

(۱) اگر  $(a, p^4) = p^2$  و  $(b, p^3) = p^2$  مطلوب است محاسبه ی  $(a + b, p^6)$ .

(۲) چند مقسوم علیه از  $60 \cdot 2^3$  مکعب کامل اند؟

(۳) اگر  $n$  دقیقاً ۲۲۰ مقسوم علیه داشته باشد. ثابت کنید عدد اول  $p$  وجود دارد که  $p^{10} | n$ .

(۴) عدد  $140^4$  را به چند طریق می توان به حاصل ضرب دو عدد طبیعی تجزیه کرد؟

(۵) ثابت کند  $\tau(n)$  عددی فرد است اگر و تنها اگر  $n$  مربع کامل باشد.

(۶) اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند که  $(m, n) = 1$  باشد. ثابت کنید  $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$  و  $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ .

(۷) به ازای هر عدد طبیعی  $n$  ثابت کنید:  $\frac{\sigma(n!)}{n!} \geq 1 + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{n}$ .

(۸) اگر  $a, b, c$  اعداد طبیعی باشند و  $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$  ثابت کنید  $a^2 + b^2 + c^2$  مرکب است.

(۹) اگر  $p$  عددی اول باشد و  $p | n^3 - 1$  و  $n | p - 1$  ثابت کنید  $p = n^2 + n + 1$ .

(۱۰) اگر  $p$  عددی اول باشد ثابت کنید  $p | \binom{p}{k}$ .

(۱۱) ثابت کنید عدد اول  $p > 5$  وجود ندارد به طوری که  $p^n = (p - 1)! + 1$ . (قضیه لیوویل)

(۱۲) به ازای  $n \geq 2$  ثابت کنید  $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{n}$  عددی غیر صحیح است.

(۱۳) ثابت کنید  $(a, b, c)(ab, ac, bc) = (a, b)(a, c)(b, c)$ .

(۱۴) اگر  $24 | n + 1$  ثابت کنید  $24 | \sigma(n)$ .

(۱۵) اگر  $2^m - 1$  عددی اول باشد و  $n = 2^{m-1}(2^m - 1)$  ثابت کنید  $\sigma(n) = 2n$ .

(۱۶) فرض کنید  $a \equiv b \pmod{196}$  حاصل  $(a^2 - b^2, 28)$  را بیابید.

(۱۷) اگر امروز یک شنبه باشد ۲۳۳ روز دیگر چه روزی است؟

(۱۸) اگر  $a \equiv b \pmod{m}$  ثابت کنید  $(a, m) = (b, m)$ .

(۱۹) باقیمانده  $3^{73}$  را بر ۸ بیابید.

(۲۰) باقیمانده  $181^{181}$  را بر ۱۷ بیابید.