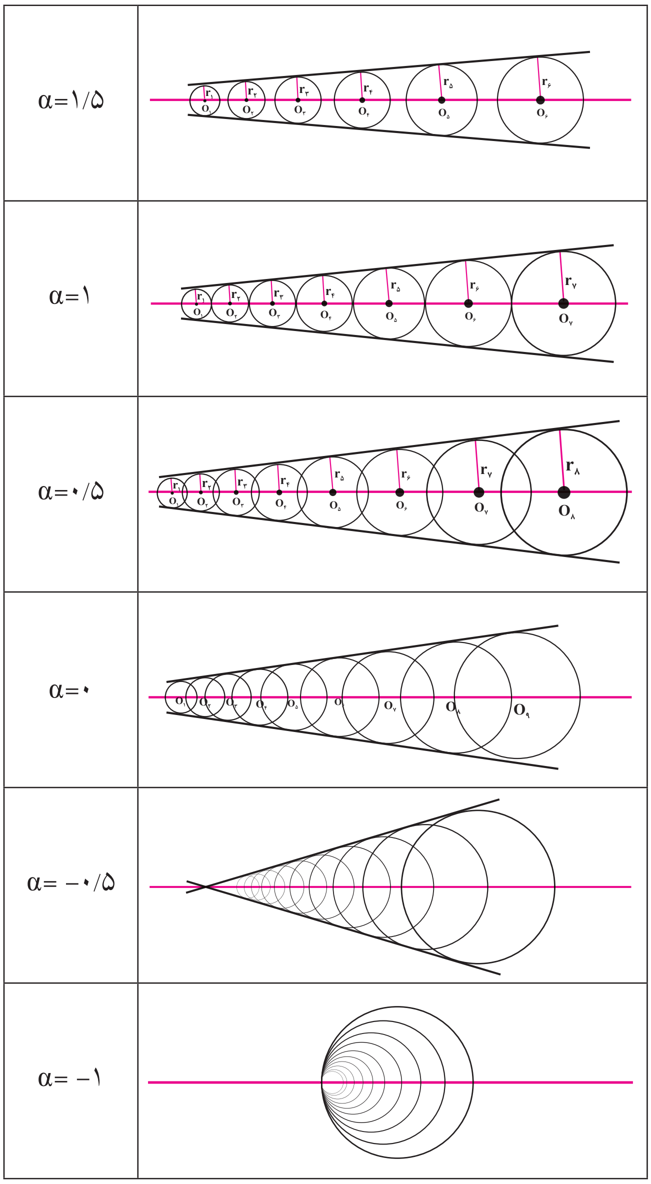
شکل ۱۲

سؤال: چرا این دایره بر مماس مشترک دو دایرهٔ قبلی مماس است؟ و چرا شعاع آن برابر است با: $r_{۳} = \frac{r_{۲}^{۲}}{r_{۱}}$؟ پاسخ به‌عهدهٔ شما!

واضح است که برای حالت متخارج نیز همین کار را می‌کنیم.



شکل ۱۳

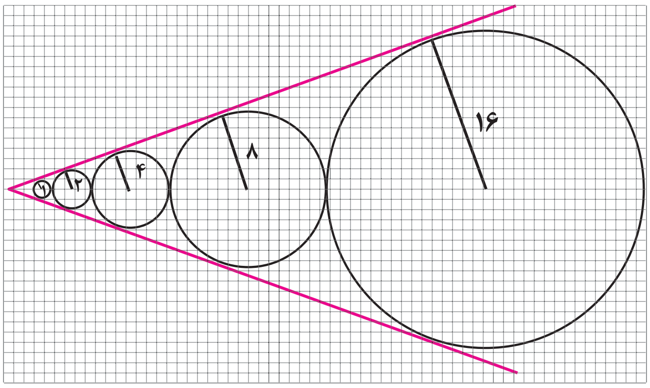


شکل ۱۴ در همهٔ حالات فوق، شعاع‌های دایره‌ها یک دنبالهٔ هندسی می‌سازند.

تصویری از دنبالهٔ هندسی

به این ترتیب امکانی فراهم می‌آید که بتوانیم یک دنبالهٔ هندسی را به تصویر بکشیم.

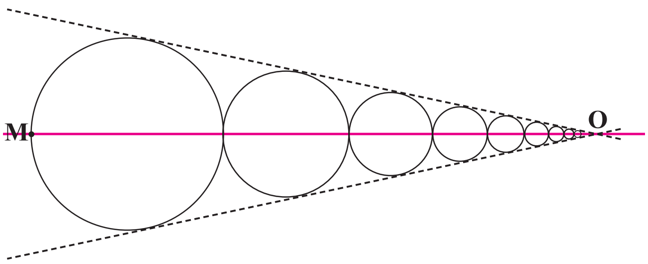
مثلاً دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۲ را می‌توان با دنباله‌ای از دایره‌ها که همگی بر دو خط مماس هستند، نشان داد.



شکل ۱۵

حد مجموع

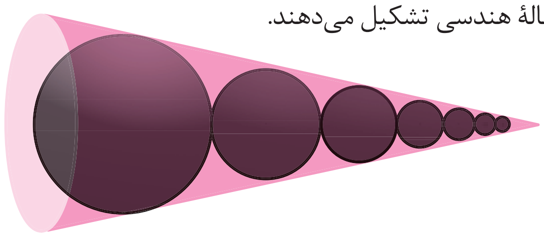
می‌دانیم اگر قدرنسبت در یک دنبالهٔ هندسی بین ۱ و ۱- باشد، آن دنباله هم‌گراست و مجموع اعداد آن دنباله تا بی‌نهایت به سمت عددی مشخص میل می‌کند که «حد مجموع» نامیده می‌شود. با تصویری که با استفاده از دنبالهٔ دایره‌ها به‌عنوان یک تصاعد هندسی پیدا کردیم، می‌توانیم برای هم‌گرایی دنباله‌ای با قدرنسبت کمتر از یک و حد مجموع آن‌ها، یک دلیل شهودی ارائه دهیم. برای مثال، در شکل ۱۶ قدرنسبت از ۱ کوچک‌تر است. می‌توانیم از نقطهٔ M تا نقطهٔ تقاطع مماس مشترک‌ها، بی‌شمار دایره رسم کنیم. قطرهای این دایره‌ها یک دنبالهٔ هندسی می‌سازند که به سمت صفر میل می‌کند و حد مجموع این قطرها به اندازهٔ پاره‌خط MO است.



شکل ۱۶

دنبالهٔ کره‌ها

بدیهی است اگر این مطلب را در فضای سه‌بعدی در نظر بگیریم، دنبالهٔ دایره‌ها به دنبالهٔ کره‌ها تبدیل می‌شود و مماس مشترک آن‌ها جای خود را به مخروطی می‌دهد که بر تمامی آن کره‌ها مماس است. به‌عبارت دیگر، اگر مجموعه‌ای از کره‌ها که متوالیاً برهم مماس باشند، همگی بر سطح جانبی یک مخروط مماس باشند، شعاع‌هایشان یک دنبالهٔ هندسی تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۷